Transformações Lineares

Definição

Sejam U e V espaços vetoriais. Diremos que uma função $T : U \to V$ é uma transformação linear se forem verificadas as seguintes condições:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v), \ \ \forall\, u, v \in U;$
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \ \ \forall\, u \in U, \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$

Observações

1. $T : U \to V$ é uma transformação linear se e somente se

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v),$$

para todo $u, v \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. $T(0) = 0$, ou seja, toda transformação linear de U em V leva o elemento neutro de U no elemento neutro de V.

Exemplos:

1. $T : U \to V$ dada por

$$T(u) = 0 \quad \forall u \in U$$

é chamada de transformação nula.

2. $T : U \to U$ dada por

$$T(u) = u, \quad \forall u \in U$$

é chamada de transformação identidade.

3. $T : P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$T(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = (a_0, \ldots, a_n).$$

Exemplos (continuação):

4. Se $A \in M_{m\times n}$ é uma matriz dada, definimos $T : M_{n\times 1} \to M_{m\times 1}$ por

$$T(X) = AX.$$

5. $T : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad \forall f \in C([0,1];\mathbb{R}).$$

6. $T : C^1([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$ dada por

$$T(f) = f', \quad \forall f \in C([0,1];\mathbb{R}).$$

Exemplos:

Funções entre espaços vetoriais que NÃO são transformações lineares:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$$T(x, y, z) = x + y + z + 1.$$
Note que $T(0, 0, 0) = 1 \neq 0$.
2. $T : C([0, 1]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por
$$T(f) = \int_0^1 |f(x)|\, dx, \quad \forall f \in C([0, 1]; \mathbb{R}).$$

De fato, se T fosse linear deveríamos ter
$$T(-f) = -T(f), \quad f \in C([0, 1]; \mathbb{R}). \tag{1}$$
Por outro lado, se $f(t) = 1$ para todo $t \in [0, 1]$ temos
$$T(-1) = 1 = T(1),$$
o que contradiz (**??**).

Proposição

Seja U um espaço vetorial com base $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Toda transformação linear $T : U \to V$ ficará determinada por $T(u_1), \ldots, T(u_n)$, ou seja, conhecidos estes vetores, conhece-se $T(u)$ para qualquer $u \in U$.

Demonstração.

Já que $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de U, dado $u \in U$ existem $\alpha_1, \ldots,$ $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Deste modo,

$$T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n).$$

$\square$

Exercício: Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1,2) = (3,-1) \qquad \text{e} \qquad T(0,1) = (1,2).$$

Solução: Note que $(1,2)$ e $(0,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então

$$(x,y) = x(1,2) + (y-2x)(0,1).$$

Assim, a transformação T deve satisfazer

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x(1,2) + (y-2x)(0,1)) \\ &= xT(1,2) + (y-2x)T(0,1) \\ &= x(3,-1) + (y-2x)(1,2) \\ &= (x+y, 2y-5x). \end{aligned}$$

Exercício (continuação):

Falta verificar que

$$T(x, y) = (x + y, 2y - 5x)$$

é uma transformação linear.

De fato, sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

- $T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$ $(x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 2(y_1 + y_2) - 5(x_1 + x_2)) =$ $(x_1 + y_1, 2y_1 - 5x_1) + (x_2 + y_2, 2y_2 - 5x_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$.
- $T\lambda(x_1, y_1) = T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, 2\lambda y_1 - 5\lambda x_1) =$ $\lambda(x_1 + y_1, 2y_1 - 5x_1) = \lambda T(x_1, y_1)$.

O Espaço Vetorial $L(U, V)$

Sejam U e V espaços vetoriais. O conjunto de todas as transformações lineares

$$T : U \to V$$

é denotado por

$$L(U, V).$$

Quando $U = V$ usamos a notação

$$L(U) = L(U, U).$$

Proposição

Sejam $T, S \in L(U, V)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Defina*

- $T + S : U \to V$ *por*

$$(T + S)(u) = Tu + Su, \quad \forall u \in U.$$

- $\lambda T : U \to V$ *como*

$$(\lambda T)(u) = \lambda(Tu), \quad \forall u \in U.$$

Então $L(U, V)$ *com as operações acima é um espaço vetorial.*

Observação

Note que o elemento neutro da adição é a transformação nula, isto é, $T \in L(U, V)$ *definida por* $T(u) = 0$, *para todo* $u \in U$.

Definição

Seja U *um espaço vetorial. Definimos o* *espaço dual* *de* U *como sendo*

$$U' = L(U, \mathbb{R}),$$

isto é, U' *é* *formado* *pelas transformações lineares* $T : U \to \mathbb{R}$*. Estas transformações lineares também são chamadas de* *funcionais lineares* *definidos em* U*.*

Teorema

Se U é um espaço vetorial de dimensão n e V é um espaço vetorial de dimensão m então $L(U, V)$ tem dimensão mn.

Demonstração.

Sejam $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $B_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de V. Para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ defina

$$T_{ij}(\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n) = \beta_i v_j, \qquad \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}.$$

Demonstração (continuação).

Verifiquemos que T_{ij} é uma transformação linear para quaisquer $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$.

- $T_{ij}(w_1 + w_2) = T_{ij}w_1 + T_{ij}w_2$, $\forall\ w_1, w_2 \in U$.

Sejam $\beta_1, \ldots \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$w_1 = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n \in U \quad \text{e}$$
$$w_2 = \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_n u_n \in U.$$

Então

$$\begin{aligned}
T_{ij}(w_1 + w_2) &= T_{ij}((\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n) + (\gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_n u_n)) \\
&= T_{ij}((\beta_1 + \gamma_1)u_1 + \ldots + (\beta_n + \gamma_n)u_n) \\
&= (\beta_i + \gamma_i)v_j = \beta_i v_j + \gamma_i v_j \\
&= T_{ij}(\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n) + T_{ij}(\gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_n u_n) \\
&= T_{ij}w_1 + T_{ij}w_2.
\end{aligned}$$

Demonstração (continuação).

- $T_{ij}(\lambda w_1) = \lambda T_{ij} w_1$, $\forall\ w_1 \in U$ e $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
T_{ij}(\lambda w_1) &= T_{ij}(\lambda(\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n)) \\
&= T_{ij}(\lambda\beta_1 u_1 + \ldots + \lambda\beta_n u_n) \\
&= \lambda\beta_i v_j \\
&= \lambda T_{ij}(\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n) \\
&= \lambda T_{ij} w_1.
\end{aligned}$$

Mostremos que os T_{ij}, com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, formam uma base de $L(U, V)$.

Demonstração (continuação).

- T_{ij} são L.I..

Se $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij} = 0$ então, para cada $1 \leq k \leq n$,

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}T_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}T_{ij}(u_k).$$

Agora, como

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases},$$

obtemos

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}T_{ij}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}T_{kj}(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}v_j.$$

Como $v_1, \ldots, v_m$ são L.I., então

$$a_{k1} = \ldots = a_{km} = 0.$$

Portanto $T_{11}, \ldots, T_{nm}$ são L.I..

Demonstração (continuação).

- T_{ij} geram $L(U, V)$.

Seja $T \in L(U, V)$. Se $u \in U$, então

$$u = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n,$$

para certos números reais $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

Como T é linear,

$$T(u) = \beta_1 T(u_1) + \ldots + \beta_n T(u_n).$$

Como $T(u_i) \in V$, podemos escrever, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$T(u_i) = \alpha_{1i} v_1 + \ldots + \alpha_{mi} v_m.$$

Demonstração (continuação).

Porém, como para quaisquer $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, temos

$$T_{ij}(u) = \beta_i v_j,$$

então

$$\begin{aligned} T(u) &= \beta_1 T(u_1) + \ldots + \beta_n T(u_n) \\ &= \beta_1(\alpha_{11} v_1 + \ldots + \alpha_{m1} v_m) + \ldots + \beta_n(\alpha_{1n} v_1 + \ldots + \alpha_{mn} v_m) \\ &= \alpha_{11}\beta_1 v_1 + \ldots + \alpha_{m1}\beta_1 v_m + \ldots + \alpha_{1n}\beta_n v_1 + \ldots + \alpha_{mn}\beta_n v_m \\ &= \alpha_{11} T_{11}(u) + \ldots + \alpha_{m1} T_{1m}(u) + \ldots + \alpha_{1n} T_{1n}(u) + \ldots + \alpha_{mn} T_{nm}(u), \end{aligned}$$

ou seja

$$T = \alpha_{11} T_{11} + \ldots + \alpha_{m1} T_{1m} + \ldots + \alpha_{1n} T_{1n} + \ldots + \alpha_{mn} T_{nm}.$$

Corolário

Se V for um espaço de dimensão n, então o seu dual também terá dimensão n.

Observação

Seguindo os passos da demonstração do teorema, se $u_1, \ldots, u_n$ *formarem uma base* B *de* U*,então os funcionais lineares*

$$f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$$

dados por

$$f_j(u) = f_j(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_j, \; j = 1, \ldots, n,$$

formarão uma base de U'*, chamada de base dual da base* B.

Exercício: Seja

$$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

uma base de $\mathbb{R}^3$. Encontre a base dual de $\mathbb{R}^3$.

Solução: Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0).$$

Assim, a base dual de $\mathbb{R}^3$ é dada pelos funcionais lineares f_1, f_2 e f_3, em que

$$f_1(x,y,z) = z, \quad f_2(x,y,z) = y - z \quad \text{e} \quad f_3(x,y,z) = x - y.$$

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.