Autovalores e Autovetores

Definição

Sejam U *um espaço vetorial e* $T \in L(U)$. *Diremos que um vetor não nulo* $u \in U$ *é um autovetor de* T, *se existir* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$T(u) = \lambda u.$$

Observação

Se $u \neq 0$ *for tal que* $T(u) = \lambda u = \mu u$, *então teremos* $\lambda = \mu$.
De fato, pois $\lambda u = \mu u \Longrightarrow (\lambda - \mu)u = 0 \Longrightarrow \lambda - \mu = 0$.

Definição

Sejam U *um espaço vetorial,* $T \in L(U)$ *e* $u \in U$ *um autovetor de* T. *O número* λ *tal que* $T(u) = \lambda u$ *é chamado de autovalor de* T **associado ao** *autovetor* u.

Definição

Sejam U um espaço vetorial, $T \in L(U)$ e λ um autovalor de T. O subespaço vetorial

$$V(\lambda) = \{u \in U; T(u) = \lambda u\} \subset U$$

é chamado de subespaço próprio do autovalor λ, ou autoespaço associado a λ. Se $\dim U < \infty$, diremos que a dimensão de $V(\lambda)$ é a multiplicidade geométrica de λ.

Observação

Seja $I : U \to U$ a identidade. Então,

$$V(\lambda) = \{u \in U; T(u) = \lambda u\} = N(T - \lambda I).$$

De fato, se $u \in N(T - \lambda I)$, então

$$0 = (T - \lambda I)(u) = T(u) - \lambda u \Longrightarrow T(u) = \lambda u \Longrightarrow u \in V(\lambda).$$

Agora, se $u \in V(\lambda)$, então

$$T(u) = \lambda u \Longrightarrow T(u) - \lambda u = 0 \Longrightarrow (T - \lambda)(u) = 0 \Longrightarrow u \in N(T - \lambda I).$$

Definição

Sejam V um espaço vetorial, $U \subset V$ um subespaço vetorial e $T \in L(V)$. Dizemos que U é um subespaço invariante por T, se $T(U) \subset U$.

Observação

$V(\lambda)$ é um subespaço invariante por T, isto é,

$$T(V(\lambda)) \subset V(\lambda).$$

De fato, seja $u \in V(\lambda)$, então $T(u) = \lambda u = v$. Mas,

$$T(v) = T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda(\lambda u) = \lambda v \Longrightarrow v = T(u) \in V(\lambda).$$

Exercício 1: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (y, 4x).$$

Encontre:

- os autovalores (λ) de T;
- os respectivos subespaços próprios $(V(\lambda))$;
- a multiplicidade geométrica $(\dim V(\lambda))$ de cada autovalor.

Solução:

- Autovalores.

Sabemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T

$\iff \exists\ (x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$,

$\iff \exists\ (x, y) \neq (0, 0)$ tal que $(y, 4x) = (\lambda x, \lambda y)$.

$\iff$ o sistema

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ 4x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

tiver solução não trivial.

$\iff \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 4 = 0.$

Logo, os únicos autovalores de T são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$.

Solução (continuação):

- Subespaços próprios.

Temos

$$\begin{aligned} V(-2) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (y,4x) = -2(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -2x = y\} \\ &= [(1,-2)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (y,4x) = 2(x,y)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x = y\} \\ &= [(1,2)] \end{aligned}$$

- Multiplicidade geométrica.

É claro que $\dim V(2) = 1 = \dim V(-2) = 1$.

Proposição

Sejam U *um espaço vetorial de dimensão finita e* $T \in L(U)$. *Suponha que* T *possua autovetores*

$$u_1, \ldots, u_n$$

associados a autovalores

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n,$$

respectivamente. Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, *quando* $i \neq j$ *então* $u_1, \ldots, u_n$ *são linearmente independentes.*

Demonstração. A prova será por indução sobre o número de autovalores.

- $n = 1$

Se $n = 1$ o resultado é válido já que $u \neq 0$ é sempre L.I.

- $n = 2$

Se $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$, então $\alpha_1 u_1 = -\alpha_2 u_2$. Logo

$$\begin{aligned} 0 &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 \\ &= \lambda_1(-\alpha_2 u_2) + \alpha_2 \lambda_2 u_2 = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) u_2 \end{aligned}$$

Portanto $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 = 0$ e, como $u_2 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que $\alpha_2 = 0$. Daí, $\alpha_1 u_1 = 0$ e, como $u_1 \neq 0$, temos $\alpha_1 = 0$. Portanto, u_1 e u_2 são linearmente independentes.

Demonstração (continuação). Suponhamos, como hipótese de indução, que o resultado seja válido para $n-1$ autovetores.

Devemos mostrar que o mesmo resultado vale para n autovetores. Se $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$, então $\alpha_1 u_1 = -\alpha_2 u_2 - \cdots - \alpha_n u_n$. Logo

$$\begin{aligned} 0 = T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) &= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_n T(u_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n u_n \\ &= \lambda_1(-\alpha_2 u_2 - \cdots - \alpha_n u_n) + \cdots + \alpha_n \lambda_n u_n \\ &= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)u_n \end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1)u_n = 0$$

e, como $u_2, \cdots, u_n$ são L.I. segue que

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1) = 0.$$

Mas como $\lambda_1 \neq \lambda_j$, para $j = 2, \ldots, n$, temos $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Daí, $\alpha_1 u_1 = 0$ e, como $u_1 \neq 0$, temos $\alpha_1 = 0$. Portanto, $u_1, \ldots, u_n$ são L.I.

Proposição

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(U)$. Suponha que T possua autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, distintos. Então a soma dos subespaços próprios de T é direta, isto é, para cada $j = 1, \ldots, n$, temos

$$V(\lambda_j) \cap (V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)) = \{0\}.$$

Demonstração.

Proposição 9.13, S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC. □

Polinômio Característico

Definição

Dada $A \in M_{n\times n}$ *definimos o polinômio característico de* A *como sendo o determinante*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

em que I *é a matriz identidade de ordem* n.

Definição

Sejam $A, B \in M_{n\times n}$. *Dizemos que* A *e* B *são semelhantes, se existir* $M \in M_{n\times n}$ *invertível tal que*

$$A = M^{-1}BM.$$

Observação

Se A *é semelhante a* B, *então* B *é semelhante a* A.

De fato, se existir $M \in M_n$ *invertível tal que*

$$A = M^{-1}BM,$$

teremos $B = MAM^{-1}$. *Tomando* $N = M^{-1}$, *obtemos*

$$B = N^{-1}AN,$$

isto é, B *é semelhante a* A.

Proposição

Se $A, B \in M_{n \times n}$ *são matrizes semelhantes, então seus polinômios característicos são iguais, isto é,*

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Polinômio Característico da matriz transformação linear:

Lembre que se $T \in L(U)$, onde U é um espaço vetorial de dimensão finita, e se B e C são bases de U, então

$$[T]_C = M_C^B [T]_B M_B^C = \left[M_B^C\right]^{-1} [T]_B M_B^C.$$

Desta forma,

$$\boxed{p_{[T]_B}(\lambda) = p_{[T]_C}(\lambda),}$$

ou seja, **o polinômio característico da matriz de uma transformação linear independe da escolha da base**. Podemos assim, sem causar ambiguidades, definir o polinômio característico do operador linear T como sendo

$$p_T(\lambda) = p_{[T]_B}(\lambda),$$

onde B é uma base qualquer de U.

Exercício 2: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

Encontre $p_T(\lambda)$.

Solução:

Usaremos a base canônica, C, de $\mathbb{R}^2$. Como $T(1,0) = (a, c)$ e $T(0,1) = (b, d)$, vemos que

$$[T]_C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$p_T(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

Proposição

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(U)$. Então λ será um autovalor de T, se e somente se,

$$p_T(\lambda) = 0.$$

Em outras, palavras, os autovalores de T são as raízes reais *de seu polinômio característico.*

Demonstração.

Exercício. $\square$

Definição

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(U)$. Se λ for um autovalor de T, definiremos a multiplicidade algébrica de λ como sendo a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de T.

Proposição

Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in L(U)$. Se λ_0 for um autovalor de T, então a sua multiplicidade geométrica não excederá a sua multiplicidade algébrica.

Demonstração.

Proposição 9.26, S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC. □

Exemplo 1: Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x, 2x + y)$.

- Matriz da T com relação a base canônica C do $\mathbb{R}^n$.

Observe que $T(1, 0) = (1, 2)$ e $T(0, 1) = (0, 1)$. Assim,

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Polinômio característico de T.

$$p_T(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

- Autovalores de T.

Sabemos que os autovalores de T são as raízes do polinômio característico de T, isto é, as raízes de $(1-\lambda)^2$.

Logo $\lambda = 1$ é autovalor de T.

- Multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$.

Note que $(1-\lambda)^2 = (1-\lambda)(1-\lambda)$. Logo $\lambda = 1$ aparece duas vezes como raiz do polinômio característico de T e, portanto, a multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$ é 2.

- Autovetores associados a $\lambda = 1$.

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \iff (x, 2x + y) = 1\,(x, y)$$
$$\iff 2x + y = y \quad \text{e} \quad x = x$$
$$\iff 2x = 0 \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Logo, $V(1) = [(0, 1)]$.

- Multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$

Pelo item anterior, temos que $\dim V(1) = 1$.

Portanto, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é 1.

Note que $1 < 2$ e 2 é multiplicidade algébrica de $\lambda = 1$.

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.