Combinação Linear

Definição

Sejam um espaço vetorial V *e* $u_1, \ldots, u_n \in V$. *Diremos que* u *é* *combinação linear* *de* $u_1, \ldots, u_n$, *se existirem* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Observação

Sejam V *um espaço vetorial e* $U \subset V$ *um subespaço vetorial. Se* $u_1, \ldots, u_n \in U$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, *então*

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \in U.$$

Exemplo 1. Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, o polinômio

$$p(x) = 2 + x^2$$

é uma combinação dos polinômios

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x \quad \text{e} \quad p_3(x) = x^2.$$

De fato, pois

$$p(x) = 2p_1(x) + 0p_2(x) + 1p_3(x).$$

Exemplo 2.

Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, o polinômio

$$p(x) = 1 + x^2$$

é uma combinação dos polinômios

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = 1 + x \quad \text{e} \quad q_3(x) = 1 + x + x^2.$$

Precisamos encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = \alpha q_1(x) + \beta q_2(x) + \gamma q_3(x),$$

ou seja, precisamos encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= \alpha + \beta(1 + x) + \gamma(1 + x + x^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma)x + \gamma x^2, \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases} \implies \alpha = 1, \ \beta = -1 \text{ e } \gamma = 1.$$

Definição

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V. Usaremos o símbolo

$$[S]$$

para denotar o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S. Em outras palavras,

$$u \in [S] \iff \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ e } \exists\ u_1, \ldots, u_n \in S \text{ tais que}$$

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Proposição (1)

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V. Então $[S]$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração.

- Como $S \neq \varnothing$, existe $u \in S$. Logo, $0 = 0u \in [S]$.
- Sejam $u, v \in [S]$. Então $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ e $\exists\ u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in S$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \quad \text{e}$$
$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m.$$

Assim, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} u + \lambda v &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \lambda(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m) \\ &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \lambda\beta_1 v_1 + \cdots + \lambda\beta_m v_m \in [S]. \end{aligned}$$

$\square$

Geradores

Definição

Sejam S e V como acima. Diremos que

$$[S] \text{ é o subespaço vetorial gerado por } S.$$

Os elementos de S são chamados de geradores de $[S]$. Quando

$$S = \{u_1, \ldots, u_n\},$$

usaremos a notação

$$[S] = [u_1, \ldots, u_n].$$

Propriedades

Proposição (2)

Sejam S e T subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial V. Valem as seguintes propriedades:

1. $S \subset [S]$;
2. $S \subset T \implies [S] \subset [T]$;
3. $[[S]] = [S]$;
4. S *é um subespaço vetorial* $\implies S = [S]$;
5. $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Demonstração.

1. Vamos mostrar que $S \subset [S]$.

   Seja $u \in S$. Então $u = 1u \in [S]$.

2. Vamos mostrar que $S \subset T \Longrightarrow [S] \subset [T]$.

   Seja $u \in [S]$. Então $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\exists\ u_1, \ldots, u_n \in S$ tais que

   $$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

   Como $S \subset T$, temos

   $$u_1, \ldots, u_n \in T \quad \Longrightarrow \quad u \in [T].$$

   Portanto, $[S] \subset [T]$.

$\square$

Demonstração.

3. Vamos mostrar que $[[S]] = [S]$.

   Pelos itens (1) e (2), temos a inclusão

   $$[S] \subset [[S]].$$

   Então, falta provarmos que

   $$[[S]] \subset [S].$$

   Seja $u \in [[S]]$. Então u é combinação linear de elementos de $[S]$.

   Como cada elemento de $[S]$ é combinação linear de elementos de S, u é combinação linear de elementos de S, ou seja, $u \in [S]$.

   Logo, $[[S]] \subset [S]$.

$\square$

Demonstração.

4. Vamos mostrar que

$$S \text{ subespaço vetorial de } V \implies S = [S].$$

Pelo item (1), temos

$$S \subset [S].$$

Precisamos provar que

$$[S] \subset S.$$

Seja $u \in [S]$. Então u é combinação linear de elementos de S.

Como S é um subespaço vetorial de V, tal combinação linear é um elemento de S.

Logo $u \in S$ e, portanto, $S \subset [S]$.

$\square$

Demonstração.

5. Vamos provar que $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Seja $u \in [S \cup T]$. Então, $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ e $\exists\ u_1, \ldots, u_n \in S$ e $v_1, \ldots, v_m \in T$ tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m \\ &= (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m) \in [S] + [T]. \end{aligned}$$

Portanto, $[S \cup T] \subset [S] + [T]$.

Reciprocamente, se $u \in [S] + [T]$, então

$$u = v + w, \quad \text{com } v \in [S] \text{ e } w \in [T].$$

Logo, $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ e $\exists\ v_1, \ldots, v_p \in S$ e $w_1, \ldots, w_q \in T$ tais que

$$u = v + w = (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p) + (\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q) \in [S \cup T].$$

Assim, $[S] + [T] \subset [S \cup T]$.

Definição

Diremos que um espaço vetorial V é finitamente gerado, se existir um subconjunto finito $S \subset V$ tal que

$$V = [S].$$

Exemplo 3.

1. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = [1, x, \ldots, x^n]$;
2. $\mathbb{R}^n$ é gerado por

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

3. $M_{m\times n}$ é gerado pelas matrizes

$$E_{kl} = (\delta_{i,j}^{(k,l)}), \quad k = 1, \ldots, m, \;\; l = 1, \ldots n,$$

em que

$$\delta_{i,j}^{(k,l)} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Exemplo 4. Afirmação: $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ seja finitamente gerado, ou seja, $\exists\ p_1(x), \dots, p_n(x)$ tais que

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = [p_1(x), \dots, p_n(x)].$$

Seja N o grau mais alto dentre os polinômios $p_1(x), \dots, p_n(x)$.

É evidente que x^{N+1} não pode ser escrito como combinação linear de $p_1(x), \dots, p_n(x)$, ou seja,

$$x^{N+1} \notin [p_1(x), \dots, p_n(x)] = \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

o que é uma contradição. Logo, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Observação

$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \dots].$

Proposição (3)

Seja V *um espaço vetorial gerado por* $u_1, \ldots, u_n$*, ou seja,*

$$V = [u_1, \ldots, u_n].$$

Se u_1 *for combinação linear de* $u_2, \ldots, u_n$*, isto é,*

$$u_1 \in [u_2, \ldots, u_n],$$

então V *é gerado por* $u_2, \ldots, u_n$*, ou seja,*

$$V = [u_2, \ldots, u_n].$$

Demonstração.

Basta mostrarmos que $V \subset [u_2, \ldots, u_n]$ (por que?).

Seja $u \in V$. Como $V = [u_1, \ldots, u_n]$, $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n.$$

Por outro lado, como $u_1 \in [u_2, \ldots, u_n]$, $\exists\ \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u_1 = \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n.$$

Combinando estas informações, obtemos

$$\begin{aligned}
u &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \\
&= \alpha_1 (\underbrace{\beta_1 u_2 + \ldots + \beta_{n-1} u_n}_{=u_1}) + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \\
&= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2) u_2 + \ldots + (\alpha_1 \beta_{n-1} + \alpha_n) u_n \in [u_2, \ldots, u_n],
\end{aligned}$$

ou seja, $u \in [u_2, \ldots, u_n]$ e, portanto, $V \subset [u_2, \ldots, u_n]$. $\square$

Exemplo 5. Sejam

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + t + z = 0\} \quad \text{e}$$
$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t + z = 0\}.$$

1. Seja $(x, y, z, t) \in U$. Então $y = x + z + t$. Logo,

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) =& (x, x + z + t, z, t)\\ =& x(1, 1, 0, 0) + z(0, 1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$U = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)].$$

Exemplo 5 (continuação). Lembremos que

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + t + z = 0\} \quad \text{e}$$
$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t + z = 0\}.$$

2. Seja $(x, y, z, t) \in V$. Então $t = x + y + z$. Logo,

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) =& (x, y, z, x + y + z) \\ =& x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 1)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$V = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)].$$

Exemplo 5 (continuação).

Lembremos, mais uma vez, que

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + t + z = 0\} \quad \text{e}$$
$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t + z = 0\}.$$

3. Seja $(x, y, z, t) \in U \cap V$. Então

$$\begin{cases} x - y + t + z = 0 \\ x + y - t + z = 0, \end{cases} \implies x = -z \text{ e } y = t.$$

Logo,

$$\begin{aligned}(x, y, z, t) &= (x, y, -x, y) \\ &= x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, 1)\end{aligned}$$

e, portanto,

$$U \cap V = [(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1)].$$

Exemplo 5 (continuação).

4. Pelo item (1) da Proposição (2), $U \subset [U]$ e $V \subset [V]$. Logo,

$$U + V \subset [U] + [V].$$

Por outro lado,

$$w \in [U] + [V] \implies w = u + v, \text{ com } u \in [U] \text{ e } v \in [V].$$

Como U e V são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$ (exercício), pelo item (4) da Proposição (2), $U = [U]$ e $V = [V]$. Assim,

$$w = u + v, \text{ com } u \in [U] = U \text{ e } v \in [V] = V$$

e, portanto, $w \in U + V$. Logo,

$$[U] + [V] \subset U + V.$$

Portanto,

$$U + V = [U] + [V].$$

Exemplo 5 (continuação).

4. Pelo item (5) da Proposição (2), $[U]+[V]=[U\cup V]$. Assim,

$$U+V=[U]+[V]=[U\cup V].$$

Então,

$$U+V=[(1,1,0,0),(0,1,1,0),\underbrace{(0,1,0,1),(1,0,0,1)}_{\text{iguais}},(0,1,0,1),(0,0,1,1)]$$

$$=[(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)].$$

Note que

$$(1,1,0,0)=(1,0,0,1)+(0,1,1,0)-(0,0,1,1)$$

e, portanto, pela Proposição (3), obtemos

$$U+V=[(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)].$$

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.