Espaços e Subespaços Vetoriais

Definição

Seja V um conjunto não vazio. Diremos que V é munido de uma adição e de uma multiplicação, se

1. *para cada $u, v \in V$ existir um único elemento de V associado, chamado de soma entre u e v e denotado por $u + v$, ou seja,*

$$\exists! w \in V \quad \textit{tal que} \quad u + v = w;$$

2. *para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ existir um único elemento de V associado, chamado de produto de u pelo escalar λ e denotado po λu, ou seja,*

$$\exists! w \in V \quad \textit{tal que} \quad \lambda u = w.$$

Definição

Diremos que um conjunto V, munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar, é um espaço vetorial real, se para quaisquer $u, v, w \in V$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tivermos

(EV1) *(propriedade comutativa)* $u + v = v + u$, $\forall\ u, v \in V$;

(EV2) *(propriedade associatividade)* $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall\ u, v, w \in V$;

(EV3) *(existência do elemento neutro da adição)* $\forall\ u \in V$, $\exists\ 0 \in V$ *tal que* $0 + u = u$;

Definição

Diremos que um conjunto V, munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar, é um espaço vetorial real, se para quaisquer $u, v, w \in V$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tivermos

(EV1) *(propriedade comutativa)* $u + v = v + u$, $\forall\ u, v \in V$;

(EV2) *(propriedade associatividade)* $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall\ u, v, w \in V$;

(EV3) *(existência do elemento neutro da adição)* $\forall\ u \in V$, $\exists\ 0 \in V$ *tal que* $0 + u = u$;

(EV4) *(existência do elemento oposto)* $\forall\ u \in V$, $\exists\ v \in V$ *tal que* $u + v = 0$;

Definição

(EV5) *(propriedade associatividade)* $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$, $\forall\, u \in V$ e $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(EV6) *(propriedade distributiva)* $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$, $\forall\, u \in V$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(EV7) *(propriedade distributiva)* $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall\, u, v \in V$ e $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$;

(EV8) *(existência do elemento neutro da multiplicação)* $1u = u$, $\forall\, u \in V$.

Observação

1. *O elemento* 0 *na propriedade* EV3 *é único.*
2. *Pela propriedade* EV4, *em um espaço vetorial* V, *para cada* $u \in V$ *existe* $v \in V$ *tal que*
$$u + v = 0.$$
Na verdade, para cada $u \in V$, *existe somente um elemento* $v \in V$ *com esta propriedade.*
3. *Denotaremos o (único) vetor* v *acima por* $-u$ *e o chamaremos de* *vetor oposto* *do vetor* u *em* $(V, +\cdot)$. *Também escreveremos*
$$u + v = u + (-u).$$

Exemplo 1: vários espaços vetoriais

1. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, munido da adição $+$ e da multiplicação $\cdot$ de números reais, ou seja, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.
2. O conjunto dos vetores apresentados em Geometria Analítica munido da adição e da multiplicação por escalares.
3. O conjunto formado pelos pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Sejam $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos
   - $f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
   - $\lambda f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ por $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
4. O conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$). Notação: $C(I; \mathbb{R})$.

Exemplo 1 (continuação)

5. O conjunto das funções com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, (k é fixo) definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$). Notação: $C^k(I;\mathbb{R})$.

6. O conjunto das funções com todas as derivadas contínuas definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$).

   Notação: $C^\infty(I;\mathbb{R})$.

7. O conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais, denotado por $M_n(\mathbb{R})$. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos
   - $A + B \in M_n(\mathbb{R})$ por $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$;
   - $\lambda A \in M_n(\mathbb{R})$ por $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{n\times n}$.

Exemplos 1 (continuação)

8. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais. Definimos a adição e a multiplicação por escalar da seguinte maneira:

    - Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ forem elementos de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, então teremos

    $$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$

    - Se $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ for um elemento de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então teremos

    $$\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n.$$

Exemplo 2.

Considere $V = (0, \infty)$ semi-eixo positivo da reta real $\mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $V = (0, \infty)$ é um espaço vetorial real.

Sejam $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ e defina

- a soma entre x e y por

$$x \boxplus y = xy,$$

ou seja, é o produto usual entre x e y;

- o produto de x pelo escalar λ por

$$\lambda \boxdot x = x^{\lambda}.$$

Observe que para todo $x, y \in V$, temos $x > 0$ e $y > 0$. Então $xy > 0$ e, portanto, $xy \in V$.

Exemplo 2 (continuação).

Para verificar se, de fato, V é um espaço vetorial, precisamos analisar cada uma das 8 propriedades.

Sejam $x, y, z \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ arbitrários.

1. A propriedade comutativa vale, pois

$$x \boxplus y \overset{\text{def. de } \boxplus}{=} xy \overset{\text{comut. em } \mathbb{R}}{=} yx \overset{\text{def. de } \boxplus}{=} y \boxplus x.$$

2. A propriedade associativa da adição vale, pois

$$x \boxplus (y \boxplus z) \overset{\text{def. de } \boxplus}{=} x \boxplus (yz) \overset{\text{def. de } \boxplus}{=} x(yz) \overset{\text{assoc. em } \mathbb{R}}{=} (xy)z$$
$$\overset{\text{def. de } \boxplus}{=} (x \boxplus y)z \overset{\text{def. de } \boxplus}{=} (x \boxplus y) \boxplus z.$$

Exemplo 2 (continuação).

3. Se $x \in V$ então, como $1 \in V$, temos

$$1 \boxplus x \overset{\text{def. de } \boxplus}{=} 1x \overset{\text{neutro multip. em } \mathbb{R}}{=} x.$$

Note que 1 é o elemento neutro, que denotamos por $\mathfrak{o}$, da *adição* $\boxplus$.

4. Se $x \in V$, isto é, $x > 0$, então $x^{-1} \in V$ e vale

$$x \boxplus x^{-1} \overset{\text{def. de } \boxplus}{=} xx^{-1} \overset{\text{inverso em } \mathbb{R}}{=} 1 \overset{\text{neutro para } \boxplus}{=} \mathfrak{o};$$

Note que x^{-1} é o elemento oposto de x na *adição* $\boxplus$.

5. A propriedade associativa da multiplicação vale, pois

$$\lambda \boxdot (\mu \boxdot x) \overset{\text{def. de } \boxdot}{=} \lambda \boxdot x^{\mu} \overset{\text{def. de } \boxdot}{=} (x^{\mu})^{\lambda}$$
$$\overset{\text{prop. de potência em } \mathbb{R}}{=} x^{\mu\lambda} \overset{\text{comut. em } \mathbb{R}}{=} x^{\lambda\mu} \overset{\text{def. de } \boxdot}{=} (\lambda\mu) \boxdot x$$

Exemplo 2 (continuação).

6. A propriedade distributiva vale, pois

$$(\lambda+\mu)\boxdot x \overset{\text{def. de }\boxdot}{=} x^{\lambda+\mu} \overset{\text{prop. de potência em }\mathbb{R}}{=} x^{\lambda}x^{\mu}$$
$$\overset{\text{def. de }\boxplus}{=} x^{\lambda}\boxplus x^{\mu} \overset{\text{def. de }\boxdot}{=} (\lambda\boxdot x)\boxplus(\mu\boxdot x).$$

7. A propriedade distributiva vale, pois

$$\lambda\boxdot(x\boxplus y) \overset{\text{def. de }\boxplus}{=} \lambda\boxdot(xy) \overset{\text{def. de }\boxdot}{=} (xy)^{\lambda}$$
$$\overset{\text{prop. de potência em }\mathbb{R}}{=} x^{\lambda}y^{\lambda} \overset{\text{def. de }\boxplus}{=} x^{\lambda}\boxplus y^{\lambda}$$
$$\overset{\text{def. de }\boxdot}{=} (\lambda\boxdot x)\boxplus(\lambda\boxdot y).$$

8. Elemento neutro da multiplicação $\boxdot$:

$$1\boxdot x \overset{\text{def. de }\boxdot}{=} x^{1} \overset{\text{prop. de potência em }\mathbb{R}}{=} x.$$

Assim, provamos que $V=(0,\infty)$ é um espaço vetorial.

Exemplo 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos transformar o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais $\mathbb{R}^n$ em um espaço vetorial, definindo

- adição de duas n-uplas ordenadas, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, por

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n);$$

- produto de uma n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Exercício

Verifique que, do modo acima, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial.

Observação

O conjunto V depende de como são definidas as operações de adição e de multiplicação para se tornar um espaço vetorial.

Exemplo 4. Considere $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e defina

$$x + y = (2x_1 - 2y_1, x_2 - x_1). \tag{1}$$

Tomemos $x = (1, 0)$ e $y = (2, 2)$. Note que

$$x + y = (2 \cdot 1 - (2 \cdot 2), 0 - 1) = (-2, -1) \quad \text{e}$$
$$y + x = (2 \cdot 2 - (2 \cdot 1), 2 - 2) = (2, 0).$$

Assim,

$$x + y \neq y + x$$

e, portanto, não vale a propriedade comutativa da adição. Assim, $\mathbb{R}^2$ não é um espaço vetorial quando munido com a adição definida em (1).

Por outro lado, $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial quando munido com as operações

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{e} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Propriedades de um espaço vetorial

Proposição

Seja V um espaço vetorial. Temos

1. $\forall\, u, v \in V,\ u + w = v + w \implies u = v.$
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda 0 = 0.$
3. $\forall\, u \in V,\ 0u = 0.$
4. $\lambda u = 0 \implies \lambda = 0$ *ou* $u = 0.$
5. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\, u \in V,\ (-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u).$
6. $\forall\, u \in V,\ -(-u) = u.$
7. $u, v \in V \implies \exists!\, w \in V$ *tal que* $u + w = v.$

Subespaços Vetoriais

Definição

Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

(SV1) $0 \in W$;

(SV2) *Se* $u, v \in W$, *então* $u + v \in W$;

(SV3) *Se* $u \in W$, *então* $\lambda u \in W$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Observação

1. *Todo subespaço vetorial W de um espaço vetorial V é, ele próprio, um espaço vetorial.*
2. *W será subespaço vetorial de V se, e somente se, forem válidas as seguintes condições:*

   (SV1') $0 \in W$;

   (SV2') *Se $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $u + \lambda v \in W$.*

Exemplo 5: vários subespaços vetoriais

1. $\{0\}$ e V são subespaços vetoriais do espaço vetorial V. São chamados de subespaços vetoriais triviais.

2. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
   - É claro que $(0, 0, 0)$ satisfaz $0 + 0 + 0 = 0$.
   - Sejam (x, y, z) e $(u, v, w) \in S$. Então

   $$x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad u + v + w = 0.$$

   Precisamos provar que $(x, y, z) + (u, v, w) \in S$. Note que

   $$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w)$$

   cuja soma das coordenadas dá

   $$(x+u)+(y+v)+(z+w) \overset{\text{assoc. em } \mathbb{R}}{=} \underbrace{(x + y + z)}_{=0}+\underbrace{(u + v + w)}_{=0} = 0$$

   e, portanto, $(x, y, z) + (u, v, w) \in S$.

Exemplo 5: vários subespaços vetoriais (continuação)

2. Consituação da prova de que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   - Se $(x,y,z) \in S$, então $x+y+z=0$. Devemos provar que $\lambda(x,y,z) \in S$. Temos

     $$\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

     cuja soma das coordenadas dá

     $$\lambda x + \lambda y + \lambda z \overset{\text{distrib. em } \mathbb{R}}{=} \lambda(\underbrace{x+y+z}_{=0}) = 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

     Assim, $\lambda(x,y,z) \in S$.

Exemplo 5 (continuação)

3. $\mathcal{P}_n^* \subset \mathcal{P}_n$, dado por $\mathcal{P}_n^* = \{p(x) \in \mathcal{P}_n; p(0) = 0\}$ é subespaço de $\mathcal{P}_n$.

   - O polinômio nulo se anula em $x = 0$, logo, pertence a $\mathcal{P}_n^*$.
   - Se $p, q \in \mathcal{P}_n^*$, então $p(0) = 0 = q(0)$. Logo

     $$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0.$$

     Portanto, $p + q \in \mathcal{P}_n^*$.
   - Se $p \in \mathcal{P}_n^*$, então $p(0) = 0$. Logo

     $$(\lambda p)(0) = \lambda p(0) = 0, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

     Assim, $\lambda p \in \mathcal{P}_n^*$.

Exemplo 5 (continuação)

4. $S = \{y \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}); y'' - y = 0\}$, em que y'' representa a derivada de segunda ordem de y. Verifiquemos que S é um subespaço vetorial de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.
   - Claramente a função nula satisfaz $0'' - 0 = 0$;
   - Se $y_1, y_2 \in S$, então valem

     $$y_1'' - y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' - y_2 = 0.$$

     Precisamos provar que $y_1 + y_2 \in S$. Note que

     $$(y_1 + y_2)'' - (y_1 + y_2) = (\underbrace{y_1'' - y_1}_{=0}) + (\underbrace{y_2'' - y_2}_{=0}) = 0.$$

     Logo, $y_1 + y_2 \in S$.
   - Sejam $y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $y'' - y = 0$. Logo

     $$(\lambda y)'' - \lambda y = \lambda(\underbrace{y'' - y}_{=0}) = 0.$$

     Portanto, $\lambda y \in S$.

Exercício

O conjunto das funções contínuas da reta na reta, denotado por $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Proposição (Interseção de subespaços)

Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Então o conjunto $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

Demonstração.

1. Vamos mostrar que $0 \in U \cap W$:

   Como U e W são subespaços vetoriais, então $0 \in U$ e $0 \in W$. Assim, $0 \in U \cap W$.

2. Sejam $x, y \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $x + \lambda y \in U \cap W$. Como U e W são subespaços vetoriais, então

   $$x + \lambda y \in U \quad \text{e} \quad x + \lambda y \in W.$$

   Assim, $x + \lambda y \in U \cap W$.

$\square$

Definição

Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Definimos a soma de U e W como

$$U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}.$$

Proposição (Soma de subespaços)

Sejam U, W e V como na definição acima. Então o conjunto $U + W$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração.

1. Vamos mostrar que $0 \in U + W$.

   Como U e W são subespaços vetoriais, então $0 \in U$ e $0 \in W$. Assim, $0 = 0 + 0 \in U + W$.

$\square$

Demonstração.

(continuação)

2. Sejam $x, y \in U + W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto

$$\begin{aligned} x &= u_1 + w_1, \quad \text{com } u_1 \in U \text{ e } w_1 \in W; \\ y &= u_2 + w_2, \quad \text{com } u_2 \in U \text{ e } w_2 \in W. \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que $x + \lambda y \in U + W$.

Como U e W são subespaços vetoriais, então

$$u_1 + \lambda u_2 \in U \quad \text{e} \quad w_1 + \lambda w_2 \in W.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= (u_1 + w_1) + \lambda(u_2 + w_2) = u_1 + w_1 + \lambda u_2 + \lambda w_2 \\ &= \underbrace{u_1 + \lambda u_2}_{\in U} + \underbrace{w_1 + \lambda w_2}_{\in W} \in U + W. \end{aligned}$$

Observação

Afirmação: $U \cup W$, *em geral,* **não é** *um subespaço vetorial de* V.

De fato, basta considerarmos

$$V = \mathbb{R}^2,$$
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\},$$
$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}.$$

Note que

$$(1, -1) \in U \subset U \cup W \quad e \quad (1, 1) \in W \subset U \cup W.$$

Porém

$$(1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \notin U \cup W.$$

Pergunta

Quando a reunião de dois subespaços vetoriais é um subespaço vetorial?

Proposição

Sejam V um espaço vetorial e U e W subespaços vetoriais de V. Então

$$U + W$$

é o menor subespaço vetorial de V que contém $U \cup W$. Em outras palavras, se V' for um subespaço vetorial de V que contém $U \cup W$, então teremos

$$U \cup W \subset U + W \subset V'.$$

Demonstração.

Seja V' subespaço vetorial de V que contém $U \cup W$. Mostremos que

$$U + W \subset V'.$$

Seja $v \in U + W$. Então existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que

$$v = u + w.$$

Por outro lado

$$u, w \in U \cup W \subset V'.$$

Como V' é um subespaço vetorial de V, temos

$$u + w \in V'$$

o que conclui a prova. $\square$

Definição

Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Diremos que $U + W$ é a soma direta de U e W se tivermos

$$U \cap W = \{0\}.$$

Neste caso, escreveremos

$$U \oplus W$$

para representar $U + W$.

Proposição (Soma direta de subespaços vetoriais)

Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Teremos

$$V = U \oplus W$$

se, e somente se, para cada $v \in V$, $\exists! u \in U$ e $\exists! w \in W$ tais que

$$v = u + w.$$

Exemplo 6. Verifiquemos que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \quad \text{e}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}.$$

Já vimos que U é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Verifiquemos que W é, de fato, um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Note que, claramente, $(0, 0, 0) \in W$.

Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$. Então

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad u_1 = (0, 0, z_1) \text{ e } u_2 = (0, 0, z_2).$$

Logo,

$$u_1 + u_2 = (0, 0, z_1 + z_2) \in W.$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\lambda u_1 = \lambda(0, 0, z_1) = (\lambda 0, \lambda 0, \lambda z_1) = (0, 0, \lambda z_1) \in W.$$

Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6 (continuação)

Agora, queremos mostrar que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$. Precisamos provar que

$$U \cap W = \{0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^3 = U + W.$$

Note que, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(x, y, z) = \underbrace{(x, y, -x - y)}_{\in U} + \underbrace{(0, 0, z + x + y)}_{\in W} \in U + W$$

Logo, $\mathbb{R}^3 \subset U + W$ e, portanto, $\mathbb{R}^3 = U + W$ (por que?).

Resta-nos mostrar que $U \cap W = \{0\}$. Seja $(x, y, z) \in U \cap W$. Então

$$(x, y, z) \in U \quad \text{e} \quad (x, y, z) \in W.$$

Logo,

$$x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad x = y = 0.$$

Mas isso implica que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, ou seja, $U \cap W \subset \{0\}$ e isso conclui a prova (por que?).

Exemplo 7. Considere U e W os seguintes subespaços de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$$U = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ \ x = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ \ y = 0\}\,.$$

Mostre que $\mathbb{R}^3 = U + W$, mas a soma não é direta, isto é, $U \cap W \neq \{0\}$.

Resolução. Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que U e W são, de fato, subespaços do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(x\,,y\,,z) = \underbrace{(0\,,y\,,z)}_{\in U} + \underbrace{(x\,,0\,,0)}_{\in W} \in U + W.$$

Portanto, $\mathbb{R}^3 = U + W$.

No entanto, a soma não é direta, pois $U \cap V \neq \{(0\,,0\,,0)\}$.

De fato, pois, por exemplo, $(0\,,0\,,1) \in U \cap V$.

Exemplo 8. Verifique se

$$W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \colon f(x^2) = [f(x)]^2\}$$

é subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Resolução.

1. Afirmação: a função nula ($f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$) pertence a W. De fato, pois

$$\begin{aligned} &f(x^2) = 0 \quad \text{e} \\ &[f(x)]^2 = f(x) \cdot f(x) = 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $f(x^2) = f^2(x)$. Logo, a função nula está em W.

Exemplo 8 (continuação).

2. Vamos verificar se, dados $f, g \in W$, a soma $f + g \in W$. Sejam $f, g \in W$. Então valem as igualdades

$$f(x^2) \overset{(1)}{=} [f(x)]^2 \qquad \text{e} \qquad g(x^2) \overset{(2)}{=} [g(x)]^2, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Então, temos

$$(f+g)(x^2) \overset{def.\ de\ soma}{=} f(x^2) + g(x^2) \overset{(1)\ e\ (2)}{=} [f(x)]^2 + [g(x)]^2$$

e, por outro lado,

$$[(f+g)(x)]^2 \overset{def.\ de\ soma}{=} [f(x)+g(x)]^2 = [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2.$$

Exemplo 8 (continuação).

Tomemos um exemplo numérico para servir de *contra exemplo*.

Sejam

$$f(t) = 1, \ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad g(t) = t, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Note que

$f \in W$, pois $f(x^2) = 1$ e $[f(x)]^2 = 1$, portanto $f(x^2) = [f(x)]^2$

$g \in W$, pois $g(x^2) = x^2$ e $[g(x)]^2 = x^2$, portanto $g(x^2) = [g(x)]^2$.

Exemplo 8 (continuação).

Então,

$$(f+g)(x^2) = f(x^2) + g(x^2) = 1 + x^2,$$

entretanto

$$\begin{aligned}
[(f+g)(x)]^2 &= [f(x)+g(x)]^2 \\
&= [f(x)]^2 + 2f(x)g(x) + [g(x)]^2 \\
&= 1 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 \\
&= 1 + 2x + x^2
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(f+g)(x^2) \neq [(f+g)(x)]^2,$$

o que implica que $f+g$ não pertence a W.

REFERÊNCIA

- S. L. Zani, Notas de Aula - Álgebra Linear, ICMC.