TUTORIAL:

Representação de sinais periódicos por Série de Fourier

Allan Eduardo Feitosa, 2019

(Aluno de pós-graduação da área de concentração “Sistemas Eletrônicos” da Engenharia Elétrica da USP)

Resumo

Vamos apresentar uma breve introdução ao conceito de representação de sinais periódicos por meio da série de Fourier, juntamente com as suas motivações, suas principais características e as consequências práticas, que são interessantes para seu uso em Engenharia Elétrica e ciências em geral.

1. Visão Geral

Um sinal em função do tempo $s(t)$, periódico com período $T > 0$, tem representação em série de Fourier dada pela expressão

$$\boldsymbol{s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \,\mathbf{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)},$$

com a_0, a_n e b_n coeficientes reais. Alternativamente, a série pode ser expressa por[1]

$$\boldsymbol{s(t) = A_0 + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n\right)},$$

com A_0, A_n e ϕ_n coeficientes reais e $0 \leq \phi_n \leq 2\pi$.

[1]*Existe uma terceira forma de representação que comentaremos mais a frente, que é mais apropriada para aplicações na área de estudo de processamento de sinais.*

Em outras palavras: um sinal $s(t)$ periódico pode ser escrito como uma soma infinita (?) de senos e cossenos, ponderados por coeficientes a_n e b_n.

Deve-se notar também que as frequências angulares dos senos e cossenos são *harmonicamente relacionadas*. Isto é, dada a sequência:

$$\left(\frac{2\pi}{T}, \frac{4\pi}{T}, \frac{6\pi}{T}, \dots, \frac{2\pi n}{T}, \dots\right) = \left(\frac{2\pi n}{T}\right)_{n\geq 1},$$

o n-ésimo termo se relaciona com o primeiro (chamado de *frequência fundamental*), segundo a relação

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n\omega_1, \qquad n \geq 1.$$

Definimos o <u>período fundamental</u> da sequência harmonicamente relacionada como:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = T.$$

Por exemplo, um sinal $s(t)$ com período $T = 0.1s$ será dado pela série

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(20\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(20\pi n t),$$

com os termos de senos e cossenos com frequências harmonicamente relacionadas:

$$(20\pi, 40\pi, 60\pi, \dots, 20\pi n, \dots) = \left(\frac{2\pi n}{0.1}\right)_{n \geq 1}.$$

Até aqui, definimos o que é a representação em Série de Fourier de um sinal $s(t)$ de período T.

Mas o que significa tudo isso?

Porque podemos representar $s(t)$ desta forma?

Qual a intuição por trás da representação por uma série de senos e cossenos harmonicamente relacionados?

E, igualmente importante, que interpretações podemos tirar representando um sinal por sua série de Fourier e como isso ajuda o cientista/engenheiro?

Além disso, há outras questões mais formais, como “o que é uma série?” e “o que significa representar uma função por uma série?”

A seguir, vamos tentar investigar a intuição e motivação por trás dessa visão geral e procurar responder tais perguntas. Para isto, vamos tomar um pequeno desvio e estudar um pouco o polinômio e a série de Taylor. Valerá a pena! ;)

2. Buscando intuição e motivação: Aproximando funções pelo polinômio de Taylor

Dada uma função $f(t)$ (vamos considerar funções contínuas por simplicidade), uma boa aproximação em torno de $t = t_0$ pode ser obtida pela reta tangente no ponto $(t_0, f(t_0))$, que é:

$$g(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0),$$

onde $f'(t_0)$ é a derivada da função f calculada em $t = t_0$. Esta função é chamada de Polinômio de Taylor de Primeira Ordem em torno de t_0, e a aproximação

$$f(t) \approx g(t),$$

funcionará bem ao redor de $t = t_0$.

Exemplo: Aproximando $f(t) = e^t$ em torno de $t = 0$.

Temos que $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$ e, portanto,

$$g(t) = 1 + t.$$

No gráfico da Figura 1 ao lado, podemos notar como o erro

$$f(t) - g(t)$$

se torna menor quanto mais próximo do ponto $(0{,}1)$ estivermos. Neste ponto, temos

$$f(t) = g(t),$$

e, portanto, a aproximação é sem erros neste ponto. A medida que nos distanciamos de $(0{,}1)$, o erro ao aproximar $f(t)$ por $g(t)$ aumenta.

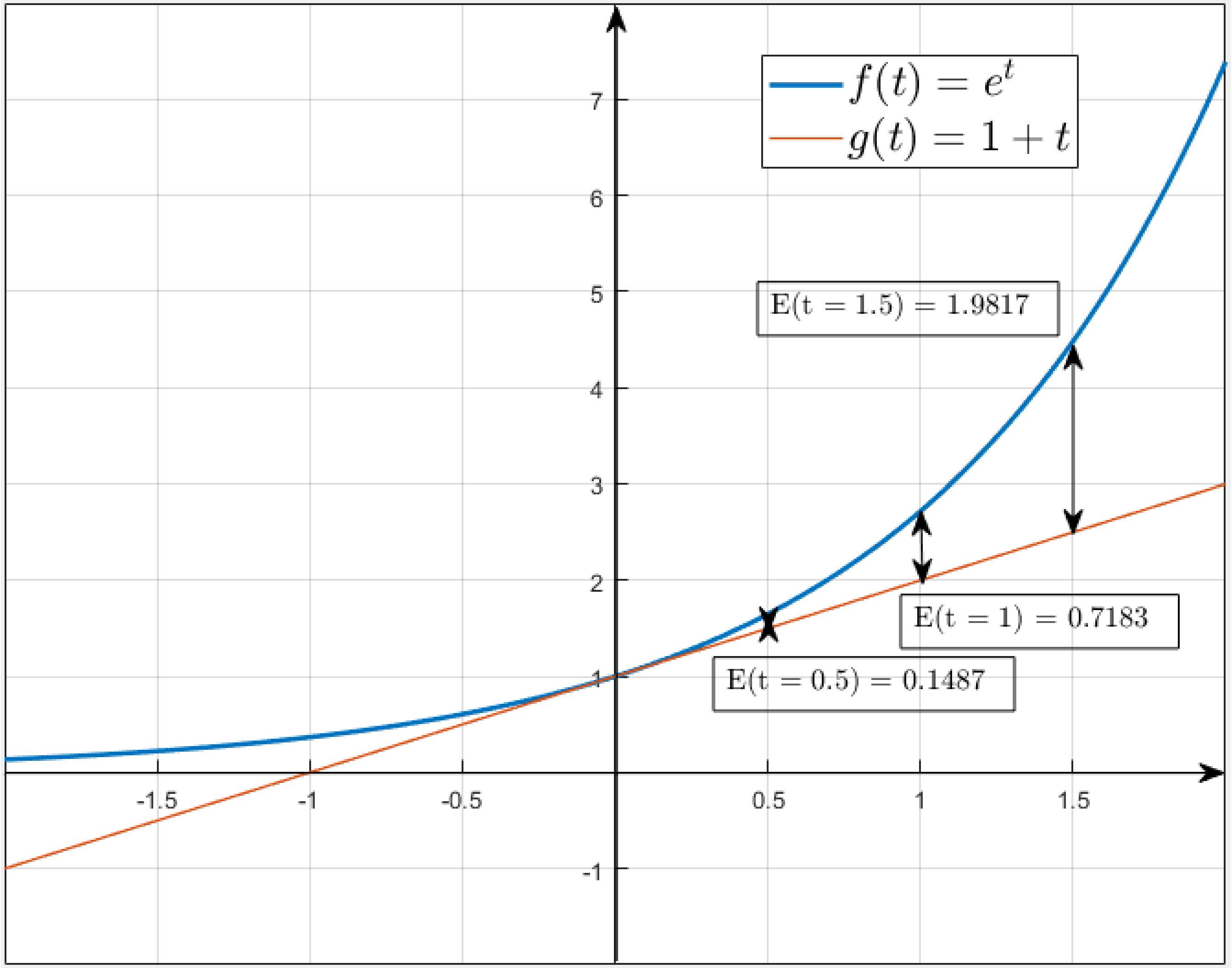


Figura 1: Aproximação de $f(t) = e^t$ por um polinômio de Taylor de primeira ordem em torno de $t = 0$. O erro de aproximação é mostrado para $t \in \{0.5, 1, 1.5\}$.

Para melhorar a aproximação da função em torno de $t = t_0$, podemos acrescentar um termo de segundo grau na expressão da reta tangente

$$h(t) = g(t) + \frac{f''(t_0)(t - t_0)^2}{2},$$

onde $f''(t_0)$ é a segunda derivada da função f calculada em $t = t_0$[1]. Este é o Polinômio de Taylor de Segunda Ordem em torno de t_0, e esperamos que a aproximação

$$f(t) \approx h(t),$$

seja melhor que a aproximação por $g(t)$ em torno de $t = t_0$.

Para refletir: por que faz sentido utilizar a segunda derivada como coeficiente do termo quadrático? (Dica: pense porque utilizamos a primeira derivada no caso de $g(t)$).

[1] *O fator ½ é necessário para garantir que as derivadas de segunda ordem da função f e da aproximação h tenham o mesmo valor em $t = t_0$. Isto é desejado, pois esperamos que o comportamento de f e de g seja o mais parecido possível próximo de $t = t_0$.*

Utilizando uma aproximação por polinômio de Taylor de segunda ordem, isto é

$$h(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2},$$

(verifique!), vemos no gráfico da Figura 2 ao lado como ficam o erro de aproximação

$$f(t) - h(t),$$

e da mesma forma podemos observar que este se torna menor quanto mais próximo do ponto $(0,1)$ estivermos. Além disso, a aproximação apresenta menor erro que a aproximação de primeira ordem.

<u>Adendo</u>: Podemos pensar em uma aproximação de ordem zero, que é dada por $z(t) = f(t_0)$, que neste caso se tornaria

$$z(t) = 1,$$

e esta seria a aproximação mais simples de ser feita em torno do ponto $(0,1)$.

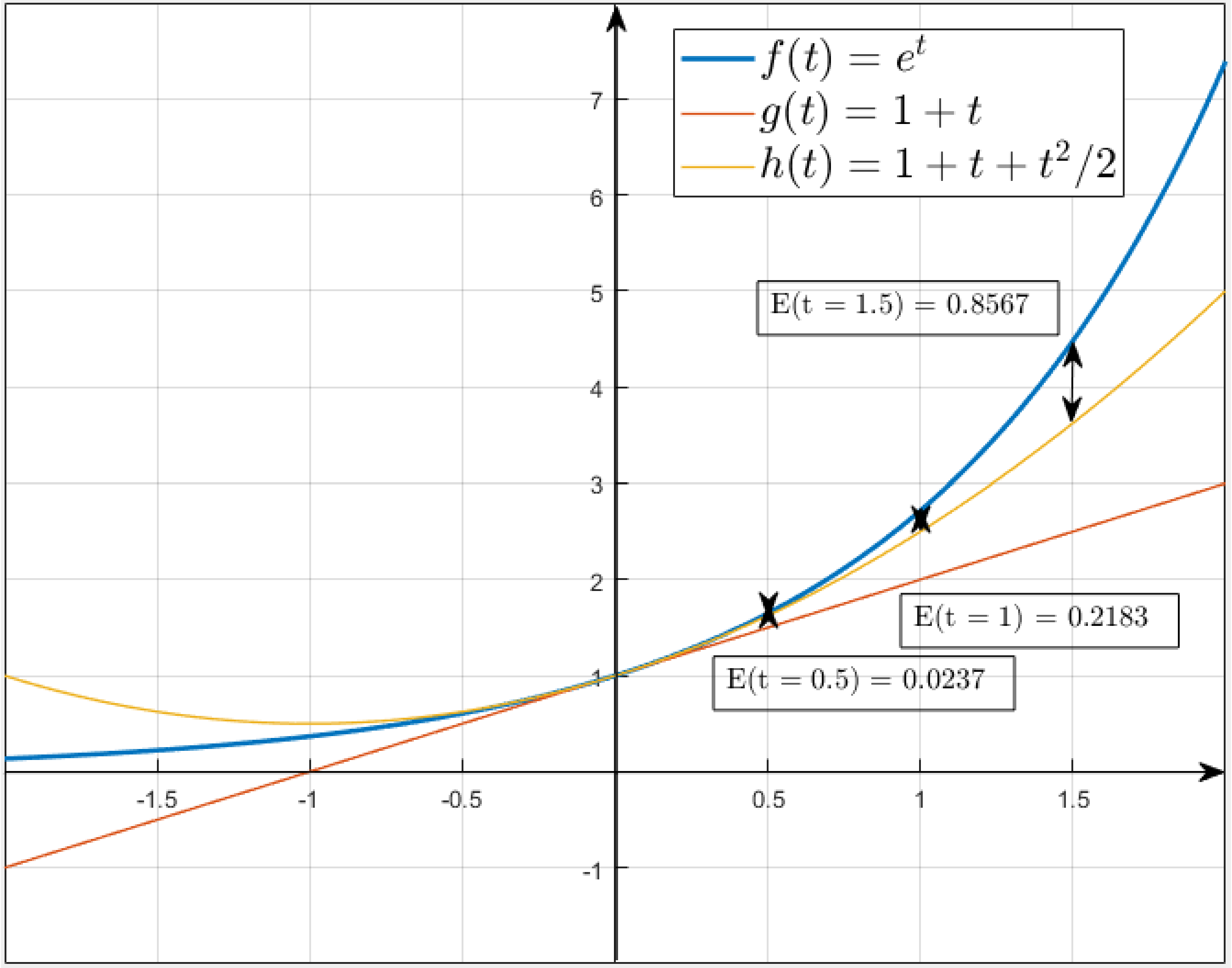


Figura 2: Aproximação de $f(t) = e^t$ por um polinômio de Taylor de segunda ordem em torno de $t = 0$. O erro de aproximação é mostrado para $t \in \{0.5, 1, 1.5\}$.

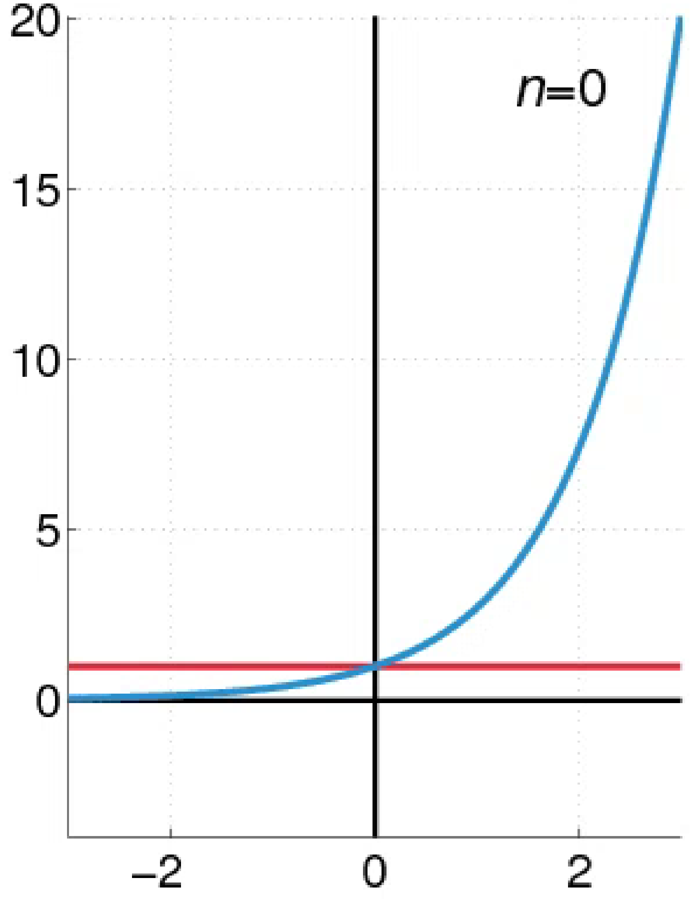
Assim, podemos nos perguntar se é possível conseguir aproximações melhores acrescentando termos de ordem superior ao polinômio aproximador.

O polinômio de Taylor de ordem N é a generalização do que vimos, e é dado pelo expressão

$$p(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (t - t_0)^n ,$$

em que $f^{(n)}$ é a n-ésima derivada da função f.

Observe na animação ao lado como que a aproximação para $f(t) = e^t$ se torna melhor em pontos mais afastados de $t_0 = 0$ a medida que N aumenta.



Fonte: Wikipedia. Autor: Oleg Alexandrov

E se fizermos, com ousadia, N se tornar um número tão grande quanto se queira? Em linguagem matemática, o que acontece se fizermos $N \to \infty$ no polinômio de Taylor?

A resposta é que desta ousadia nasce a Série de Taylor (em torno de t_0), dada por

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n ,$$

e, se a função f é bem comportada e a série acima converge (?), podemos afirmar com tranquilidade que

$$T(t) = f(t), \forall t \in \mathrm{Dom}\{f\}.$$

Este resultado é bastante forte. Porém, antes de qualquer coisa, o que é uma série e o que significa dizer que ela converge?

2.1 Séries: *in a nutshell*

Uma série é, de forma simplificada, a soma dos termos de uma sequência infinita. Genericamente, dada uma sequência

$$(a_n)_{n\geq 1} = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots), a_n \in \mathbb{R},$$

a sua série será a soma de todos os seus elementos, isto é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, ,$$

E, se for possível atribuir um valor finito a esta soma, chamamos este valor de *soma da série*. Neste caso (apenas) dizemos que a série é *convergente*.

Exemplo clássico: A série geométrica

A partir da sequência

$$(g_n)_{n\geq 1} = (a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, \dots), 0 < r < 1,$$

podemos definir a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

que sabemos (ou deveríamos saber) ter valor finito dado por

$$S = \lim_{j\to\infty} \sum_{n=1}^{j} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Assim, uma sequência com $a = 1$ e $r = 1/2$ e sua soma será $S = 2$.

2.3 Representação de funções por séries

Séries podem ser utilizadas para representar funções. Por exemplo, as seguintes funções tem representação por Série de Taylor (em torno de $t = 0$) dadas por:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n},$$

$$\text{sen}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Achou as representações dessas funções parecidas? Não é mera coincidência, já que elas são relacionadas pela expressão $e^{jt} = \cos(t) + j\text{sen}(t)$.

Exemplo: na Figura 3 ao lado, temos as aproximações para a função $f(t) = \text{sen}(t)$ em torno de $t = 0$. Perceba que quanto maior o valor de N os polinômios aproximam melhor valores mais distantes do ponto $(0,0)$.
Para $N \to \infty$, teremos

$$\text{sen}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

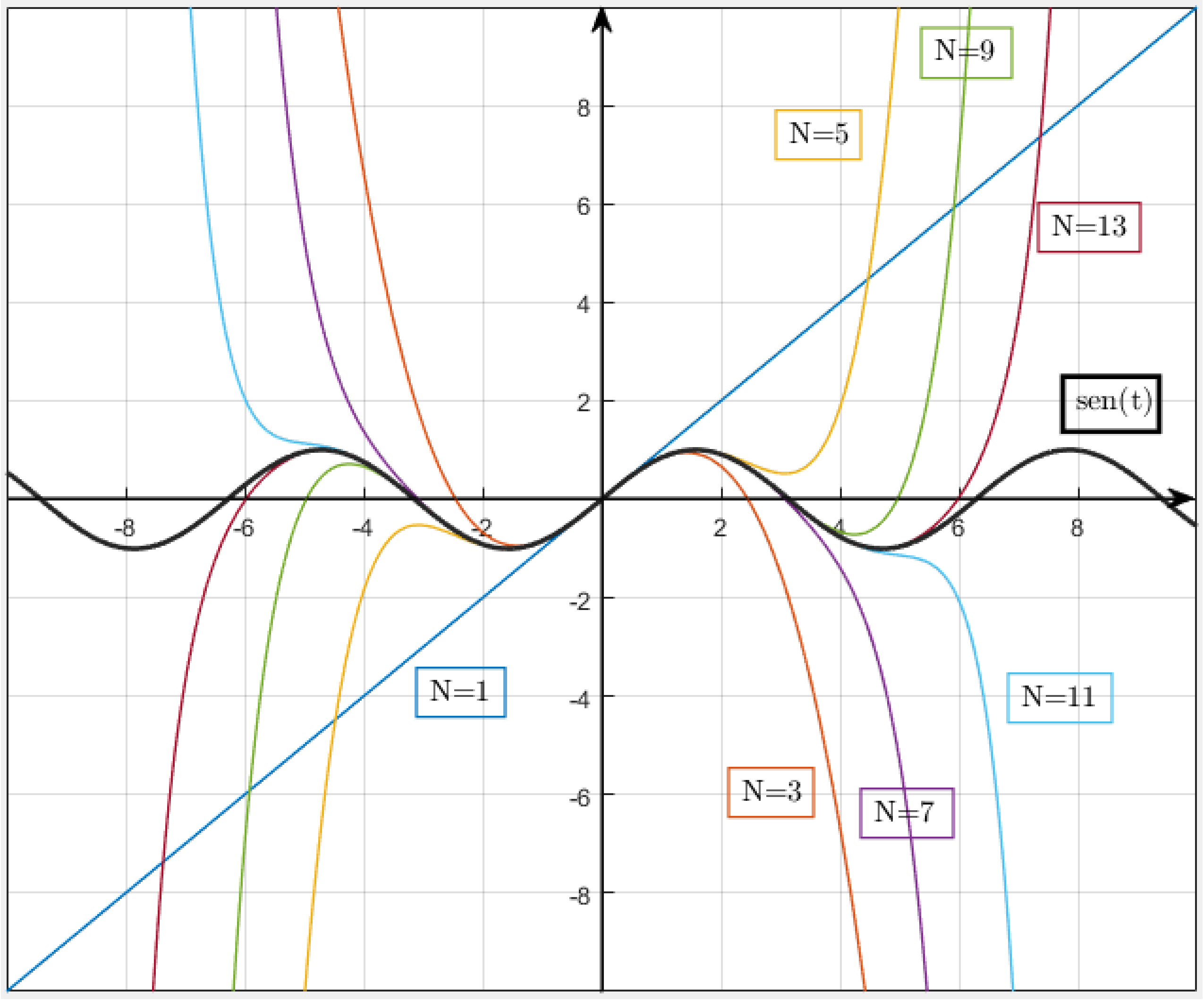


Figura 3: Aproximações para a função $f(t) = \text{sen}(t)$ em torno de $t = 0$ para $1 \leq N \leq 13$.

Até aqui...

Demos uma desviada razoável da Série de Fourier para a Série de Taylor, mas ganhamos várias ideias que vão nos ajudar a dar a intuição necessária para entender a primeira. As principais são:

1. Podemos aproximar uma função tem torno de um ponto utilizando um polinômio de ordem N.
2. Para valores maiores de N, esta aproximação se torna melhor, em termos do erro cometido. A aproximação também melhora para pontos mais distantes do ponto escolhido.
3. Se fizermos $N \to \infty$, obtemos a Série de Taylor, e se esta convergir, ela representa a função original em todos os pontos de seu domínio.

Devemos também reforçar que estas aproximações permitem descrever mais facilmente funções, facilitando o trabalho do cientista e do engenheiro em seu trabalho.

3. Representação de Funções Periódicas: a Série de Fourier

Agora já sabemos que séries (convergentes) podem ser utilizadas para representar funções, e que essas séries são generalizações de aproximações por funções mais simples (polinômios no caso de Taylor).

Vamos retomar os conceitos que vimos no início. Relembrando, a Série de Fourier é uma representação para sinais periódicos.

3.1 Sinais periódicos

Matematicamente, uma função $s(t)$ é periódica se

$$s(t) = s(t + T),$$

para um período $T > 0$. Isto que dizer que a função apresenta "cópias" de si mesma a cada deslocamento de T no tempo.

Os exemplos mais imediatos de funções periódicas são as funções seno e cosseno, e por diversas razões, podemos considerá-las as funções períodicas elementares[1].

Esta ideia de função periódica elementar nos ajudará a justificar o formato da Série de Fourier.

[1] *Por exemplo, lembre que estas funções surgem naturalmente como sendo a projeção sobre os eixos* x *e* y *da distância de um ponto no círculo trigonométrico em relação à origem, e se esse ponto se desloca uniformemente na circunferência, o valor desta projeção definirá as funções cosseno e seno, respectivamente.*

3.1 Sinais periódicos

Matematicamente, uma função $s(t)$ é periódica se

$$s(t) = s(t + T),$$

para um período $T > 0$. Isto que dizer que a função apresenta "cópias" de si mesma a cada deslocamento de T no tempo.

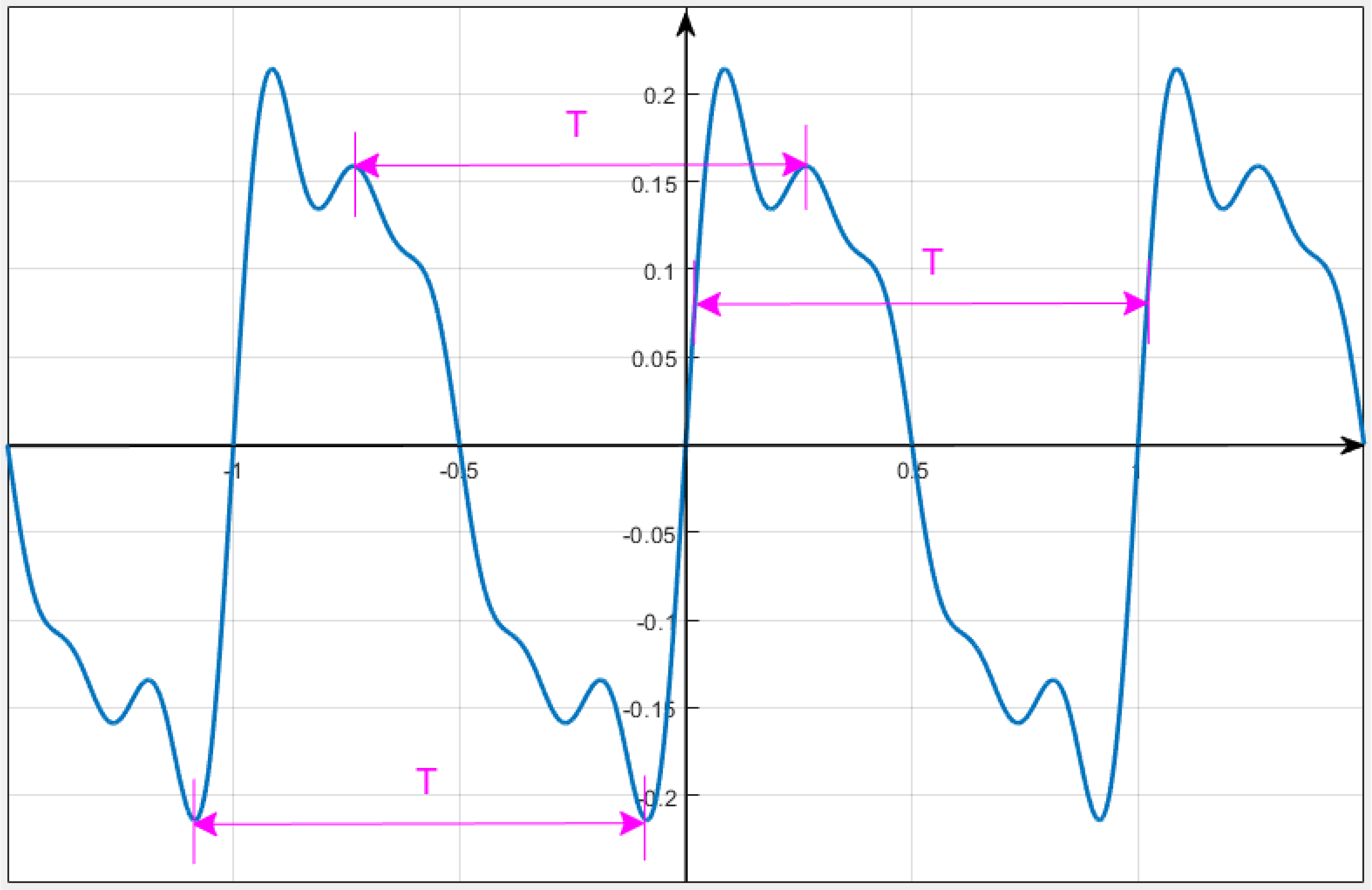


Figura 4: Exemplo de uma função periódica arbitrária com período $T = 1$.

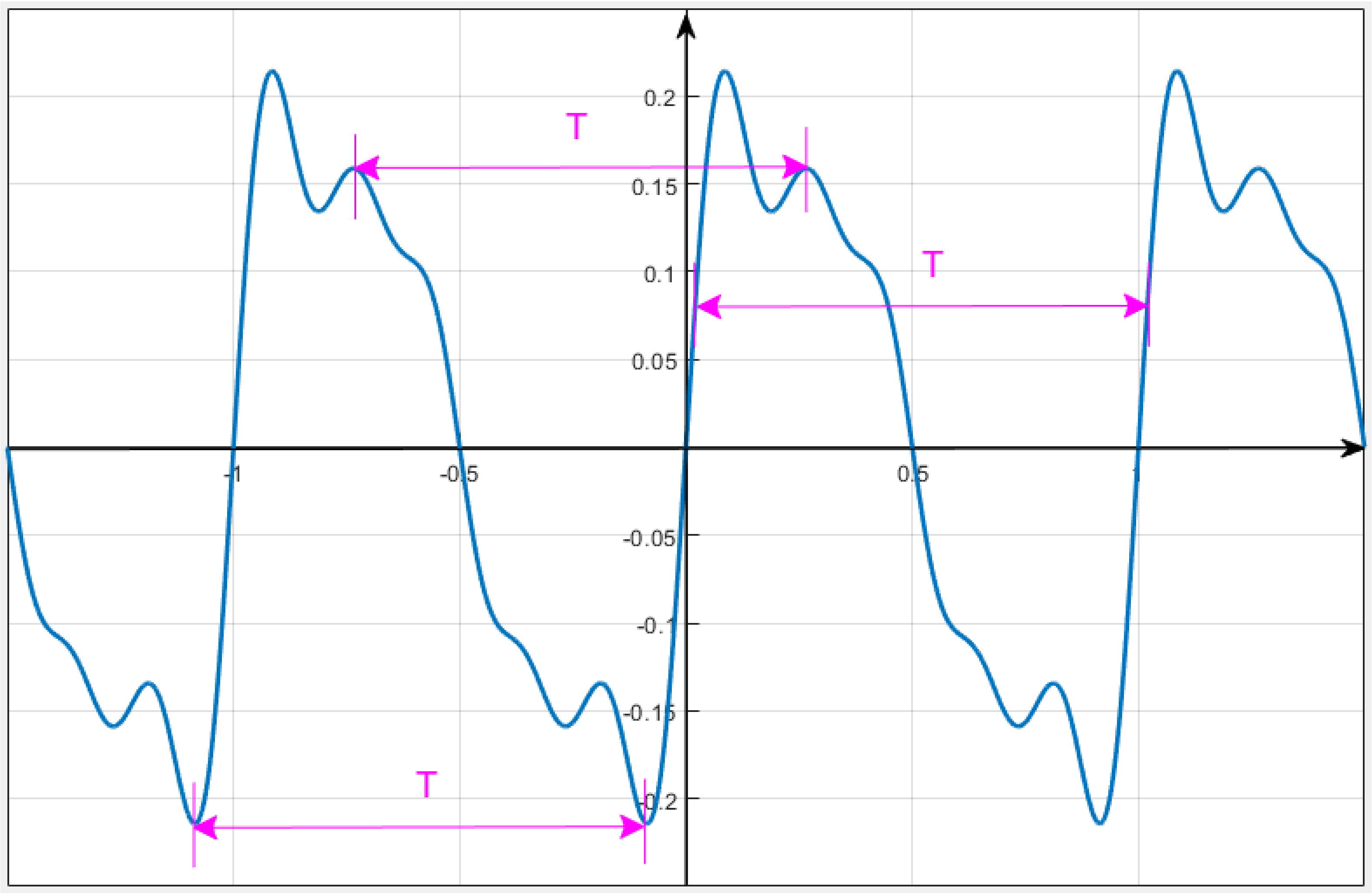


Figura 4: Exemplo de uma função periódica arbitrária com período $T = 1$. Note que o período T pode ser verificado de inúmeras formas distintas.

3.2 Tentando aproximar uma função “em torno de seu periodo”

Relembrando, a motivação por trás do polinômio de Taylor era aproximar uma função ao redor de um ponto. Vamos tentar algo um pouco diferente para funções periódicas: ao invés de fazer isso ao redor de um ponto, vamos tentar aproximar a função “ao redor de um período”.

Incialmente em Taylor, utilizamos a função que representava a reta tangente no ponto escolhido, e neste ponto, a reta e a função se igualavam. Vamos tentar, para a função períodica da Figura 4, aproximar por uma outra função com mesmo período e que seja “tão elementar” quanto a reta no caso de Taylor.

A questão é: qual função periódica e “elementar” parece ser adequada para esta aproximação “por período”?

Analizando o gráfico da função na Figura 4, uma escolha razoável é usar a **função seno** com período $T = 1$.

A questão é: qual deve ser a amplitude desse seno? Afinal, é intuitivo imaginar que algumas escolhas de amplitude serão melhores que outras.

Por exemplo, uma amplitude de 0.2 parece muito mais razoável neste caso do que uma amplitude de 1000. Como fazer esta ideia de escolha da melhor amplitude precisa e objetiva?

Podemos utilizar o critério do mínimo erro quadrático médio[2]. Primeiro definimos o erro quadrático, e sendo b_1 a amplitude do seno, ele é

$$Eq(t) = (s(t) - b_1 \operatorname{sen}(2\pi t))^2,$$

e o Erro Quadrático Médio (em um período) será

$$Eq_m = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} Eq(s)\, ds. \qquad (1)$$

[2] *Este é o mesmo critério que utilizamos quando aproximamos pontos por uma função utilizando mínimos quadrados. Para saber mais sobre o assunto, ver ...*

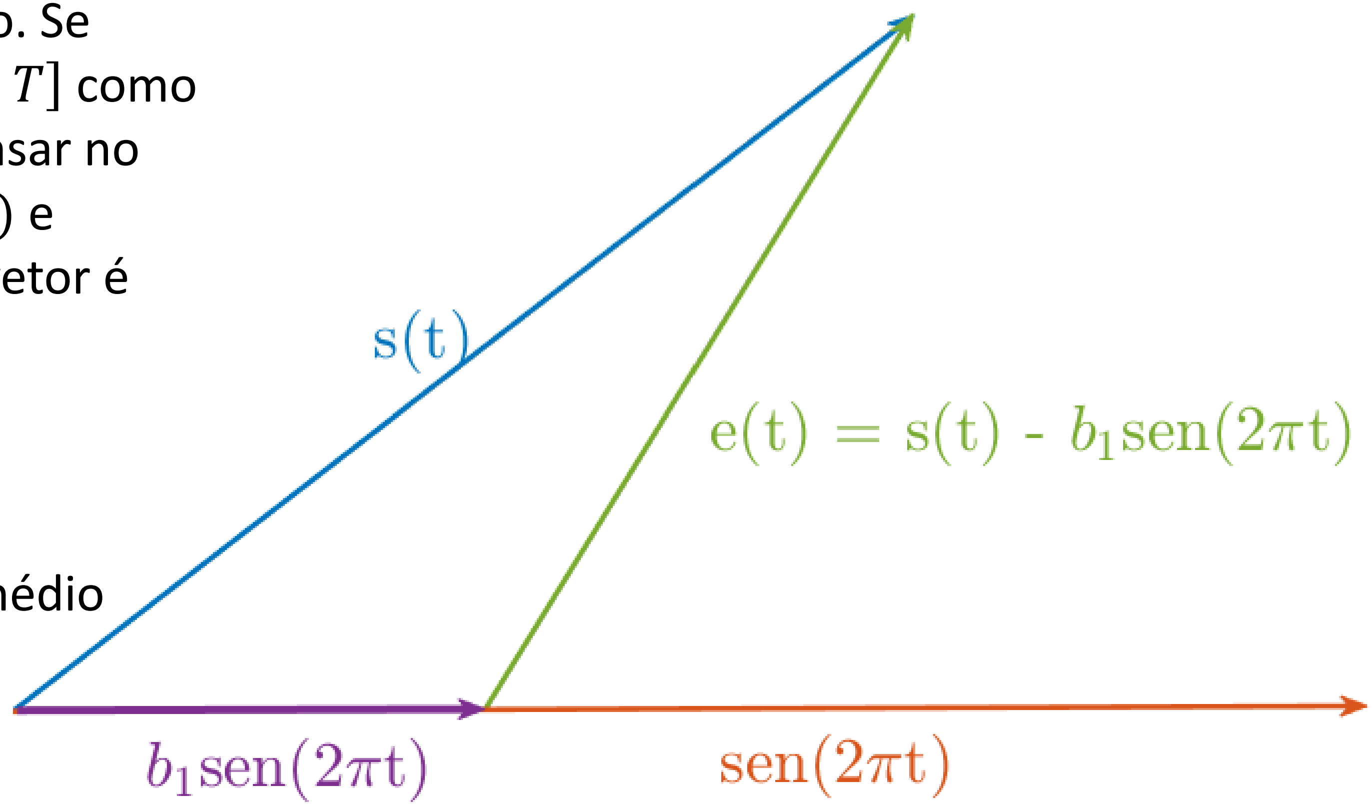
Não temos a intenção aqui de justificar o porquê de escolhermos o Erro Quadrático Médio como critério, então vamos apenas tomá-lo como uma escolha razoável.

Entretanto, é fácil visualizar na Figura 5 ao lado porque o erro quadrático médio faz sentido. Se pensarmos nas funções no intervalo $[t, t+T]$ como vetores num espaço vetorial, podemos pensar no erro como a diferença entre os vetores $s(t)$ e $b_1 \, \mathrm{sen}(2\pi t)$. A norma (ou módulo) desse vetor é dada pela expressão[3]

$$\|e(t)\| = \sqrt{\int_t^{t+T} e^2(t) dt},$$

que é a raiz quadrada do erro quadrático médio multiplicado por T.

[Não tenham medo de Algelin, ela é muito amiga!]



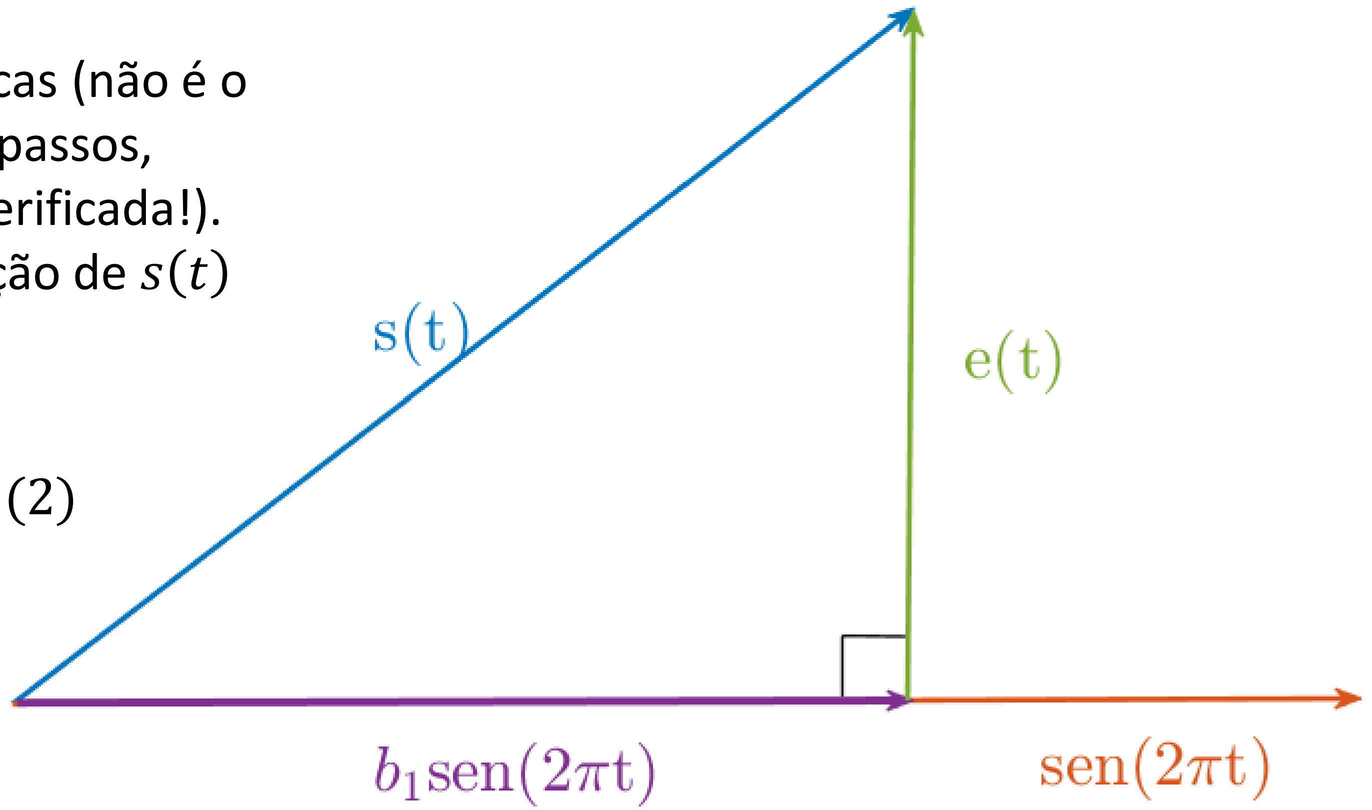
[3] *Esta expressão para a norma depende da definição de um produto interno no espaço vetorial das funções. Neste caso, dado duas funções $f(t)$ e $g(t)$ ele pode ser dado pela integral de $f(t)g(t)$ calculada no intervalo $[t, t+T]$.*

Assim, minimizar a norma do erro $e(t)$ é equivalente a minimizar o erro quadrático médio. Isso acontece quando $s(t)$ e $b_1 \operatorname{sen}(2\pi t)$ são perpendiculares!

Desta forma, $b_1 \operatorname{sen}(2\pi t)$ será a projeção de $s(t)$ sobre $\operatorname{sen}(2\pi t)$.
Vamos pular algumas passagens matemáticas (não é o foco neste momento demonstrar todos os passos, mas encorajamos que a matemática seja verificada!).
A amplitude b_1, quando queremos a projeção de $s(t)$ sobre $\operatorname{sen}(2\pi t)$, é dada por

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} s(t)\operatorname{sen}(2\pi t)dt\,. \qquad (2)$$

Assim, temos a melhor escolha da amplitude do seno de período $T = 1$, segundo o critério do mínimo erro quadrático médio.



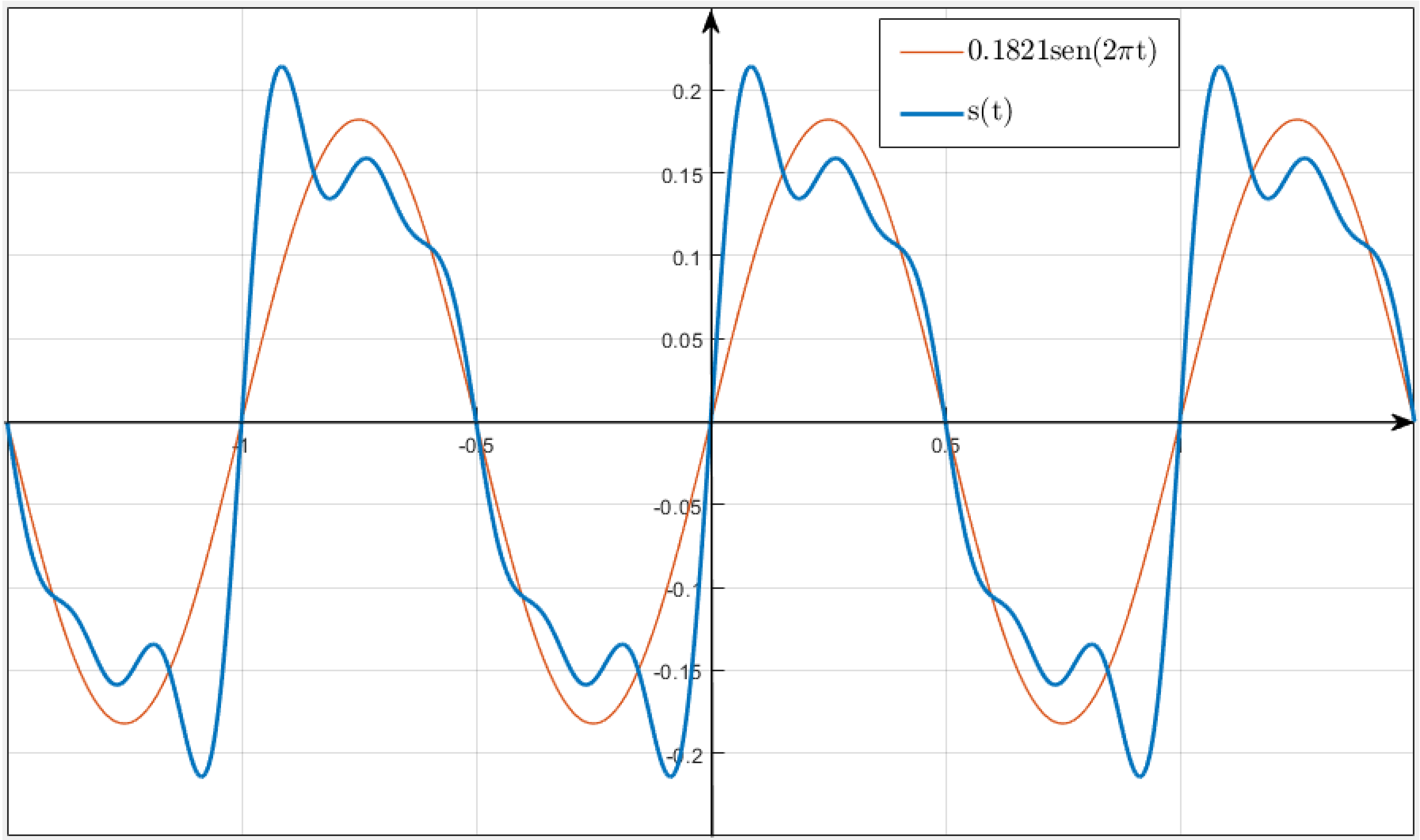
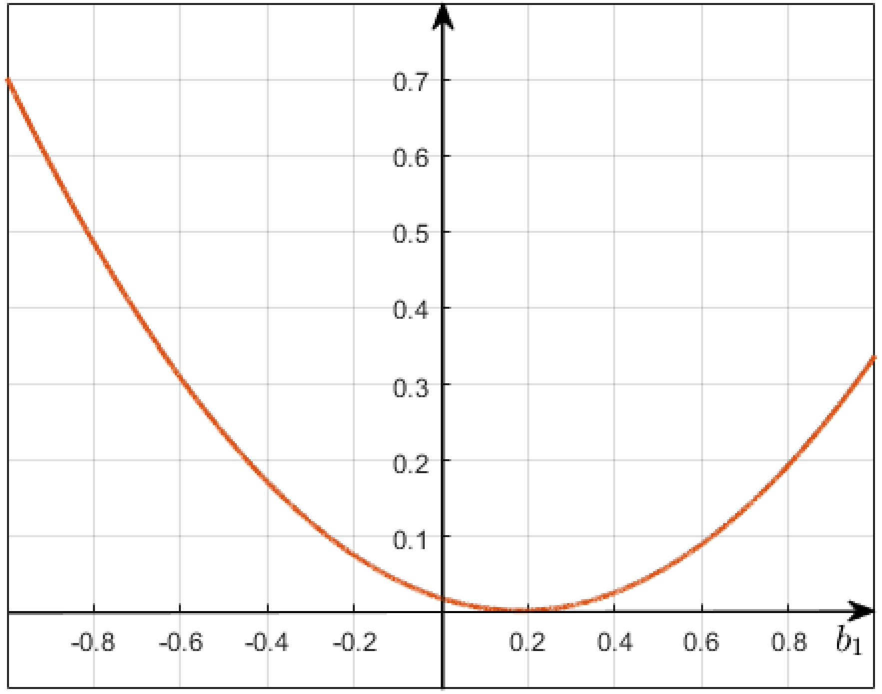


Figura 5: Função $s(t)$ da Figura 4 junto com a função $0.1821\,\mathrm{sen}(2\pi t)$, de mesmo período. A amplitude foi calculada segundo a expressão (2).

Assim, temos na Figura 5 a função $0.1821\,\mathrm{sen}(2\pi t)$ como nossa primeira tentativa de aproximação da função $s(t)$, e sabemos que ela minimiza o erro quadrático médio. Outra forma de visualizar este fato é pelos gráficos da Figura 6, que mostram o erro quadrático médio em função de b_1.



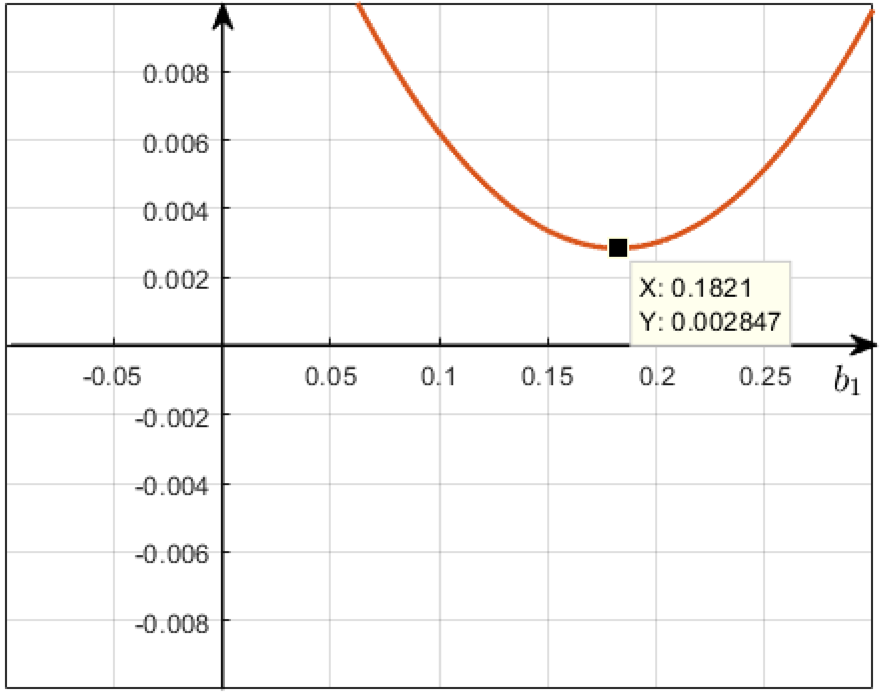


Figura 6: Erro quadrático médio (calculado por (1)) em função de b_1, com $-1 \leq b_1 \leq 1$. O gráfico à direita apresenta um *zoom* ao redor do valor mínimo, cujo valor de b_1 é dado por (2).

3.3 Melhorando a aproximação

Agora, vamos usar outra intuição que tiramos do polinômio de Taylor: como podemos somar mais termos a nossa aproximação de forma a diminuir o erro?

Com o polinômio de Taylor, adicionamos termos de ordem N que tinham relação com as derivadas de ordem N, e sempre a igualdade entre aproximação e a função no ponto escolhido era mantida intacta.

Lembrando que estamos aproximando funções “em torno do seu período”, existem outras funções que podemos utilizar mantendo a aproximação em torno do período intacta, assim como Taylor fazia em torno de um ponto?

A resposta é sim! Basta que as funções sejam harmonicamente relacionadas!

Na Figura 7 ao lado, temos funções senos harmonicamente relacionados, isto é, suas frequências angulares são do tipo

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T},$$

para $1 \leq n \leq 5$. Podemos perceber que existe uma coerência entre as funções harmonicamente relacionadas: elas preservam uma periodicidade em $T = 1$s. Isto é, para um deslocamento de $T = 1$s, as funções serão cópias de si mesma. Ainda mais, estas cópias terão um número inteiro de períodos.

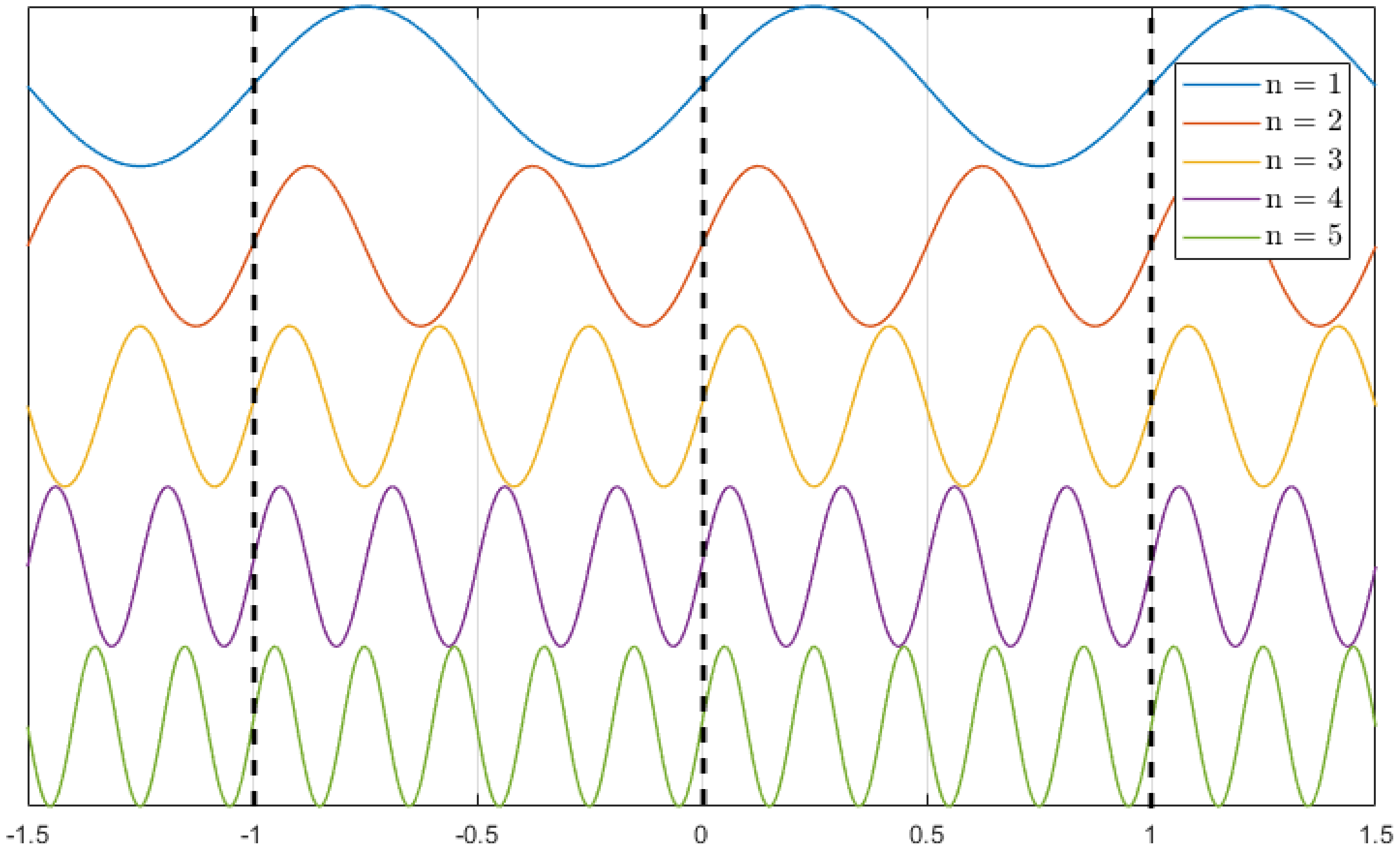


Figura 7: Gráficos das funções $f(x) = \text{sen}(2\pi nt)$, $1 \leq n \leq 5$.

Logo, funções períodicas harmonicamente relacionadas preservam o período da função correspondente a $n = 1$, que é o <u>período fundamental</u> $T_1 = T$.

Na aproximação da função $s(t)$ da Figura 5, podemos acrescentar mais um termo na função aproximadora

$$f(t) = 0.1821\,\text{sen}(2\pi t) + b_2\,\text{sen}(4\pi t)\,,$$

e sabemos que somando este termo preservamos o período de $s(t)$. O valor da amplitude b_2 é calculada usando o critério do mínimo erro quadrático médio, ou seja

$$b_2 = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} s(t)\,\text{sen}(4\pi t)\,dt.$$

A Figura 8 a seguir ilustra como a aproximação é modificada com o acréscimo do termo $b_2\,\text{sen}(4\pi t)$.

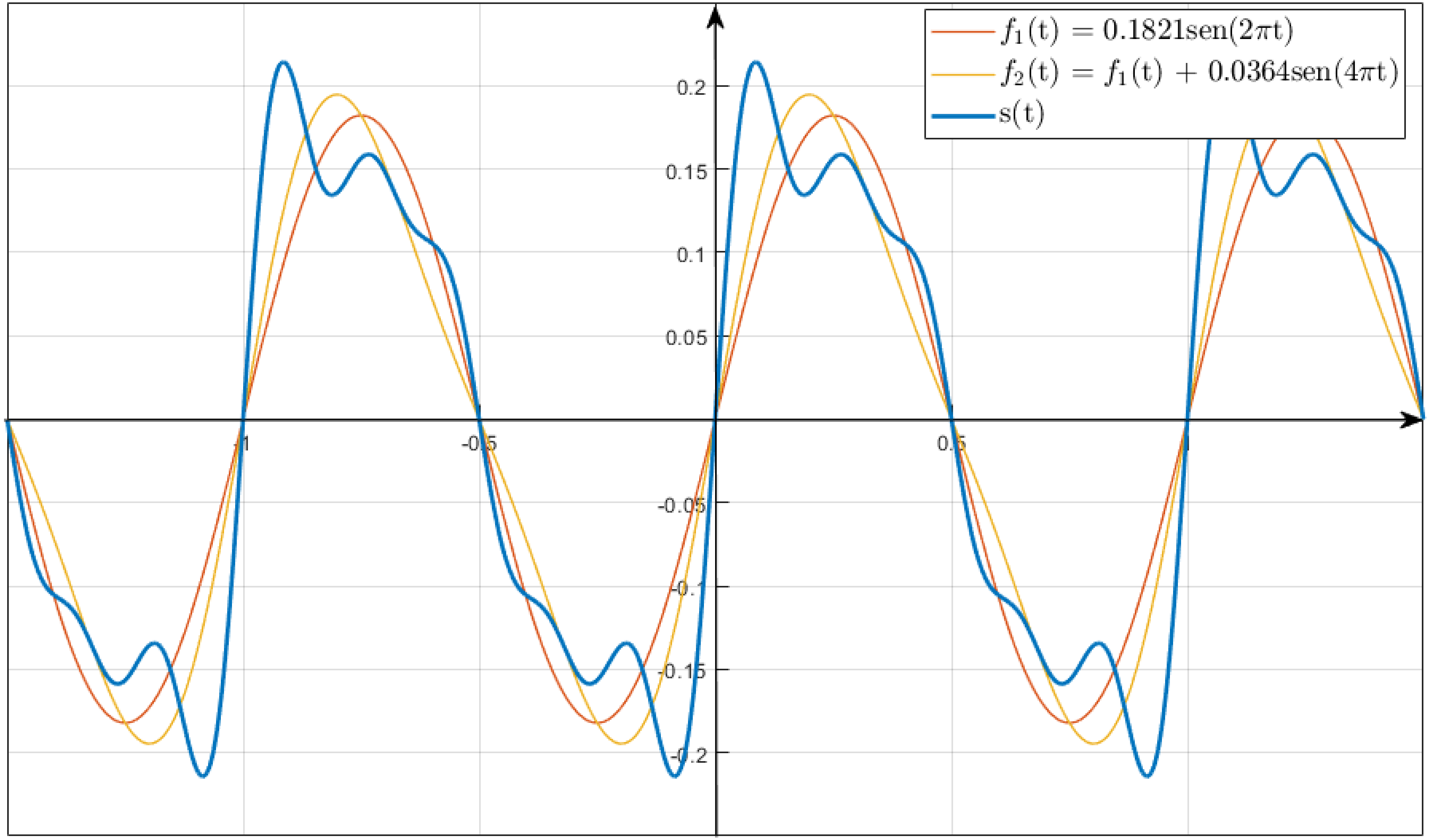


Figura 8: Função $s(t)$ da Figura 4 junto com as aproximações utilizando termos com aprimeira, segunda e terceira harmônicas.

Temos a impressão que a aproximação é melhor utilizando dois senos harmonicamente relacionados, com $n = 1{,}2$. De fato, o erro quadrático médio diminui com o acréscimo de $b_2 \operatorname{sen}(4\pi t)$:

Aproximação	$f_1(t) = b_1 \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{t})$	$f_2(t) = f_1(t) + b_1 \operatorname{sen}(2\pi \mathrm{t})$
Erro quadrático médio	0.002847	0.002185

Intuitivamente, podemos ir acrescentando mais senos e calcular os coeficientes como para valores maiores de n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} s(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt\,,$$

com $T = 1\text{s}$. A figura 9 a seguir ilustra várias aproximações com acréscimos de senos harmônicos até $n = 5$, e uma tabela com os valores do erro quadrático médio (Eqm).

	Eqm
$f_1(t)$	0.002847
$f_2(t)$	0.002185
$f_3(t)$	$7{,}9392.10^{-4}$
$f_4(t)$	$3{,}7029.10^{-4}$
$f_5(t)$	0

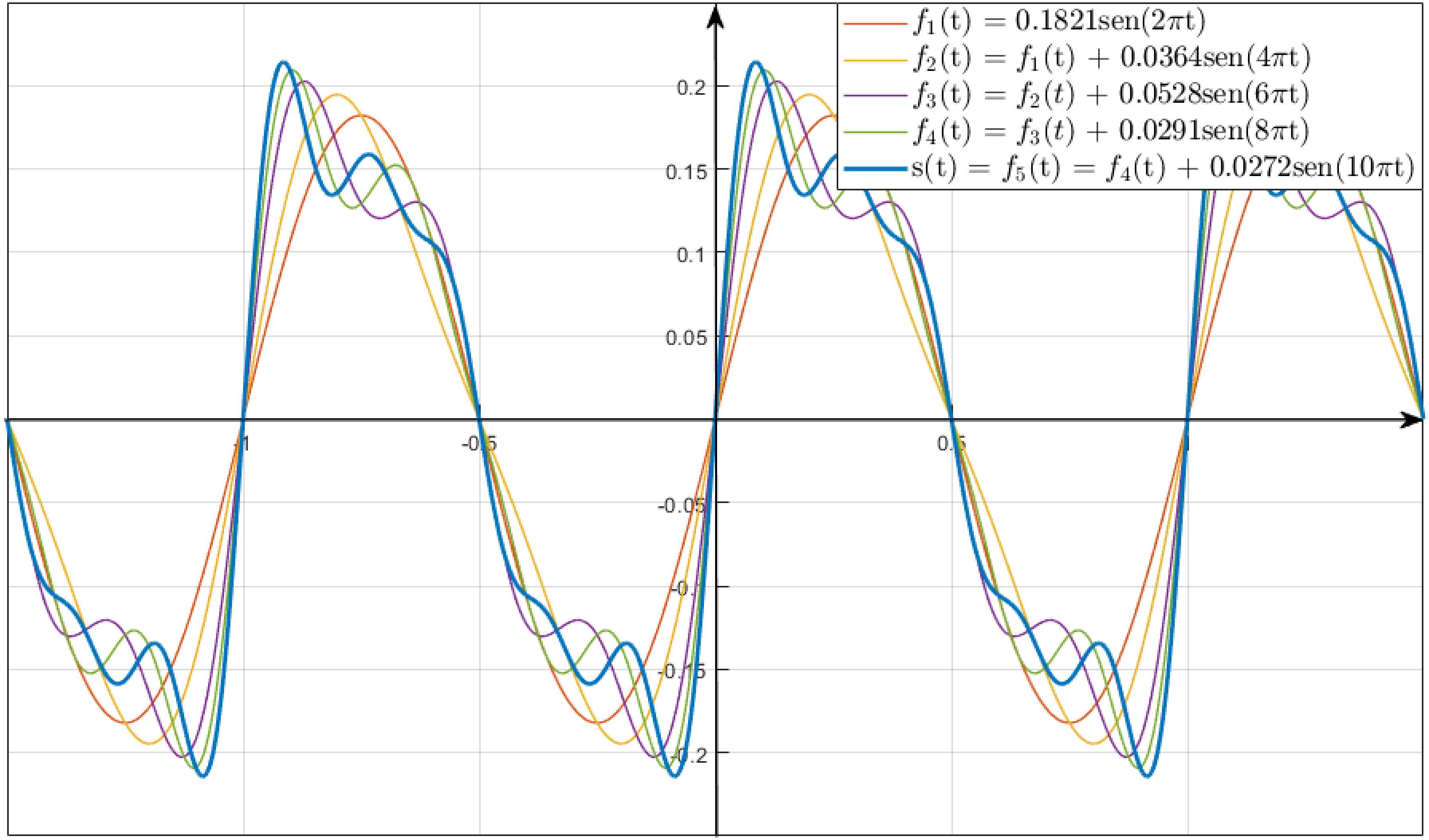


Figura 9: Função $s(t)$ da Figura 4 junto com as aproximações utilizando termos com a primeira, segunda e terceira harmônicas.

Segundo a Figura 9 anterior, para $n = 5$ a função aproximadora iguala o sinal $s(t)$ e o erro quadrático se anula; isto acontece porque a expressão de $s(t)$ é justamente

$$s(t) = 0.1821\,\mathrm{sen}(2\pi t) + 0.0364\,\mathrm{sen}(4\pi t) + 0.0528\,\mathrm{sen}(6\pi t) + 0.0291\,\mathrm{sen}(8\pi t) + 0.0272\,\mathrm{sen}(10\pi t)\,.$$

Dessa forma, aplicando o método para calcular as amplitudes b_n, encontramos exatamente os valores do sinal original.

E se quisermos acrescentar mais harmônicas senoidais além de $n = 5$? Segundo o critério do mínimo erro quadrático médio, a expressão

$$b_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} s(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt\,,$$

para $s(t)$ como dado acima, será nula para $n > 5$, isto é,

$$b_n = 0, n > 5.$$

Uma ultima questão: E se tentássemos aproximar $s(t)$ por cossenos da forma

$$a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), n \geq 1\,,$$

utilizando o método do mínimo erro quadrático médio? A resposta é que os coeficientes a_n seriam todos nulos; ou seja, a expressão

$$a_n = \frac{2}{T}\int_t^{t+T} s(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt\,,$$

será nula para todo $n \geq 1$.

A intuição disso para o caso $n = 1$ pode ser vista na Figura 10 a seguir, onde temos o sinal $s(t)$ e um cosseno de mesmo período e com amplitude igual a b_1. Repare como há pouquíssima correlação entre os pontos dos dois gráficos para um mesmo valor de t.

Podemos exterder este argumento para outros cossenos harmonicamente relacionados: eles terão pouca correlação com um sinal que é composto por soma de termos do tipo

$$b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).$$

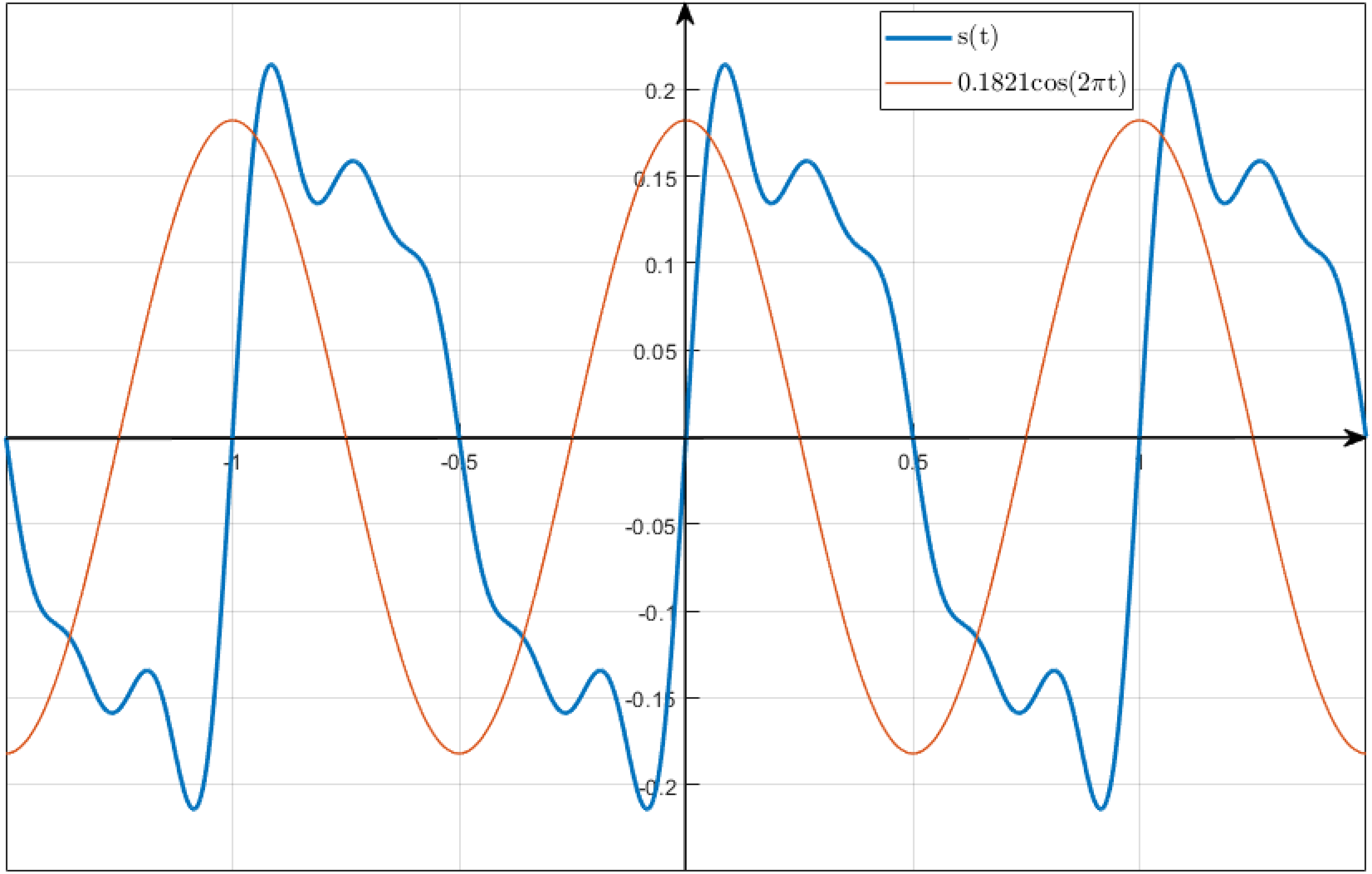


Figura 10: Função $s(t)$ e um cosseno com mesmo período $T = 1$s e com amplitude igual a b_1.

Exercício: com o que vimos até aqui, dado o seguinte sinal

$$r(t) = 0.5\sin(4\pi t) + 0.3\cos(8\pi t) + 0.15\cos(12\pi t) + 0.25\sin(16\pi t) + 0.07\cos(20\pi t)$$

determine o período fundamental T de $r(t)$ e os coeficientes a_n e b_n para $n \geq 1$.

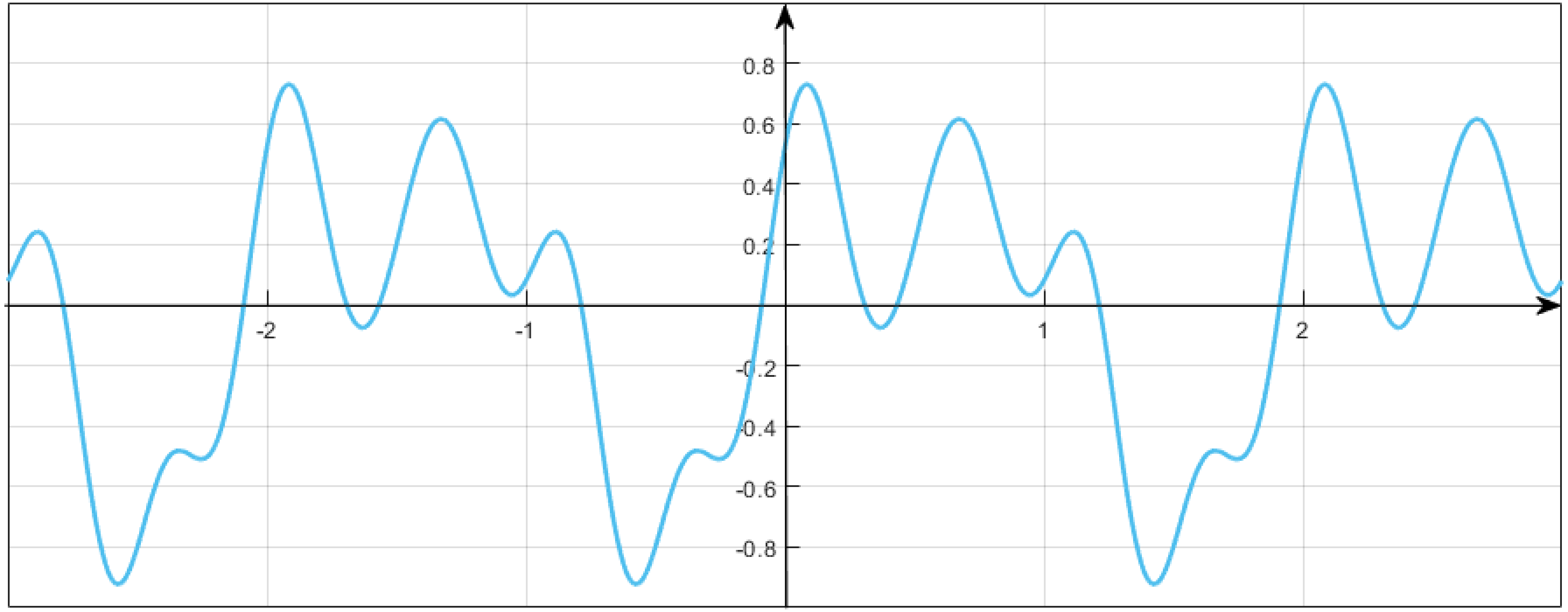


Figura 11: Sinal $r(t)$

3.4 Conclusões até aqui...

Propomos a criação de um método para aproximar sinais períodicos "em torno de seu período", utilizando o critéiro do mínimo erro quadrático médio para escolher as amplitudes.

Além disso, aumentando o número de termos aproximadores, conseguimos melhorar a aproximação, ou mesmo igualar no caso que o sinal seja uma soma de termos senoidais (ou cossenoidais).

Lembrando que isso este procedimento foi inspirado no polinômio de Taylor e sua aproximação em torno de um ponto.

Dessa forma, podemos aproximar um sinal períodico por uma soma de senos e cossenos harmonicamente relacionados

$$s(t) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right),$$

e essa aproximação pode ser melhor aumentando o número N de termos de senos e cossenos.

Uma questão importante é: e se $s(t)$ tiver valor médio em um período diferente de zero? Esta pergunta é relevante, pois uma soma de senos e cossenos sempre vai ter valor médio nulo em um período. Solucionamos isso acresentando na aproximação um termo constante

$$s(t) \approx c + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right),$$

Este termo deve ser igual ao valor médio do sinal $s(t)$, logo

$$c = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} s(t)dt\,.$$

Acontece que esta expressão pode ser pensada como sendo o cálculo de a_n para $n = 0$ e dividida por 2:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t}^{t+T} s(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt \rightarrow a_0 = \frac{2}{T}\int_{t}^{t+T} s(t)dt = 2c$$

$$\rightarrow c = \frac{a_0}{2}.$$

Assim, temos

$$s(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right).$$

3.5 O exemplo mais célebre: a onda quadrada

Com esta nova ferramenta para aproximar sinais periódicos, devemos tentar testá-la com sinais mais gerais do que somas de senos e cossenos. O mais famoso exemplo é a onda quadrada.

No intervalo $[0,1]$, temos

$$q(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \end{cases}$$

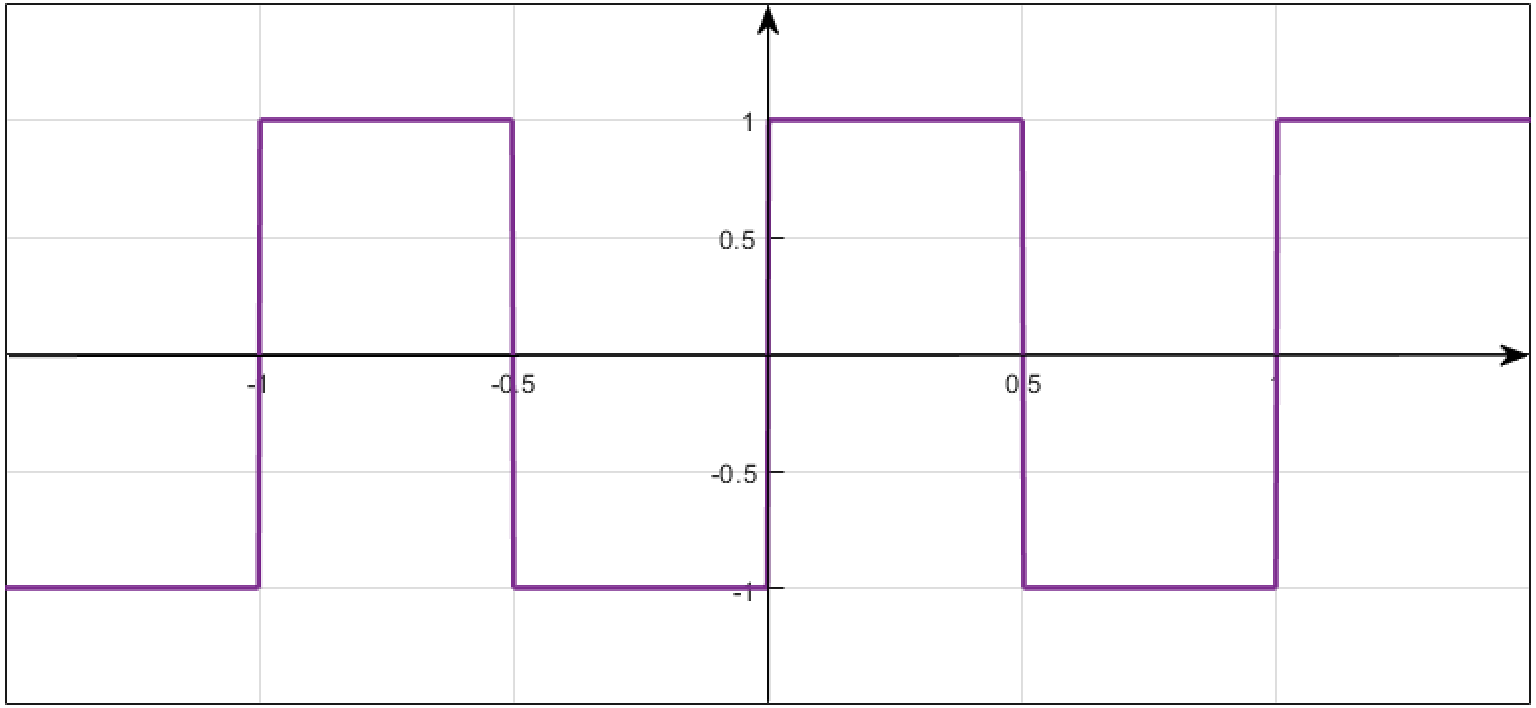


Figura 12: Onda quadrada $q(t)$ de período $T = 1$s

Desenvolvendo as expressões para os coeficientes a_0, a_n e b_n, temos

$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0, \forall n \geq 1$$
$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

Os gráficos da figura seguinte mostram a aproximação para $n = 1,10,20$ e 40. É possível perceber visualmente que maiores valores de n melhoram a aproximação para uma onda quadrada, como esperávamos.

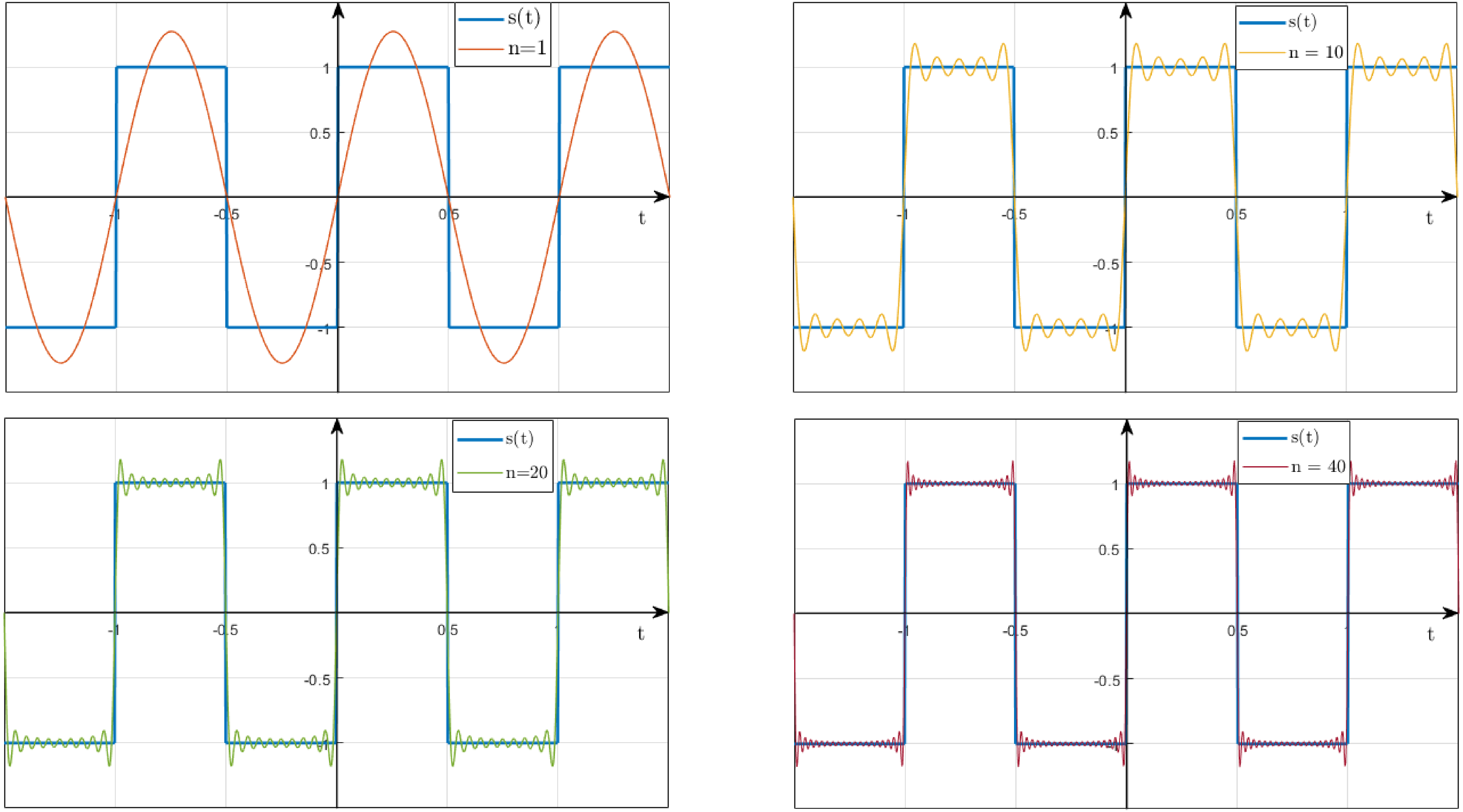


Figura 13: Aproximações para a onda quadrada, para $n = 1{,}10{,}20$ e 40.

3.6 A Série de Fourier: o retorno

Da mesma maneira que fizemos com o polinômio de Taylor, fica a pergunta: e se fizermos n se tornar tão grande quanto se queira. Ou, rigorosamente, para $n \to \infty$, conseguimos algo como a Série de Taylor?

A resposta é sim, e assim surge a Série de Fourier

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right),$$

que vimos no início deste tutorial. Assim como a Série de Taylor, prova-se que uma função períodica e “bem comportada” $s(t)$ tem representação em série de Fourier dada acima, ou seja,

$$s(t) = S(t).$$

Mas o que é ser “bem comportada”? A onda quadrada $q(t)$ que vimos no exemplo tem representação por série de Fourier dada por

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}(2\pi n t)\,.$$

Será que $q(t)$ pode ser considerada comportada o suficiente para afirmamos que $q(t) = S(t)$ para todo t? A onda quadrada apenas assumes os valores 1 e -1, mas

$$S(0.5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}(\pi n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Ou seja, a série assume um valor diferente $q(t)$ para $t = 0.5$s. Isso ocorre devido a descontinuidade da onda quadrada em torno de $t = 0.5$s.

3.7 Outras formas de representar a Série de Fourier

Vimos no começo deste tutorial uma outra forma de represetação da Série, dada por

$$s(t) = A_0 + \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \phi_n\right),$$

com A_0, A_n e ϕ_n coeficientes reais e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Esta representação é equivalente à que temos trabalhado até aqui, com a seguinte relação entre os coeficientes

$$A_0 = \frac{a_o}{2}, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\; e\; \phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right).$$

Este formato da série de Fourier é útil em engenharia elétrica, pois trabalha com amplitudes e fases de cossenóides, o que torna fácil sua descrição em termos de fasores[1].

Se quisermos retornar desta segunda representação para a primeira, a relação é dada por

$$a_0 = 2A_0, a_n = A_n \cos(\phi_n) \text{ e } b_n = A_n \operatorname{sen}(\phi_n)\,.$$

[1]*Se você ainda não sabe o que é um fasor, não se preocupe, eles ainda serão parte da sua graduação.*

Existe uma terceira representação da série de Fourier, que é dominante na área de Processamento de Sinais, que é

$$\boldsymbol{S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\frac{2\pi n t}{T}}},$$

com coeficientes c_n complexos. A relação entre esta representação e a primeira é dada por

$$\boldsymbol{c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = a_n + j b_n}.$$

Esta é a represetação complexa da Série de Fourier: tem várias facilidades e permite intuições mais profundas de seu significado.