Exercícios sobre

Forma Canônica de Jordan e Isometria

Exercício 1. Encontre a forma canônica de Jordan associada às matrizes A e B e uma base em que cada uma dessas matrizes estarão nessa forma, em que:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Solução do item (a). Temos

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4 = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

O autovalor $\lambda = 1$ tem multiplicidade algébrica 1.

Portanto, sua multiplicidade geométrica é 1.

Como as multiplicidades algébricas e geométrica do autovalor 1 são iguais a um, o único bloco correspondente a este autovalor é $J(1;1) = (1)$.

Solução do item (a) (continuação).

O autovalor $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica 2.

- Se sua multiplicidade geométrica for 2, existirão 2 blocos iguais a (2) associados a este autovalor e a matriz da forma canônica de Jordan será
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Se a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 2$ for 1, existirá 1 bloco igual a $J(2;2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ associado a este autovalor e a matriz da forma canônica de Jordan será
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução do item (b). Temos

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3.$$

O autovalor $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica 3.

- Se sua multiplicidade geométrica for 3, existirão 3 blocos iguais a (2) e a matriz da forma canônica de Jordan será

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução do item (b) (continuação).

- Se sua multiplicidade geométrica for 2, existirão 2 blocos, um deles igual a (2) e o outro igual a $J(2;2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e a matriz da forma canônica de Jordan será

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Se sua multiplicidade geométrica for 1, existirá 1 bloco e a matriz da forma canônica de Jordan será

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2. Considere o espaço vetorial real $(P_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx, \quad f, g \in P_2(\mathbb{R}).$$

Ortonormalize a base canônica, $B = \{1, x, x^2\}$.

Solução.

Vamos aplicar o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.

Sejam $v_1 = 1$, $v_2 = x$ e $v_3 = x^2$. Então

$$\|v_1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1^2 dx = 1$$

$$\therefore \quad u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Solução (continuação). Também vale

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = x - \frac{1}{2}$$

e, daí,

$$\begin{aligned} \|u_2'\|^2 = \langle u_2', u_2' \rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx \\ = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_2'\| = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Portanto,

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \sqrt{3}(2x - 1).$$

Solução (continuação).

Analogamente, devemos calcular

$$u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 \qquad \text{e} \qquad u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|}$$

e, portanto, precisamos determinar $\langle v_3, u_1 \rangle$, $\langle v_3, u_2 \rangle$ e $\|u_3'\|$. Temos

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \int_0^1 x^2(12x - 4) dx = \int_0^1 12x^3 - 4x^2\, dx = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{5}{3}x$$

Então,

$$\|u_3'\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} - \frac{5x}{3} \right)^2 dx = \ldots = \frac{199}{270}.$$

$$\therefore \quad u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|} = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{199}} \left(x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

Solução (continuação).

Finalmente, a base canônica, $B = \{1, x, x^2\}$, ortornormalizada se torna

$$\left\{1, \sqrt{3}(2x-1), \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{199}}\left(x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Exercício 3. Seja $T\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, dada por

$$T(p) = p', \quad \forall\ p \in P_3(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule $[T]_C$, em que C é a base canônica.

(b) Qual é a forma canônica de Jordan do operador linear T?

Solução de (a). Temos

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2. \end{aligned}$$

Portanto $[T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução de (b). O polinômio característico de T é

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3.$$

Logo, $\lambda = 0$ é o único autovalor de T e tem multiplicidade algébrica 3.

- Suponhamos que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ seja 3. Então, a matrix de Jordan de T terá 3 blocos e, portanto, será da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução de (b) (continuação).

- Suponhamos que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ seja 3. Então, a matrix de Jordan de T terá 3 blocos e será de uma das seguintes formas

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Suponhamos que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ seja 1. Então, a matrix de Jordan de T terá 1 bloco e, portanto, será da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4. Considere o espaço vetorial $V = P(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt, \quad p, q \in P(\mathbb{R}).$$

O operador linear $T\colon V \to V$ dado por $T(p) = q$, $\forall\ p \in V$, em que $q(t) = tp(t)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, é uma isometria? Justifique sua resposta.

Solução. Basta verificarmos se $\|T(p)\| = \|p\|$ para todo p na base canônica $C\{1, x, x^2, \dots\}$ de $P(\mathbb{R})$. Note, porém, que $T(1) = q_1$, em que $q_1(t) = t$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\|T(1)\|^2 = \langle T(1), T(1) \rangle = \langle t, t \rangle = \int_0^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Entretanto

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1^2 dx = 1.$$

Portanto, $\|T(1)\| \neq \|1\|$ e T não é uma isometria.

Exercício 5. Considere espaço vetorial real $(M_{4\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munido do produto interno

$$\langle A, B\rangle = tr(B^t A), \text{ para } A, B \in M_{4\times 1}(\mathbb{R}),$$

e o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usual. Construa uma isometria entre estes espaços vetoriais reais (se existir).

Solução. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \to M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ dado por

$$T(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

T é linear (verifique). Além disso, $\|(1,0,0,0)\| = 1$ e

$$\|T(1,0,0,0)\|^2 = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = tr(1) = 1.$$

Portanto $\|T(1,0,0,0)\| = \|(1,0,0,0)\|$.

Analogamente para os outros vetores da base canônica do $\mathbb{R}^4$.

Portanto T é uma isometria.