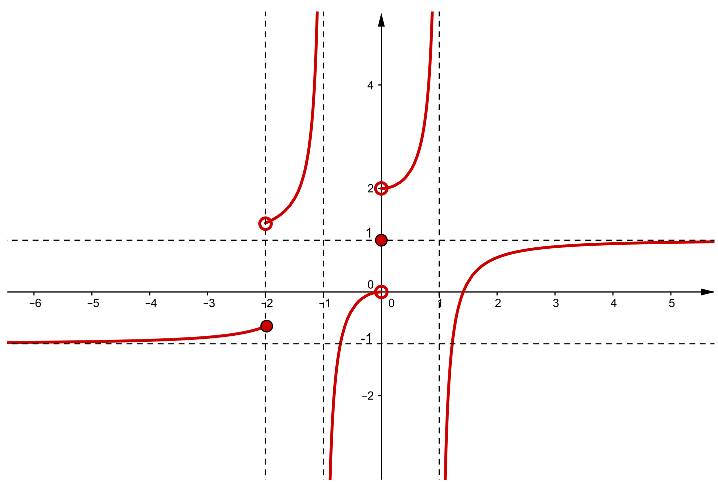
MAT-0141 – FAU – Prova Substitutiva – 2023 – Solução

1. Para a função $f(x)$ (com $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$), cujo gráfico é dado abaixo, determine os seguintes limites, se existirem. Se não existirem, explique por quê. Em seguida responda, justificando, ao que se pede:



1. $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
6. $f(x)$ possui assíntotas? Quais?
7. Em quais pontos de $\mathrm{Dom}(f)$ a função é contínua?

. . . .

Solução: Esta é uma questão conceitual, na qual espera-se que seja entendido o gráfico de uma função.

1. O limite $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ não existe porque os limites laterais são distintos, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$.

. . . .

2 e 3. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$.

. . . .

4 e 5. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

. . . .

6. O gráfico de $f(x)$ possui assíntotas verticais, as retas $x = -1$ e $x = 1$, e horizontais, as retas $y = 1$ (para $x \to +\infty$), e $y = -1$ (para $x \to -\infty$).

. . . .

7. A função f é contínua em $a \in \mathrm{Dom}(f)$ se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, o que não acontece nos pontos $x = -2$ e $x = 0$. Daí, f é contínua em todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, tais que $x \neq -2$ e $x \neq 0$.

---

2. Calcule os limites abaixo, se existirem:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{4x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 3}$

. . . .

Solução: A melhor maneira de resolver o **item 1** é o uso da Regra de L'Hospital. A primeira aplicação dessa regra ainda não elimina a indeterminação, mas na segunda vez ela resolve:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

. . . .

O **item 2** pode ser resolvido de duas maneiras: ou pela Regra de L'Hospital (uma aplicação dela já basta), ou por fatoração e simplificação.

<u>Solução com a Regra de L'Hospital</u>:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{8x - 8}{2x - 4} = 0$$

<u>Solução com fatoração</u>:

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2 - 8x + 4}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)^2}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)}{x-3} = 0$$

---

3. Calcule as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)^{30}$

2. $f(x) = \operatorname{sen}(2x^3 + x^2)$

. . . .

Solução: As duas derivadas requerem a aplicação da Regra da Cadeia.

Item 1. Aqui a função f tem a forma $f(x) = [g(x)]^{30}$, com $g(x) = x/(x^2+2)$, e sua derivada será $f'(x) = 30[g(x)]^{29}g'(x)$, e o cálculo de $g'(x)$ usa a regra do quociente. Daí,

$$f(x) = 30\left[\frac{x}{x^2+2}\right]^{29}\left(\frac{(x^2+2) - x(2x)}{(x^2+2)^2}\right) = 30\left[\frac{x}{x^2+2}\right]^{29}\left(\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}\right)$$

. . . .

Item 2. Aqui temos $f(x) = \operatorname{sen}[g(x)]$, com $g(x) = 2x^3 + x^2$, e sua derivada será $f'(x) = \cos[g(x)]g'(x)$, ou seja

$$f'(x) = [\cos(2x^3 + x^2)](6x^2 + 2x).$$

---

4. Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x \ln x$ em $x = 1$ e em $x = 5$.

. . . .

Solução: A equação da reta tangente ao gráfico de f em x_0 é $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Para isso, precisamos calcular a derivada de $f(x) = x \ln x$, que usa a regra da derivada de um produto de duas funções.

$$f'(x) = (\ln x) + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

. . . .

Em $\boldsymbol{x_0 = 1}$ a equação é $y - \ln 1 = (1 + \ln 1)(x - 1)$ e, se você se lembrar que $\ln 1 = 0$, a equação fica assim: $y = x - 1$.

....

Em $\boldsymbol{x = 5}$ a equação é $y - \ln 5 = (1 + \ln 5)(x - 5)$, ou, se quiser isolar o y, $y = (1 + \ln 5)x - 5 - 4\ln 5$.

---

5. Dada a função $f(x) = x^2\, e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, determine:

(a) os intervalos de crescimento e decrescimento de f;
(b) os intervalos de concavidade de f;
(c) pontos de máximo e de mínimo locais, e pontos de inflexão (se existirem);
(d) as assíntotas de f.

....

Solução: Para os três primeiros itens, precisamos da derivadas de $f(x)$, que usa a regra do produto, $f(x) = g(x)h(x)$, onde $g(x) = x^2$ e $h(x) = e^{-x}$, com $h'(x) = -e^{-x}$:

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}; \quad f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

....

Item (a). Os intervalos de crescimento e decrescimento de f são dados pelos sinais de $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, que depende apenas do fator $(2x - x^2)$ (cujas raízes são $x = 0$ e $x = 2$), pois $e^{-x} > 0$ sempre: daí,

- se $x < 0$, então $f'(x) < 0$ (f decrescente);
- se $0 < x < 2$, então $f'(x) > 0$ (f crescente);
- se $x > 2$, então $f'(x) < 0$ (f decrescente).

....

Item (b). Os intervalos de concavidade para cima e para baixo do gráfico de f são determinados pelos sinais de $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$, os quais dependem apenas dos sinais do termo $(x^2 - 4x + 2)$ (cujas raízes são $x = -2 - \sqrt{2}$ e $x = -2 + \sqrt{2}$):

- se $x < 2 - \sqrt{2}$, então $f''(x) > 0$ (concavidade para cima: $\smile$);
- se $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$, então $f''(x) < 0$ (concavidade para baixo: $\frown$);
- se $x > 2 + \sqrt{2}$, então $f''(x) > 0$ (concavidade para cima: $\smile$).

. . . .

Item (c). Os pontos críticos (máximo e mínimo locais) são aqueles em que $f'(x) = 0$ e $f'(x)$ muda de sinal: $x = 0$ é ponto de mínimo local, e $x = 2$ é ponto de máximo local.

Os pontos de inflexão são aqueles em que $f''(x) = 0$ e e concavidade muda: $x = 2 - \sqrt{2}$ e $x = 2 + \sqrt{2}$ são pontos de inflexão.

. . . .

Item (d). Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, o gráfico de f não possui assíntotas verticais.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \cdots = 0$ (use a Regra de L'Hospital duas vezes), o gráfico de f possui a reta $y = 0$ como assíntota horizontal (para $x \to +\infty$). Por isso, f não tem assíntota inclinada para $x \to +\infty$.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, f não possui (outra) assíntota horizontal, para $x \to -\infty$.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, f não possui assíntota inclinada (para $x \to -\infty$).
