Distância, Ângulo, Ortogonalidade, Isometria e Operadores Autoadjuntos

Definição

Num espaço euclidiano V definimos a distância entre $u, v \in V$ como

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Pelas propriedades do produto interno, temos que a distância satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(u, v) \geq 0$ para todo $u, v \in V$;
2. $d(u, v) = 0$ se e somente se $u = v$;
3. $d(u, v) = d(v, u)$ para todo $u, v \in V$;
4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ para todo $u, v, w \in V$.

Definição

Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$ ambos não nulos.
O ângulo, $\theta \in [0, \pi]$, entre os vetores u e v é dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Exercício 1: Sabe-se que

$$\|u\| = \|v\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \|u - v\| = 2.$$

Calcule o ângulo entre u e v.

Solução: Observe que

$$\begin{aligned} 4 &= \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \|u\| + \|v\| - 2\langle u, v \rangle = 2 - 2\langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\langle u, v \rangle = -1$ e

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} = -1,$$

ou seja, $\theta = \pi$.

Definição

Seja V um espaço euclidiano. Diremos que

- $u, v \in V$ *são ortogonais, se tivermos*

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

  Neste caso, denotaremos $u \perp v$.

- *um conjunto* $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *será ortogonal, se*

$$u_i \perp u_j, \quad i \neq j.$$

- *um conjunto ortogonal* $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *será ortonormal, se*

$$\|u_j\| = 1, \quad j = 1, \ldots, n.$$

- $u \in V$ *é ortogonal a um conjunto* $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *se*

$$u \perp u_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

  Neste caso, usaremos a notação $u \perp S$.

Observação

Se $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *for um conjunto ortogonal, com* $u_j \neq 0$ *e* $j = 1, \ldots, n$, *então*

$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$$

será um conjunto ortonormal.

Proposição

Sejam V *um espaço euclidiano e* $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *um conjunto ortogonal com* $u_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$. *Então* $u_1, \ldots, u_n$ *são L.I..*

Demonstração.

Exercício. $\square$

Definição

Se V for um espaço euclidiano tal que $\dim V = n$ *e se*

$$B = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

for conjunto ortonormal, então diremos B é uma base ortonormal de V.

Proposição

Sejam V um espaço euclidiano $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de V. Então, se $u \in V$ temos

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n.$$

Demonstração: Como B é uma base de $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ ortonormal, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, \tag{1}$$

com

$$\|u_i\| = 1, \;\; i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0, \;\; i \neq j.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle u, u_1 \rangle &= \langle \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n, u_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle u_n, u_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \|u_1\|^2 + 0 + \cdots + 0 = \alpha_1. \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\langle u, u_i \rangle = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n.$$

Proposição

Sejam V um espaço euclidiano e $U = [u_1, \ldots, u_n]$ o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Então, para qualquer $u \in V$ o vetor dado por

$$v = u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle u, u_n \rangle u_n$$

é ortogonal a todo $w \in U$, isto é,

$$v \perp U.$$

Demonstração.

Proposição 12.39, S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC. □

Proposição

Sejam V um espaço vetorial, U um subespaço de V e $u \in U$. Então

$$u \perp U \implies u = 0.$$

Demonstração.

Como $u \in U$ e u é ortogonal a todo vetor de U, temos

$$||u||^2 = \langle u, u \rangle = 0,$$

ou seja, $u = 0$. $\square$

Definição

Sejam $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *um conjunto ortonormal de um espaço euclidiano* V *e* $U = [u_1, \ldots, u_n]$. *Se* $u \in V$, *então o vetor*

$$\langle u, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle u_n$$

será chamado projeção ortogonal de u sobre o subespaço U.

Observação

Se $v \in V$ *é tal que* $v \neq 0$, *então* $S = \left\{ \dfrac{v}{\|v\|} \right\}$ *é um conjunto ortonormal.* *Assim, se* $u \in V$, *a projeção ortogonal de u sobre* $[S]$ *é o vetor*

$$w = \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Neste caso, w *é chamado de projeção ortogonal de u sobre* v.

Processo de Gram-Schmidt

A demonstração do próximo teorema fornece um método para se conseguir uma base ortonormal de um espaço euclidiano a partir de uma base dada.

Teorema

Todo espaço euclidiano de dimensão finita possui uma base ortonormal.

Demonstração: A prova é por indução sobre a dimensão do espaço.

- Se $\dim V = 1$.

Então existe $v_1 \in V$, tal que $V = [v_1]$. Como $v_1 \neq 0$, tomamos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

e, dessa forma, $\{u_1\}$ é um conjunto ortonormal e $V = [u_1]$, ou seja, $B = \{u_1\}$ é uma base ortonormal de V.

Continuação:

- Se $\dim V = 2$.

Então existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $V = [v_1, v_2]$. Coloque

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Devemos encontrar um vetor ortogonal a u_1 e que tenha norma 1. Primeiramente vamos encontrar um vetor ortogonal a u_1. Basta tomarmos

$$u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1.$$

Note que $u_2' \neq 0$, pois v_1 e v_2 são L.I.. Resta agora *normalizar* u_2', isto é, definimos

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}.$$

Logo,

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \text{e} \qquad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|}$$

formam uma base ortonormal de V.

Continuação:

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponha que tenhamos provado o teorema para todos os espaços euclidianos de dimensão $n-1$.

Queremos provar que o mesmo é verdade para todo espaço euclidiano de dimensão n.

Continuação:

- Se $\dim V = n \geq 2$.

Então existem $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n \in V$ que formam uma base de V.

Note que $U = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$ é um subespaço de V de dimensão $n-1$.

Desse modo, usando a nossa hipótese de indução, é possível tomar uma base $B = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ ortonormal de U. Como $v_n \notin U$ então, o vetor

$$u_n' = v_n - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1}$$

é não nulo e ortogonal a todos os elementos de U (portanto, ortogonal a $u_1, \ldots, u_{n-1}$). Para finalizar, tomamos como base de V os vetores

$$u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$$

onde

$$u_n = \frac{u_n'}{\|u_n'\|} = \frac{v_n - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1}}{\|v_n - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1}\|}.$$

Complemento Ortogonal

Definição

Sejam V *um* *espaço euclidiano* *e* U *um* *subespaço* *vetorial de* V*. O* *complemento ortogonal* *de* U *é o conjunto*

$$U^{\perp} = \{v \in V; \quad v \perp u, \quad \forall\, u \in U\}.$$

Observação

Se V *tiver* *dimensão finita* *então* $u \in U^{\perp}$ *se e somente se* u *for* *ortogonal* *a uma* *base qualquer* *de* U*.*

Proposição

$U^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração.

Exercício. $\square$

Exercício 2: Encontre $U^\perp$ se

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}.$$

Solução: Observe que

$$(x,y,z) \in U \iff (x,y,z) = (y+z,y,z) = y(1,1,0) + z(1,0,1).$$

Logo, $B = \{(1,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base de U.

Assim, $(x,y,z) \in U^\perp$ se somente se

$$\langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff (x,y,z) = x(1,-1,-1).$$

Portanto, $U^\perp = [(1,-1,-1)]$.

Teorema

Sejam V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço vetorial de V. Então

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Demonstração.

Dado $v \in V$, seja w a projeção ortogonal de v sobre U. Temos,

- $v = w + (v - w)$;
- $w \in U$;
- $\langle v - w, u \rangle = 0$, para todo $u \in U$,.

Ou seja, $v \in U + U^{\perp}$.

Por outro lado, se $u \in U \cap U^{\perp}$, então $\langle u, u \rangle = 0$ e, portanto, $u = 0$. $\square$

Isometria

Definição

Sejam U e V espaços euclidianos. Diremos que $T \in L(U, V)$ é uma isometria, se tivermos

$$\langle T(u_1), T(u_2)\rangle_V = \langle u_1, u_2\rangle_U, \qquad \forall\, u_1, u_2 \in U.$$

Teorema

Sejam U, V *espaços euclidianos e* $T \in L(U, V)$*. São equivalentes:*

1. T *é uma isometria;*
2. $\|T(u)\| = \|u\|$ *para todo* $u \in U$;
3. $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ *para todo* $u, v \in U$;
4. *Se* $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$ *é ortonormal, então* $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ *é ortonormal em* V.

Demonstração.

Teorema 12.59, S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC. □

Corolário

Se $T \in L(U, V)$ é uma isometria, então T é injetora.

Demonstração.

Basta ver que se $T(u) = 0$, então

$$\|u\| = \|T(u)\| = 0,$$

portanto, $u = 0$. □

Corolário

Se $T \in L(U, V)$ é uma isometria e

$$\dim U = \dim V$$

então T é um isomorfismo.

Demonstração.

Como T é uma isometria, T é injetora. Como U e V têm a mesma dimensão, T é bijetora e, portanto, é um isomorfismo. $\square$

Vejamos como fica a matriz de uma isometria $T \in L(U)$ com relação a uma base ortogonal $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

Seja $M = [T]_B = (a_{ij})$. Como

$$T(u_j) = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{nj}u_n,$$

obtemos

$$a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \langle T(u_i), T(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases},$$

ou seja, as colunas da matriz M, quando vistas como vetores do $\mathbb{R}^n$, são ortonormais.

Vale observar, também, que

$$M^t M = (a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj}) = I_n.$$

Definição

Uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ *tal que*

$$M^t M = I_n$$

é chamada de matriz ortogonal.

Observação

Se $M \in M_n(\mathbb{R})$ *é ortogonal então*

$$(\det M)^2 = \det M \det M = \det M^t \det M = \det M^t M = \det I_n = 1,$$

isto é,

$$|\det M| = 1.$$

Operador Autoadjunto

Definição

Sejam U um espaço euclidiano e $T \in L(U)$. Diremos que T é um operador autoadjunto se

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle \quad \forall\ u, v \in U.$$

Exemplo. Seja $T \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por

$$T(x, y) = (ax + by, bx + cy).$$

Verifique que T é um operador autoadjunto.

Solução. Temos

$$\langle T(x, y), (z, t)\rangle = \langle (ax + by, bx + cy), (z, t)\rangle = axz + byz + bxt + cyt.$$

Por outro lado,

$$\langle (x, y), T(z, t)\rangle = \langle (x, y), (az + bt, bz + ct)\rangle = axz + bxt + byz + cyt.$$

Comparando as expressões vemos que

$$\langle T(x, y), (z, t)\rangle = \langle (x, y), T(z, t)\rangle.$$

Teorema

Seja U um espaço euclidiano de dimensão finita. Então, um operador $T \in L(U)$ será autoadjunto se e somente se a matriz de T com relação a uma base ortonormal de U for simétrica.

Prova. Sejam $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal e $A = (a_{ij})$ a matriz de T com relação a esta base.

Temos

$$T(u_k) = a_{1k}u_1 + \cdots + a_{nk}u_n, \quad \forall\ k = 1, \ldots, n.$$

Tomando o produto interno com $k = i$ com o vetor u_j, obtemos

$$\langle T(u_i), u_j \rangle = a_{1i}\langle u_1, u_j \rangle + \cdots + a_{ni}\langle u_n, u_j \rangle = a_{ji}.$$

Por outro lado, tomando o produto interno de u_i com $T(u_j)$, temos

$$\langle u_i, T(u_j) \rangle = a_{1j}\langle u_i, u_1 \rangle + \cdots + a_{nj}\langle u_i, u_n \rangle = a_{ij}.$$

Prova (continuação).

Suponha que T seja autoadjunto. Queremos mostrar que $a_{ij} = a_{ji}$.

Mas T é autoadjunto. Então,

$$\langle u_i, T(u_j)\rangle = \langle T(u_i), u_j\rangle, \quad \text{ou seja}, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Reciprocamente, suponha que a matriz (a_{ij}) de T com relação a uma base ortonormal, $u_1, \dots, u_n$ seja simétrica. Devemos mostrar que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle.$$

Note que se

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \qquad \text{e} \qquad v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Então, como o produto interno é linear em cada variável e a base acima é ortonormal, temos

$$\langle T(u), v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \langle T(u_i), u_j\rangle.$$

Prova (continuação).

Analogamente,

$$\langle u, T(v)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\langle u_i, T(u_j)\rangle.$$

Desta forma, resta mostrar que $\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, T(u_j)\rangle$.

Mas, como (a_{ij}) é a matriz de T com relação a esta base, vale

$$\langle T(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, T(u_j)\rangle.$$

Teorema

Se $T \in L(U)$ for um operador autoadjunto e λ e μ forem autovalores distintos de T, então os autovetores correspondentes serão ortogonais.

Prova. Sejam u e v autovetores correspondentes a λ e μ respectivamente. Então

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle - \langle u, \mu v\rangle = \langle T(u), v\rangle - \langle u, T(v)\rangle = 0,$$

pois T é autoadjunto.

Como $\lambda \neq \mu$, segue-se que $\langle u, v\rangle = 0$.

Teorema

Sejam U um espaço euclidiano de dimensão finita e $T \in L(U)$ um operador autoadjunto. Então existe uma base ortonormal de U formada por autovetores de T.

Observação. Então todo operador autoadjunto é diagonalizável.

Prova. Faremos o caso bidimensional.

Sejam u, v uma base ortonormal de U.

Como T é autoadjunto, a matriz de T é simétrica, ou seja, é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico de T é

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2.$$

Como

$$(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Note que $p_T(\lambda)$ só apresenta raízes reais.

Prova (continuação). Consideremos 2 casos.

- Se $a = c$ e $b = 0$, então $A = aI$ e a própria base u, v servem para provar o teorema.
- Se $a \neq c$ ou $b \neq 0$, então $p_T(\lambda)$ possui duas raízes reais distintas, isto é, T apresenta dois autovalores distintos. Neste caso, os autovetores correspondentes são ortogonais. Basta, então, tomar como base dois autovetores unitários correspondentes a cada um dos autovalores.

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.