Dimensão

Definição

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.

- *Se $V = \{0\}$, definiremos a dimensão de V como sendo 0.*
- *Se $V \neq \{0\}$ definiremos a dimensão de V como sendo o número de elementos de uma base qualquer de V.*

Usaremos o símbolo $\dim V$ para designar a dimensão de V.

Definição

Se um espaço vetorial não for finitamente gerado, diremos que V possui dimensão infinita.

Proposição

Todo espaço vetorial de dimensão infinita possui uma infinidade de vetores L.I., ou seja, existem vetores u_j, $j \in \mathbb{N}$, de modo que a sequência

$$u_1, \ldots, u_n$$

é L.I para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita.

Claramente $V \neq \{0\}$.

Selecione $u_1 \in V$, $u_1 \neq 0$.

Como V não é finitamente gerado, $V \neq [u_1]$.

Assim, podemos tomar $u_2 \in V$ tal que $u_2 \notin [u_1]$.

Desta forma, os vetores u_1 e u_2 são L.I.

Demonstração (continuação).

Suponha que tenhamos encontrado vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ L.I..

Como V não é finitamente gerado, vale

$$V \neq [u_1, \ldots, u_n].$$

Assim, é possível escolher $u_{n+1} \in V$ tal que

$$u_{n+1} \notin [u_1, \ldots, u_n],$$

isto é, os vetores

$$u_1, \ldots, u_n, u_{n+1} \in V$$

são L.I.

Em resumo, existe em V uma sequência infinita de vetores L.I..

Proposição

Em um espaço vetorial de dimensão m qualquer sequência de vetores com mais de m elementos é L. D..

Demonstração.

Já vimos que, se um espaço vetorial V tiver dimensão m, então toda base de V possuirá m elementos.

Sejam $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ uma base de V e $v_1, \ldots, v_{m+1} \in V$.

Então, $\forall\ i = 1, \ldots, m+1$, $\exists\ \alpha_{ji} \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, tais que

$$v_i = \alpha_{1i} u_1 + \cdots + \alpha_{mi} u_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} u_j.$$

Demonstração (continuação).

Se $\beta_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m+1$, forem tais que

$$0 = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{m+1} v_{m+1}$$

então

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_1 \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j1} u_j + \cdots + \beta_{m+1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm+1} u_j \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \alpha_{j1} \right) u_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{m+1} \alpha_{jm+1} \right) u_m \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sum_{j=1}^{m} \beta_j \alpha_{ji} = 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, m+1. \qquad (1)$$

Como (1) é um sistema linear homogêneo com m equações e $m+1$ incógnitas, pelo menos um dos β_j é não nulo.

Logo, $v_1, \ldots, v_{m+1}$ são L. D. e, portanto, qualquer subconjunto de V, com mais de m elementos, também será L.D..

Corolário

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $W \subset V$ um subespaço vetorial de V. Então W tem dimensão finita.

Demonstração.

Suponha que W tenha dimensão infinita.

Então W possui uma infinidade de vetores L. I..

Como estes vetores também são L. I. em V, então V também possuirá uma infinidade de vetores L. I..

o que contradiz o fato de V ter dimensão finita. $\square$

Corolário

Se V for um espaço vetorial n-dimensional e $u_1, \ldots, u_n \in V$ forem L.I., então $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de V.

Teorema (Teorema do Completamento)

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Se os vetores $u_1, \ldots, u_r$ forem L.I. em V, com $r < n$, então $\exists\ u_{r+1}, \ldots, u_n \in V$ tais que $u_1, \ldots, u_r$, $u_{r+1}, \ldots, u_n$ formam uma base de V.

Demonstração

Como $r < n$, existe $u_{r+1} \in V$ tal que $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}$ são L.I.,

pois caso contrário os vetores $u_1, \ldots, u_r$ formariam uma base de V, o que é impossível já que

$$\dim V = n > r.$$

Temos dois casos:

- $n = r + 1 \implies u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}$ formam uma base de V.
- $n > r + 1 \implies \exists\ u_{r+2} \in V$ tal que

$$u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2} \ \text{ são } L.I.,$$

pois caso contrário a sequência $u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}$ seria uma base de V, o que é impossível, já que $\dim V = n > r + 1$.

Demonstração (continuação).

Repetindo os argumentos anteriores, encontramos vetores

$$u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_{r+k},$$

com $r + k = n$, de forma que

$$u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_{r+k} \text{ são L.I.}$$

e, como

$$\dim V = n = r + k,$$

esta sequência de vetores é uma base de V que contém os vetores $u_1, \ldots, u_r$.

Exemplos

1. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

   Já vimos que $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, em que

   $$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

2. A dimensão de $P(\mathbb{R})$ é infinita.

   Já vimos que $P(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado e que

   $$P(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots].$$

3. $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

   Já vimos que $P_n(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$

   e, portanto,

   $$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

   é uma base de $P_n(\mathbb{R})$ que contém $n + 1$ elementos.

Exemplos

4. dim $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

   Note que as matrizes

$$A_{k,l} = (\delta_{i,j}^{k,l})_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq n}}$$

   $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$, em que

$$\delta_{i,j}^{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

   formam uma base de $M_{m\times n}$.

Exemplos Para ilustrar o exemplo anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n},$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

formam uma base de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais

Teorema (Dimensão da soma)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W forem subespaços vetoriais de V, então

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

Demonstração.

Lembremos que, $\dim V < \infty$ e U, W, $U \cap W$ são subespaços vetoriais de V

$$\therefore \quad \dim U < \infty, \ \dim W < \infty \ \text{ e } \ \dim U \cap W < \infty.$$

Seja $\boxed{m = \dim U \cap W}$. Então $\exists\ v_1, \ldots, v_m \in U \cap W$ elementos de uma base de $U \cap W$.

Como estes vetores são L.I. e pertencem a U e a W, pelo Teorema do Completamento temos:

1. $\exists\ u_1, \ldots, u_p \in U$ tais que $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$ formam uma base de U e, portanto, $\boxed{\dim U = m + p}$.
2. $\exists\ w_1, \ldots, w_q \in W$ de modo que $w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ formam uma base de W e, portanto, $\boxed{\dim W = m + q}$.

Demonstração (continuação).

Assim,

$$\begin{aligned}\dim U + \dim W - \dim U \cap W &= m + p + m + q - m \\ &= m + p + q\end{aligned}$$

e, portanto, temos que mostrar que

$$\dim(U + W) = m + p + q.$$

Para isto, basta mostrarmos que

$$u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$$

formam uma base de $U + W$.

Demonstração (continuação).

Primeiro, mostraremos que

- $u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ **geram** $U + W$.

Seja $v \in U + W$. Então $\exists$ $u \in U$ e $w \in W$ tais que

$$v = u + w.$$

Agora, pelos itens (1) e (2) do início da demonstração, temos:

(i) u é uma combinação linear de $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$;

(ii) w é uma combinação linear de $w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$.

Assim, pelos itens (i) e (ii) acima, $v = u + w$ é uma combinação linear de $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_q$. Portanto,

$$U + W = [u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_q].$$

Demonstração (continuação).

Agora, vamos provar que

- $u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ **são L.I.**

Suponha que

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_q w_q + \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_m v_m = 0,$$

ou seja,

$$U \ni \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \ldots + \delta_m v_m = -\beta_1 w_1 - \ldots - \beta_q w_q \in W.$$

Logo,

$$-\beta_1 w_1 - \ldots - \beta_q w_q \in U \cap W = [v_1, \ldots, v_m].$$

Demonstração (continuação).

Como $-\beta_1 w_1 - \ldots - \beta_q w_q \in U \cap W = [v_1, \ldots, v_m]$, $\exists\ \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ tais que

$$-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m,$$

ou seja,

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0.$$

Como $w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ são L.I., pois formam uma base de W, então

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0.$$

Demonstração (continuação).

Por outro lado,

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0$$

e o fato de $\boxed{\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0}$ implica que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0.$$

Como $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m$ são L.I., pois formam uma base de U, então

$$\boxed{\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \delta_1 = \cdots = \delta_m = 0}$$

ou seja, $u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q, v_1, \ldots, v_m$ **são L.I.**

Corolário

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e U um subespaço vetorial de V. Se $\dim U = \dim V$, então $U = V$.

Demonstração.

É claro que $U \subset V$. Suponha que $V \not\subset U$. Então $\exists\ v \in V$ tal que $v \notin U$. Seja $W = [v]$. Então, vamos

- $\dim W = 1$.
- $W \cap U = \{0\}$ e, portanto, $\dim U \cap W = 0$.

Por outro lado, pelo Teorema da dimensão da Soma,

$$\begin{aligned} \dim(U+W) &= \dim U + \dim W - \dim U \cap W \\ &= \dim U + 1 \\ &= \dim V + 1 > \dim V \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $\boxed{U + W \subset V \Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim V.}$ □

Observação

Sejam V um espaço vetorial e U e W subespaços vetoriais de V. Suponha que

$$V = U + W \quad e \quad \dim U + \dim W > \dim V.$$

Então $U \cap W \neq \{0\}$, isto é, a soma $U + W$ não é direta.

Demonstração.

Suponha que $U \cap W = \{0\}$. Então $\dim U \cap W = 0$ e

$$\begin{aligned} \dim V & \overset{hip}{<} \dim U + \dim W \\ & \overset{Teor.}{=} \dim(U + W) + \dim U \cap W = \dim(U + W) \end{aligned}$$

um absurdo. $\square$

Exemplo 1. Sejam

$$U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\} \text{ e}$$
$$V = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}); p(-1) = 0\}.$$

Encontre uma base de

(a) U;

(b) V;

(c) $U \cap V$;

(d) $U + V$.

Resolução.

(a) $U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$

Observe que

$$\begin{aligned} & p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in U \\ \iff & p(0) = p(1) = 0 \\ \iff & \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \\ \iff & p(x) = -(a_2 + a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ & \quad = a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x). \end{aligned}$$

Desse modo, $U = [x^2 - x, x^3 - x]$ e estes polinômios são L.I., pois como cada um tem um grau distinto do outro, nenhum pode ser múltiplo do outro. Assim, $x^2 - x$ e $x^3 - x$ formam uma base de U.

Resolução (continuação).

- $V = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}); p(-1) = 0\}$

Temos:

$$\begin{aligned} & p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in V \\ \Longleftrightarrow\ & p(-1) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a_1 = a_0 + a_2 - a_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad p(x) &= a_0 + (a_0 + a_2 - a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ &= a_0(1 + x) + a_2(x^2 + x) + a_3(x^3 - x). \end{aligned}$$

Assim, $V = [1 + x, x^2 + x, x^3 - x]$ e estes polinômios são L.I., pois como cada um tem um grau distinto do outro, nenhum pode ser uma combinação linear dos outros dois. Logo $1 + x, x^2 + x$ e $x^3 - x$ formam uma base de V.

Resolução (continuação).

- $U \cap V$

Temos:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in U \cap V$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = a_2 = 0 \\ a_1 = -a_3 \end{cases}$$

$$\iff p(x) = -a_1(x^3 - x).$$

Logo, $x^3 - x$ é uma base de $U \cap V$.

Resolução (continuação).

- $U + V$

Sabemos que $\dim U = 2$, $\dim V = 3$ e $\dim U \cap V = 1$.

Assim,

$$\dim(U + V) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim P_3(\mathbb{R}),$$

ou seja, $U + V = P_3(\mathbb{R})$ e podemos tomar como base os polinômios

$$1, x, x^2 \text{ e } x^3.$$

Exemplo 2: Sejam

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + t + z = 0\} \quad \text{e}$$
$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t + z = 0\}.$$

Então, pelo Exemplo 5–Slide 2, temos

$$U = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$$
$$V = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)]$$
$$U \cap V = [(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1)]$$
$$U + V = [(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)]$$

Verifique que os geradores acima são, na verdade, bases para os respectivos subespaços vetoriais.

Resolução.

Precisamos verificar que cada sequência de vetores acima é L.I..

- $U = [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)]$

Se

$$\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,1,1,0)+\gamma(0,1,0,1)=(0,0,0,0)$$

então

$$(\alpha,\alpha+\beta+\gamma,\beta,\gamma)=(0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Resolução (continuação).

- $V = [(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)]$

Se

$$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

então

$$(\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma) = (0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Resolução (continuação).

- $U \cap V = [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)]$

Se

$$\alpha(1,0,-1,0)+\beta(0,1,0,1)=(0,0,0,0)$$

então

$$(\alpha,\beta,-\alpha,\beta)=(0,0,0,0)$$

que implica em $\alpha=\beta=0$.

Resolução (continuação).

Assim, temos

$$\begin{array}{rcl} U & = & [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)] \quad \Rightarrow \quad \dim U = 3 \\ V & = & [(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)] \quad \Rightarrow \quad \dim V = 3 \\ U \cap V & = & [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)] \quad \Rightarrow \quad \dim U \cap V = 2 \end{array}$$

e, portanto,

$$\dim(U+V) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Como $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$,$(1,0,0,1)$ e $(0,0,1,1)$ geram $U+V$, segue-se do fato da dimensão deste subespaço ser 4 que tais vetores formam uma base de $U+V$. Assim, como

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim U + V,$$

temos

$$U + V = \mathbb{R}^4.$$

Note que esta **soma não é direta**.

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.