Diagonalização

Definição

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(U)$. Então T será dita diagonalizável, se existir uma base de U formada por autovetores de T.

Teorema

Sejam U *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T \in L(U)$*. Então,*
T *é diagonalizável* $\iff \exists$ *base* B *de* U *tal que a matriz* $[T]_B$ *é diagonal.*

Demonstração.

Note que se $T \in L(U)$ for diagonalizável e se $u_1, \ldots, u_n$ formarem uma base B de U formada por autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então

$$T(u_j) = \lambda_j u_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Assim,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ou seja, $[T]_B$ é uma matriz diagonal, isto é, uma matriz quadrada (a_{ij}) tal que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Demonstração (continuação).

Reciprocamente, se existir uma base $C = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de U tal que

$$[T]_C = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix},$$

então, pela própria definição de matriz de uma transformação linear, teremos

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & \mu_1 v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(v_n) & = & \mu_n v_n, \end{array}$$

ou seja, $v_1, \ldots v_n$ são autovetores e, portanto, T é diagonalizável.

Observação

Pela prova do Teorema anterior, podemos observar que se T *for diagonalizável, então o seu polinômio característico de* T *será da forma*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

em que os números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *são todos os autovalores de* T.

Definição

Diremos que uma matriz $A \in M_{n\times n}$ *é diagonalizável, se* $\exists\ M \in M_{n\times n}$ *invertível tal que*

$$M^{-1}AM$$

seja uma matriz diagonal.

Proposição

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita, $T \in L(U)$ e C uma base qualquer de U. Então T será diagonalizável $\Longleftrightarrow$ $[T]_C$ for diagonalizável.

Demonstração.

Proposição 10.3, S. L Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC. $\square$

Observação

Para verificar se $T \in L(U)$ é diagonalizável, basta verificar se a matriz de $[T]_C$ é diagonalizável, com C é uma base qualquer de U.

Teorema

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(U)$. Então, T será diagonalizável $\Longleftrightarrow$ os seus autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ satisfizerem

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$

Demonstração.

Teorema 10.6, S. L Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC. $\square$

Diagonalização e multiplicidades algébrica e geométrica de autovalores

Vejamos como é possível decidir sobre a diagonalização de um operador linear a partir das multiplicidades algébrica e geométrica de seus autovalores.

Teorema

Sejam U *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T \in L(U)$*. Então,* T *será diagonalizável* $\iff$ **AMBAS** *as condições forem verificadas*

1. *para cada autovalor de* T*, as suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais;*
2. *a soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores de* T *é igual à dimensão de* U*.*

Demonstração.

Sejam $m = \dim U$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de T, dois a dois distintos.

Sabemos que se T for diagonalizável, então teremos

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$

Assim, se $r_j = \dim V(\lambda_j)$ for a multiplicidade geométrica de λ_j, teremos

$$m = r_1 + \ldots + r_n,$$

ou seja, U possui uma base formada pela reunião das bases dos espaços próprios de T ($V(\lambda_j)$).

Demonstração (continuação).

Por sua vez, a existência de uma tal base é equivalente a que T apresente uma matriz na forma

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}_{r_1 \times r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{r_n \times r_n} \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

Demonstração (continuação).

Desta forma, se T for diagonalizável, então seu polinômio característico será dado por

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{r_n}$$

e, portanto, r_j é a multiplicidade algébrica de λ_j.

Demonstração (continuação).

Reciprocamente, sejam r_j e m_j a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de λ_j. Suponha que

$$m_j = r_j, \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad r_1 + \cdots + r_n = m.$$

Queremos mostrar que T é diagonalizável. Como $m_j = r_j$, cada espaço próprio $V(\lambda_j)$ possui uma base B_j com m_j elementos.

Por outro lado, como

$$m_1 + \cdots + m_n = r_1 + \cdots + r_n = m = \dim U,$$

então $B = \cup_{j=1}^{n} B_j$ forma uma base de U. Daí, como a soma de espaços próprios é sempre direta, B é constituída por autovetores de T.

Assim, T é diagonalizável.

Corolário

Sejam U um espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(U)$. Se

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são distintos entre si, então T será diagonalizável.

Exercício 1: Verifique se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$$

é diagonalizável.

Solução: Seja C a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Então,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 3).$$

Logo $p_T(\lambda)$ apresenta todas as raízes reais e simples e, pelo corolário anterior, T é diagonalizável.

Exercício 2: Encontre uma base de autovetores para o operador

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Solução: Pelo exercício anterior,

$$p_T(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - 3).$$

Assim, 0, 1 e 3 são autovalores de T.

Vamos encontrar os autovetores associados a cada autovalor.

- Autovalor 0.

Precisamos encontrar (x, y, z) não nulo tal que

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

em que $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$, ou seja,

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} x = y = -z \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{ou ainda,} \quad x = y = -z.$$

Assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 0 o vetor $u = (1, 1, -1)$.

- Autovalor 1.

Colocando $T(x,y,z)=(x+z,y+z,x+y+2z)$ em forma matricial obtemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Assim, a forma matricial de $T-\lambda I$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Substituindo λ por 1 na matriz acima, teremos $(x,y,z)\in V(1)$, se

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=0 \\ z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow z=0 \text{ e } x=-y.$$

Assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor 1 o vetor $v=(1,-1,0)$.

De forma análoga, encontramos o vetor $w = (1, 1, 2)$ como autovetor associado ao autovalor 3.

Assim, $B = \{(1, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 2)\}$ é uma base $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Além disso, é claro que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 3: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, cuja matriz com relação a alguma base é dada por

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Mostre que T é diagonalizável.

Solução: O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2.$$

Vemos que $p_T(\lambda)$ terá duas raízes reais simples, isto é, com multiplicidade 1 se, e somente se, o discriminante $(a+c)^2 - 4(ac - b^2)$ for positivo. Assim,

$$(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 > 0$$

se, e somente se, $a \neq c$ ou $b \neq 0$. Logo, se $a \neq c$ ou $b \neq 0$, então as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores de T (as raízes de $p_T(\lambda)$) coincidem e, portanto, T é diagonalizável. Quando $a = c$ e $b = 0$, então T é diagonalizável pois, neste caso, A é diagonal.

Exercício 4: Verifique se $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dado por

$$T(p(t)) = p''(t) - 2p'(t) + p(t)$$

é diagonalizável.

Solução: A matriz de T com relação à base canônica é dada por

$$[T]_C = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $P_T(\lambda) = (1-\lambda)^3$ e, desta forma, 1 é o único autovalor de T.

Logo, T é diagonalizável se e somente se

$$\dim V(1) = 3.$$

Por outro lado,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V(1) \Longleftrightarrow p(t) \in N(T - I)$$

Como

$$[T]_C = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então

$$p(t) \in N(T - I) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Longleftrightarrow p(t) = a_0.$$

Portanto, $V(1) = [1]$ e T não é diagonalizável.

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.