Base

A noção de base de um espaço vetorial é muito simples. Ela consiste em escolher um conjunto de geradores que seja o menor possível, isto é, um conjunto que gere o espaço, mas que se deste conjunto for subtraído qualquer elemento, o que resta não gera mais o espaço todo.

Definição

Seja $V \neq \{0\}$ um espaço vetorial finitamente gerado. Uma base de V é uma sequência de vetores L. I., B, de V que também gera V.

Exemplos

1. $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

2. Os vetores $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{R}^n$, em que

$$e_1 = (1,0,\dots,0),\ \ e_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots,e_n = (0,\dots,0,1)$$

formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

3. As matrizes em

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

formam uma base de M_2.

Exemplos

4. Os vetores $(1,1)$ e $(1,-1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

Primeiramente, vamos mostrar que $(1,1)$ e $(1,-1)$ são L. I.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$0 = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1).$$

Isto equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & = & 0 \end{cases}$$

que possui como única solução, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Portanto $(1,1)$ e $(1,-1)$ são L. I.

Exemplos

4. **(continuação)**

Agora, temos que mostrar que todo ponto de $\mathbb{R}^2$ se escreve como combinação linear de $(1,1)$ e $(1,-1)$.

Sejam $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1).$$

Isto equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}$$

que possui como solução, $\alpha_1 = \dfrac{(x+y)}{2}$ e $\alpha_2 = \dfrac{(x-y)}{2}$.

Observação

Bastava mostrar que todo ponto de $\mathbb{R}^2$ se escreve de maneira única. (Por quê?)

Observação

A base de um espaço vetorial não é única.

Exemplo:

- Pelo exemplo 2,

$$B_1 = \{(1,0),(0,1)\} \quad \text{é uma base de } \mathbb{R}^2;$$

- Pelo exemplo 4,

$$B_2 = \{(1,1),(1,-1)\} \quad \text{também é uma base de } \mathbb{R}^2.$$

Teorema

Todo espaço vetorial

$$V \neq \{0\} \quad \textit{finitamente gerado}$$

admite uma base. Em outras palavras, existe uma sequência de vetores L.I. de V formada por geradores.

Demonstração.

Como $V \neq \{0\}$ é finitamente gerado existem $u_1, \ldots, u_n \in V$ tais que

$$V = [u_1, \ldots, u_n].$$

Se $u_1, \ldots, u_n$ forem L.I, então esta sequência será uma base de V e não há nada mais a ser provado.

Suponha que $u_1, \ldots, u_n$ sejam L.D. Como $V \neq \{0\}$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u_j \neq 0$. Por simplicidade, podemos supor que $u_1 \neq 0$.

(i) Se $u_2, \ldots, u_n$ puderem ser escritos como combinação linear de u_1, então

$$V = [u_1]$$

e u_1 é uma base de V.

Demonstração (continuação).

Se (i) não for válido, então existirá algum u_j, com $2 \leq j \leq n$, tal que u_1, u_j são L.I.. Por simplicidade, suponhamos u_1, u_2 são L.I..

(ii) Se $u_3, \ldots, u_n$ puderem ser escritos como combinações lineares de u_1 e u_2, então

$$V = [u_1, u_2]$$

e u_1, u_2 formam uma base de V.

Podemos repetir este processo e, como o número de elementos de $L = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é finito, ele finda.

Assim, existe uma sequência de vetores L.I. em L que gera V.

Esta sequência forma uma base de V.

Teorema

Em um espaço vetorial

$$V \neq \{0\} \quad \textit{finitamente gerado},$$

toda base possui o mesmo número de elementos.

Demonstração.

Sejam

$$B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\} \quad \text{e} \quad B_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$$

bases de um espaço vetorial finitamente gerado V. Suponha que $n > m$.

Como os vetores $v_1, \ldots, v_m$ geram V, podemos escrever, para cada $1 \leq j \leq n$,

$$u_j = \alpha_{1j} v_1 + \cdots + \alpha_{mj} v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i.$$

Assim, a combinação linear nula $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$ é equivalente a

$$\beta_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} v_i \right) + \cdots + \beta_n \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} v_i \right) = 0,$$

ou ainda,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{1j} \right) v_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{mj} \right) v_m = 0.$$

Demonstração (continuação).

Como $v_1, \dots, v_m$ são L.I., então

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{ij} = 0, \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Estas m equações representam um sistema linear homogêneo com n incógnitas. Como $n > m$, existe uma solução não trivial, isto é, existem $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ em que pelo menos um β_j é diferente de zero, ou seja,

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0 \implies \beta_j \neq 0 \text{ para algum } j.$$

Assim, $u_1, \dots, u_n$ são L.D., o que é uma contradição, já que

$$B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$$

é uma base de V.

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.