Mudança de base

Coordenadas

Definição

Sejam V *um espaço vetorial finitamente gerado e* $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *uma base de* V*. Como* B *é uma base de* V*, todo elemento de* $u \in V$ *se escreve de forma única como*

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n,$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Os coeficientes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *são denominados coordenadas de* u *com relação à base* B*. Representaremos as coordenadas de* u *com relação à base* B *como*

$$u_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1: Mostre que os vetores

$$(1,1,1), \quad (0,1,1) \;\text{ e }\; (0,0,1)$$

formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas de $(1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base

$$B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}.$$

Solução:

- $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Já sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Então para verificar se os vetores acima formam uma base de V, basta verificar se eles são L.I.. De fato, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

possui determinante igual a $1 \neq 0$. Portanto, B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Continuação

- Coordenadas de $(1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

Observe que

$$(1,2,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1) = (\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma)$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuja (única) solução é $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = -2$. Desse modo, as coordenadas de $(1,2,0)$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2:

(a) Mostre que os polinômios

$$1, \ x \ \text{ e } \ x^2 - x$$

formam uma base B de $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Encontre as coordenadas de

$$1 + x + x^2$$

em relação à base B.

Solução:

(a) $B = \{1, x, x^2 - x\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

Devemos mostrar que cada $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R})$ se escreve de forma única como combinação linear de $1, x$ e $x^2 - x$. De fato,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \alpha 1 + \beta x + \gamma(x^2 - x) = \alpha + (\beta - \gamma)x + \gamma x^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = a_0 \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2, \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \alpha = a_0, \ \beta = a_1 + a_2 \text{ e } \gamma = a_2.$$

Continuação

- Coordenadas de $1+x+x^2$ com relação à base $B=\{1,x,x^2-x\}$.

Observe que

$$1+x+x^2=\alpha 1+\beta x+\gamma(x^2-x)=\alpha+(\beta-\gamma)x+\gamma x^2$$

é equivalente à

$$\begin{cases} \alpha=1 \\ \beta-\gamma=1 \\ \gamma=1 \end{cases} \iff \alpha=1,\ \beta=2 \text{ e } \gamma=1$$

Logo, as coordenadas de $1+x+x^2$ com relação à base B são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3: Encontre as coordenadas de

$$1 + x + x^2$$

com relação à base

$$C = \{1, x, x^2\}$$

.

Solução: Observe que

$$1 + x + x^2 = \alpha 1 + \beta x + \gamma x^2 \iff \alpha = \beta = \gamma = 1.$$

Logo, as coordenadas de $1 + x + x^2$ com relação à base C são dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observação

Os exemplos 2 e 3 nos mostram que as coordenadas de um elemento de um espaço vetorial podem variar quando se consideram bases distintas.

De fato, vimos que as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 \in P(\mathbb{R})$ em relação as bases

$$B = \{1, x, x^2 - x\} \qquad \text{e} \qquad C = \{1, x, x^2\}$$

são

$$p(x)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad p(x)_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

O que passaremos a estudar agora é como esta mudança ocorre, ou seja, como é possível encontrar as coordenadas de um vetor com relação a uma base, sabendo-se suas coordenadas com relação a uma outra.

Sejam V um espaço vetorial **finitamente gerado** e

$$B = \{b_1, \cdots, b_n\} \quad \text{e} \quad C = \{c_1, \cdots, c_n\}$$

bases de V. Como B é base e $c_1, \cdots, c_n \in V$, $\exists\, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, com $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, tais que

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_{11} b_1 + \alpha_{21} b_2 + \cdots + \alpha_{n1} b_n \\ &\vdots \\ c_n &= \alpha_{1n} b_1 + \alpha_{2n} b_2 + \cdots + \alpha_{nn} b_n. \end{aligned}$$

Desta forma, as coordenadas de $c_1, \ldots, c_n$ com relação à base B são, respectivamente,

$$c_{1_B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, c_{n_B} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definição

A matriz

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

cujas COLUNAS são formadas pelas coordenadas de $c_1, \ldots, c_n$ *com relação à base* B *é chamada de* **matriz mudança de base da base** B **para a base** C.

Exemplo 4: Considere as bases

$$B = \{(1,0,1),(1,1,1),(1,1,2)\} \quad \text{e} \quad C = \{1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Encontre a matriz M_B^C.

Solução.

Precisamos resolver o sistema

$$\begin{array}{rcl} (1,0,0) & = & \alpha_{11}(1,0,1)+\alpha_{21}(1,1,1)+\alpha_{31}(1,1,2) \\ (0,1,0) & = & \alpha_{12}(1,0,1)+\alpha_{22}(1,1,1)+\alpha_{32}(1,1,2) \\ (0,0,1) & = & \alpha_{13}(1,0,1)+\alpha_{23}(1,1,1)+\alpha_{33}(1,1,2) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} (\alpha_{11}+\alpha_{21}+\alpha_{31},\alpha_{21}+\alpha_{31},\alpha_{11}+\alpha_{21}+2\alpha_{31}) & = & (1,0,0) \\ (\alpha_{12}+\alpha_{22}+\alpha_{32},\alpha_{22}+\alpha_{32},\alpha_{12}+\alpha_{22}+2\alpha_{32}) & = & (0,1,0) \\ (\alpha_{13}+\alpha_{23}+\alpha_{33},\alpha_{23}+\alpha_{33},\alpha_{13}+\alpha_{23}+2\alpha_{33}) & = & (0,0,1). \end{array}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $(\alpha_{11},\alpha_{21},\alpha_{31})=(1,1,-1)$, $(\alpha_{12},\alpha_{22},\alpha_{32})=(-1,1,0)$ e $(\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{33})=(0,-1,1)$. Desta forma, obtemos

$$M_B^C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição

Sejam B *e* C **bases** *de um espaço vetorial de dimensão finita* V. *Se* v_B *e* v_C *representam as coordenadas de um dado vetor* $v \in V$ *com relação às bases* B *e* C, *respectivamente e se* M_B^C *é a* **matriz de mudança** *de* B **para** C *então*

$$v_B = M_B^C v_C.$$

Demonstração.

Sejam $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ bases de V. Dado um vetor $v \in V$ sejam

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

as suas coordenadas com relação bases B e C, respectivamente. Se $M_B^C = (\alpha_{ij})$ representar a matriz de mudança da base B para base C então, como $c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$, $j = 1, \ldots, n$, obteremos

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i = \sum_{j=1}^n y_j c_j = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) b_i$$

Demonstração (continuação).

Como os vetores $b_1, \ldots, b_n$ são L.I., então

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Porém, estas últimas n equações podem ser escritas na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ou, mais simplesmente,

$$v_B = M_B^C v_C.$$

Exemplo 5: Fixado $\theta \in \mathbb{R}$, considere

$$B = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}.$$

(i) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Encontre a matriz de mudança de base de B para a base $C = \{(1,0),(0,1)\}$.

(iii) Encontre as coordenadas do vetor $u = a(1,0) + b(0,1)$ com relação à base B.

Solução.

(i) $B = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, basta mostrar que $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ são L.I.. Se

$$\alpha(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + \beta(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) = (0,0),$$

então

$$\begin{cases} \alpha\cos\theta - \beta\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \alpha\operatorname{sen}\theta + \beta\cos\theta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0,$$

pois

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Solução (continuação).

(ii) Matriz de mudança de base de $B = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}$ para $C = \{(1,0),(0,1)\}$.

A matriz M_B^C será dada por (α_{ij}), em que

$$\begin{aligned}
(1,0) &= \quad \alpha_{11}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + \alpha_{21}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\\
(0,1) &= \quad \alpha_{12}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + \alpha_{22}(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta),
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
(1,0) &= \quad (\alpha_{11}\cos\theta - \alpha_{21}\operatorname{sen}\theta, \alpha_{11}\operatorname{sen}\theta + \alpha_{21}\cos\theta)\\
(0,1) &= \quad (\alpha_{12}\cos\theta - \alpha_{22}\operatorname{sen}\theta, \alpha_{12}\operatorname{sen}\theta + \alpha_{22}\cos\theta),
\end{aligned}$$

que implica que $(\alpha_{11}, \alpha_{21}) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ e $(\alpha_{12}, \alpha_{22}) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Assim,

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação).

(iii) Coordenadas do vetor $u = a(1,0) + b(0,1)$ com relação à base B.

Sabemos que

$$u_B = M_B^C u_C.$$

Assim,

$$u_B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta \\ b\cos\theta - a\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}.$$

Proposição

Sejam B, C e D bases de um espaço vetorial. Temos

$$M_B^D = M_B^C M_C^D.$$

Demonstração.

Veja a demonstração da Proposição 6.5 da apostila. $\square$

Proposição

Sejam B *e* C *bases em um espaço vetorial. Então a matriz* M_B^C *possui inversa e esta inversa é dada por* M_C^B*, a matriz de mudança da base* C *para* B.

Demonstração. Suponha que B e C são bases de um espaço vetorial de dimensão n. Já sabemos que

$$M_B^C M_C^B = M_B^B \qquad \text{e} \qquad M_C^B M_B^C = M_C^C.$$

Basta mostrar que $M_B^B = M_C^C = I$, em que I é a matriz identidade de ordem n. De fato, se $u_1, \ldots, u_n$ são os vetores da base B, então

$$\begin{array}{lllll}
u_1 & = & 1u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n & = & \alpha_{11}u_1 + \alpha_{21}u_2 + \cdots + \alpha_{n1}u_n \\
u_2 & = & 0u_1 + 1u_2 + 0u_3 + \cdots + 0u_n & = & \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \cdots + \alpha_{n2}u_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
u_n & = & 0u_1 + \cdots + 0u_{n-1} + 1u_n & = & \alpha_{1n}u_1 + \cdots + \alpha_{n-1n}u_{n-1} + \alpha_{nn}u_n.
\end{array}$$

Assim, $M_B^B = (\alpha_{ij})$ com

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{e, portanto,} \quad M_B^B = I.$$

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.