Forma Canônica de Jordan, Produto Interno e Norma

Seja $T \in L(U)$, em que U é um espaço vetorial de dimensão finita.

Seja $p_T(\lambda)$ o polinômio característico de T.

Então $p_T(\lambda)$ se fatora como

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} ((\lambda - \alpha_1)^2 + {\beta_1}^2)^{p_1} \cdots ((\lambda - \alpha_k)^2 + {\beta_k}^2)^{p_k},$$

em que $\lambda_r \neq \lambda_s$, e $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ se $r \neq s$.

Note que cada $\alpha_r + i\beta_r$ é uma raiz complexa de $p_T(\lambda)$.

Note também que $m_1 + \cdots + m_n + 2p_1 + \cdots + 2p_k = \dim U$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ for um autovalor de T, denotaremos por $J(\lambda; r)$ a matriz quadrada de ordem r com todos os elementos da diagonal principal iguais a λ e todos os elementos logo acima desta, iguais a 1, ou seja,

$$J(\lambda; r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r}$$

Se $\alpha + i\beta$ for uma raiz complexa de $p_T(\lambda)$ e r é um número par, definiremos

$$R(\alpha,\beta;r) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}_{r\times r} .$$

Se $B_1, \ldots, B_k$ forem matrizes quadradas, não necessariamente de ordens iguais, definiremos $\text{diag}(B_1, \ldots, B_k)$ como sendo a matriz quadrada de ordem igual à soma das ordens de $B_1, \ldots, B_k$ dada por

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}.$$

Exemplo: Se

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

então

$$\operatorname{diag}(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Forma Canônica de Jordan

Seja U um espaço vetorial de dimensão finita.

Seja $T \in L(U)$ cujo polinômio característico é dado por

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n}((\lambda - \alpha_1)^2 + {\beta_1}^2)^{p_1} \cdots ((\lambda - \alpha_k)^2 + {\beta_k}^2)^{p_k},$$

em que $\lambda_r \neq \lambda_s$, $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ se $r \neq s$, e $\beta_r > 0$.

Então existe uma base de U com relação a qual a matriz de T é da forma

$$J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_p, R_1, \ldots, R_q),$$

em que $J_1, \ldots, J_p$ são da forma $J(\lambda; r)$ para algum $r \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e $R_1, \ldots, R_q$ são da forma $R(\alpha, \beta; s)$ para algum $s \in \mathbb{N}$ e $(\alpha, \beta) \in \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_k, \beta_k)\}$.

Exercício 1: Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan de um operador cujo polinômio característico é dado por

$$p_T(\lambda) = (2 - \lambda)^3(1 - \lambda).$$

Solução: Como as multiplicidades algébricas e geométrica do autovalor 1 são iguais a um, vemos que o único bloco correspondente a este autovalor é $J(1; 1) = (1)$.

Solução (continuação):

Com relação ao autovalor 2, a sua multiplicidade algébrica é três.

- Se sua multiplicidade geométrica for três.

Neste caso, existem três blocos associados a este autovalor e todos eles são iguais a (2) e a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação):

- Se a multiplicidade geométrica do autovalor for dois.

Neste caso, existem dois blocos correspondente a este autovalor que são da forma

$$J(2;1) = (2) \qquad J(2;2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação):

- Se a multiplicidade geométrica do autovalor for um.

Neste caso existe um bloco correspem quente a este autovalor que é

$$J(2;3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2: Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan de um operador cujo polinômio característico é dado por

$$p_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(4+\lambda^2)$$

.

Solução: Utilizando a notação do ínicio da aula, temos

$$\lambda_1 = 1, \quad \alpha = 0 \ \text{ e } \ \beta = 2.$$

Como $0 + i2$ tem multiplicidade um (como raiz de $p_T(\lambda)$), existe apenas um bloco da forma

$$R(0,2;2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação):

- Se a multiplicidade geométrica do autovalor 1 for dois.

Neste caso, existem dois blocos associados a este autovalor e são iguais a (1). Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução (continuação):

- Se a multiplicidade geométrica do autovalor 1 for um.

Então, existe apenas um bloco de ordem dois associado a este autovalor que é dado por

$$J(1;2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Produto Interno

Definição

Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma aplicação que a cada par $(u, v) \in V \times V$ associa um número real denotado por $\langle u, v \rangle$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$;

(ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ *para todo* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *para todo* $u, v \in V$;

(iv) $\langle u, u \rangle > 0$ *se* $u \neq 0$.

O espaço vetorial V munido de um produto interno é chamado de espaço euclidiano.

Propriedades:

1. $\langle 0, u \rangle = 0$ para todo $u \in V$.

De fato,

$$\langle 0, u \rangle = \langle 0 + 0, u \rangle \overset{(i)}{=} \langle 0, u \rangle + \langle 0, u \rangle,$$

e o resultado segue por cancelamento.

2. $\langle u, v + \alpha w \rangle = \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle$, para todo $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

De fato,

$$\begin{aligned} \langle u, v + \alpha w \rangle & \overset{(iii)}{=} \langle v + \alpha w, u \rangle \\ & \overset{(i)}{=} \langle v, u \rangle + \langle \alpha w, u \rangle \\ & \overset{(iii),(ii)}{=} \langle u, v \rangle + \alpha \langle w, u \rangle \\ & \overset{(iii)}{=} \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

Desta maneira, vemos que o produto interno é linear em cada variável.

Exemplos: São exemplos de produto interno:

1. Se $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, então
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$
2. Se $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, então
$$\langle x, y\rangle = \frac{x_1y_1}{2} + \frac{x_2y_2}{3} + \frac{x_3y_3}{4}.$$
3. Se $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ então
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$
4. Se $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$
$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}.$$

Exercício

Verifique que as aplicações acima são de fato produto interno.

Norma

Definição

Se V é um espaço euclidiano, definimos para cada $u \in V$ o número

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Este valor é chamado de norma de u.

Observação

Pela Propriedade (iv) da definição de produto interno, temos que $\langle u, u \rangle > 0$ e, portanto, é possível extrair a raiz quadrada de $\langle u, u \rangle$.

Proposição

Seja V um espaço vetorial com um produto interno. Temos

1. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ *para todo* $u \in V$ *e todo* $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $\|u\| \geq 0$ *para todo* $u \in V$;
3. $\|u\| = 0$ *se e somente se* $u = 0$;
4. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$ *para todo* $u, v \in V$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz);*
5. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para todo* $u, v \in V$ *(desigualdade triangular).*

Demonstração.

Exercício. $\square$

Proposição (Identidade do Paralelogramo)

Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Então

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Demonstração.

Exercício. $\square$

Proposição

Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Então

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle.$$

Demonstração.

Exercício. $\square$

Exercício 3: Calcule $\langle u, v\rangle$ sabendo-se que

$$\|u+v\| = 1 \quad \text{e} \quad \|u-v\| = 1.$$

Solução: Pela Proposição anterior, temos

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \frac{1}{4}(1-1) = 0.$$

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.