Dependência Linear

Definição

Diremos que uma sequência de vetores $u_1, \ldots, u_n$ de um espaço vetorial V é linearmente independente (L.I.), se a combinação linear

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

só for satisfeita quando $\alpha_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Observação

Note que

- $\alpha_i = 0,\ 1 \leq i \leq n \implies \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0.$
- *A recíproca nem sempre é válida. Basta ver, por exemplo, que em $\mathbb{R}^2$, temos*

$$(0,0) = 1(1,1) + 1(-1,-1).$$

Observação

A noção de independência linear para a sequência $u_1, \ldots, u_n$ *equivale a dizer que*

- $\beta_i \neq 0$ *para algum* $i \in \{1, \ldots, n\} \implies \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n \neq 0.$

Definição

Se $u_1, \ldots, u_n \in V$ *são L.I, diremos que o conjunto*

$$S = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

é um conjunto L.I. em V*.*

Definição

Diremos que uma sequência $u_1, \ldots, u_n$ de um espaço vetorial V é linearmente dependente (L.D.), se não for linearmente independente.

Observação

A definição de dependência linear para a sequência $u_1, \ldots, u_n$ é equivalente a dizer que

- *é existem números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que*

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0.$$

Exemplos

1. $\{O, u_1, \ldots, u_n\} \subset V$, em que O é o elemento neutro do espaço vetorial V, é uma sequência L.D., pois

$$1O + 0u_1 + \cdots + 0u_n = O.$$

2. $S = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^3$.

   É preciso verificar quais são as possíveis soluções de

$$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0).$$

   Isto equivale a resolver o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

   que possui solução única $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, S é L.I..

3. As matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são L.D. em $M_2(\mathbb{R})$. Procuremos as soluções de

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

que equivale a resolver

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta+\gamma \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução é

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, -\alpha, \alpha) = \alpha(1, -1, 1), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim, tomando $\alpha = 1$, encontramos $\beta = -1$ e $\gamma = 1$. Logo, existem escalares α, β, γ, não todos nulos, tais que vale (1). Portanto, a sequência de matrizes dada é L.D..

4. As funções cos e sen são L.I. em $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

   Como $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$ são funções definidas em $\mathbb{R}$, a combinação nula significa que devemos ter

$$\alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x = 0,$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular,

   - se $x = 0$, então $\alpha = 0$;
   - se $x = \pi/2$, então $\beta = 0$.

   Portanto, os únicos valores possíveis para os escalares α e β, com x variando em $\mathbb{R}$, é

$$\alpha = 0 = \beta.$$

   Logo, as funções f, g são L.I..

5. As funções $\cos^2, \text{sen}^2, 1$ são L.D. em $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

   Primeiramente, note que a função constante

$$f(x) = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

   pertence a $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Assim,

$$1f(x) + (-1)\cos^2(x) + (-1)\text{sen}^2(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

   e, portanto, as funções acima são L.D. (pois existem escalares não todos nulos que satisfazem a combinação nula).

Exemplo 1. Considere os vetores em $\mathbb{R}^3$ dados por

$$u_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad u_2 = (x_2, y_2, z_2) \qquad \text{e} \qquad u_3 = (x_3, y_3, z_3).$$

Encontre uma condição necessária e suficiente para que os vetores u_1, u_2, u_3 sejam L.I..

Solução: Os vetores acima serão L.I. se e somente se

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$$

tiver única solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ou seja, se e somente se, o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0 \end{cases}$$

possuir solução única, ou ainda, se e somente se, a matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

possuir determinante diferente de zero. Note que as colunas desta matriz são formadas pelos coeficientes de u_1, u_2 e u_3. O mesmo resultado vale se colocarmos os coeficientes dos vetores u_1, u_2 e u_3 como linhas.

Propriedades

1. Se $u_1, \ldots, u_n$ forem L.D. em um espaço vetorial V, então, pelo menos um destes vetores se escreverá como combinação linear dos demais.

Prova: Precisamos mostrar que se $u_1, \ldots, u_n$ forem L.D., então existirão $j \in \{1, \ldots, n\}$ e números reais $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tais que

$$u_j = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{j-1} u_{j-1} + \alpha_j u_{j+1} + \cdots + \alpha_{n-1} u_n.$$

Como $u_1, \ldots, u_n$ são L.D., $\exists\ \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0.$$

Desse modo, $\exists\ j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\beta_j \neq 0$ e, assim,

$$u_j = -\frac{\beta_1}{\beta_j} u_1 - \cdots - \frac{\beta_{j-1}}{\beta_j} u_{j-1} - \frac{\beta_{j+1}}{\beta_j} u_{j+1} - \cdots - \frac{\beta_n}{\beta_j} u_n.$$

Propriedades

2. Se $u_1, \ldots, u_n$ em V são L.D então qualquer sequência finita de vetores de V que os contenha, também será L.D..

Prova: Vamos mostrar que se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots,\ u_m \in V$ são tais que $u_1, \ldots,\ u_n$ são L.D. então $u_1, \ldots,\ u_n,\ u_{n+1}, \ldots, u_m$ também são L.D..

Como existem números reais $\beta_1, \ldots, \beta_n$ não todos nulos tais que $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0$, podemos escrever

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n + 0u_{n+1} + \cdots + 0u_m = 0$$

sendo que nesta última expressão nem todos os coeficientes são nulos.

Propriedades

3. Se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ forem L.I. em um espaço vetorial V, então qualquer subsequência destes vetores também é L.I.

Prova: Basta mostrar que se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ forem L.I., então $u_1, \ldots, u_n$ também serão L.I.

Suponha que

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = 0.$$

Como

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n + 0 u_{n+1} + \cdots + 0 u_m = 0$$

e estes vetores são L.I. , segue que $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0.$

Propriedades

4. Se $u_1, \ldots, u_n$ forem L.I. em um espaço vetorial V e $u_1, \ldots,\ u_n,\ u_{n+1}$ forem L.D., então u_{n+1} será combinação linear de $u_1, \ldots, u_n$.

Prova: Como $u_1, \ldots,\ u_n,\ u_{n+1}$ são L.D., existem $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ não todos nulos tais que

$$\beta_1 u_1 \cdots + \beta_n u_n + \beta_{n+1} u_{n+1} = 0.$$

Suponha que $\beta_{n+1} = 0$. Então, a expressão acima ficaria

$$\beta_1 u_1 \cdots + \beta_n u_n = 0.$$

Por outro lado, como os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são L.I., $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$, o que é uma contradição. Assim, concluímos que $\beta_{n+1} \neq 0$ e

$$u_{n+1} = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

em que $\alpha_i = -\dfrac{\beta_i}{\beta_{n+1}}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Propriedades

5. Sejam $u_1, \ldots, u_n$ vetores L.I. em um espaço vetorial V. Então cada vetor $v \in [u_1, \ldots, u_n]$ se escreve, de maneira única, como

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Prova: Basta mostrar que se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n \tag{2}$$

então $\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Por (2) temos

$$(\alpha_1 - \beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)u_n = 0.$$

Por outro lado, como $u_1, \ldots, u_n$ são L.I. podemos concluir que $\alpha_j - \beta_j = 0$, isto é $\alpha_j = \beta_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2. Consideremos o espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Mostre que as matrizes

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são L.D., em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Solução. Precisamos estudar as possíveis soluções, que denotaremos por

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

da equação vetorial

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = O,$$

em que O é a matriz nula de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Solução (continuação). Equivalentemente, devemos encontrar as possíveis soluções da equação matricial

$$\underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é equivalente ao sistema linear seguinte

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases},$$

que possui soluções do tipo

$$(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \alpha_3) = (\alpha_1\,, -\alpha_1\,, \alpha_1) = \alpha_1(1, -1, 1), \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Tomando $\alpha_1 = 1$, temos $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = 1$. Assim, u_1, u_2, u_3 são L.D..

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.