

Energia, potência e fator de potência

Aspectos e detalhamento

Eletrotécnica Geral

7 de Julho de 2021

Depto. de Engenharia de Energia e Automação Elétricas

Escola Politécnica da USP

Introdução

Sinais senoidais e funções complexas - fórmula de Euler

- Sinais senoidais são descritos no tempo, conforme a equação a seguir:

$$x(t) = X_{max} \cos(\omega t + \theta)$$

- Esses sinais podem ser representados pela parte real de funções complexas, descritas conforme a Fórmula de Euler:

$$X_{max} \cdot e^{j(\omega t + \theta)} = X_{max} \cdot \{\cos(\omega t + \theta) + j \cdot \sin(\omega t + \theta)\}, \quad \text{onde } j = \sqrt{-1}$$

- Portanto:

$$x(t) = \Re \{X_{max} \cdot e^{j(\omega t + \theta)}\} = X_{max} \cos(\omega t + \theta)$$

Charles Steinmetz e a representação fasorial de sinais senoidais

- A representação fasorial de sinais senoidais considera que esses se repetem a cada período;
- Sendo assim, pode-se escrever o sinal $x(t)$ da seguinte maneira:

$$x(t) = \Re \{ X_{max} \cdot e^{j(\omega t + \theta)} \} = \Re \left\{ \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \underbrace{\frac{X_{max}}{\sqrt{2}}}_{X=X_{ef}} \cdot e^{j\theta} \right\}$$

- Onde:

$\sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} \rightarrow$ é um sinal periódico;

$\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \rightarrow$ é denominado valor eficaz do sinal $x(t)$; e

$\frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\theta} \rightarrow$ é o fasor do sinal $x(t)$ (é um número complexo).

Representação fasorial

Representação fasorial de tensões e correntes

- A representação fasorial de tensões e correntes senoidais considera que esses se repetem a cada período, com a mesma frequência angular ω . Sendo assim, pode-se escrever tensões e correntes conforme a seguir:

$$v(t) = V_{max} \cos(\omega t + \theta) \quad \text{e} \quad i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \delta)$$

- Representação por vetores girantes:

$$v(t) = \Re[V_{max} e^{j\theta} e^{j\omega t}] \quad \text{e} \quad i(t) = \Re[I_{max} e^{j\delta} e^{j\omega t}]$$

- Representação por fasores:

$$\dot{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{max} e^{j\theta} = V e^{j\theta} \quad \text{e} \quad \dot{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{max} e^{j\delta} = I e^{j\delta}$$

Representação gráfica de sinais senoidais – vetores girantes

Representação gráfica de sinais senoidais – referência de fase e fasores

Potência

Potência instantânea em circuitos de corrente alternada

- Potência elétrica instantânea é o resultado do produto da tensão instantânea pela corrente instantânea. Sendo assim:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

- Onde:

$$\begin{cases} v(t) = V_{max} \cos(\omega t + \theta) \\ i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \delta) = I_{max} \cos(\omega t + \theta - \phi) \end{cases}$$

- E:

$\phi = \theta - \delta \rightarrow$ defasagem entre o sinal de tensão e o sinal de corrente

Potência instantânea em circuitos de corrente alternada

- Reescrevendo a equação de potência instantânea, considerando as identidades trigonométricas a seguir:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \end{cases}$$

- Tem-se:

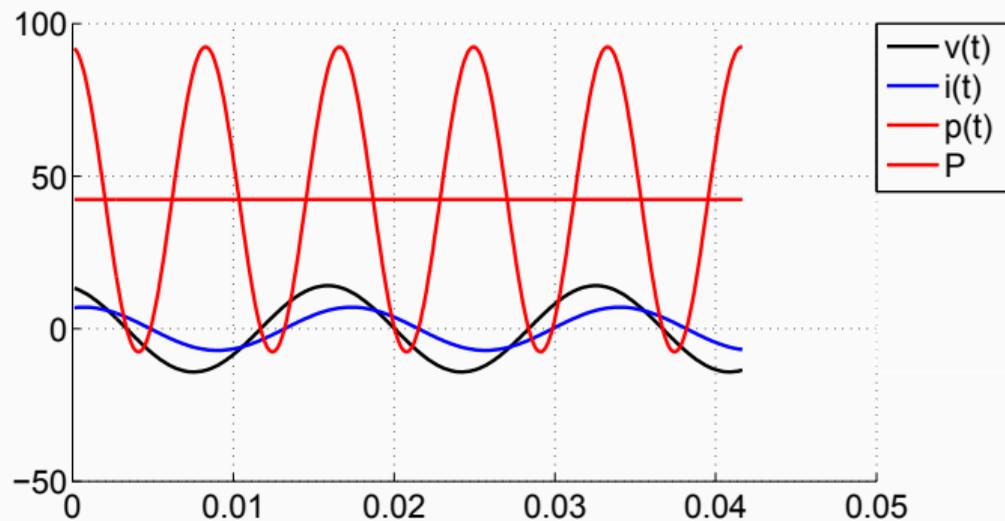
$$p(t) = V_{max} \cos(\omega t + \theta) \cdot I_{max} \cos(\omega t + \theta - \phi) = \frac{V_{max} \cdot I_{max}}{2} \{ \cos(2\omega t + 2\theta - \phi) + \cos \phi \}$$

- E:

$$p(t) = \underbrace{V \cdot I \cos \phi}_P + \underbrace{V \cdot I \cos(2\omega t + 2\theta - \phi)}_{media=0}$$

Representação gráfica da potência instantânea

- A figura ilustra a potência instantânea:



Potência instantânea em circuitos de corrente alternada – outra forma de equacionamento

- Outra forma de equacionamento considera:

$$p(t) = V_{max} \cos(\omega t + \theta) I_{max} \cos(\omega t + \theta - \phi)$$

- E:

$$p(t) = V_{max} \cos(\omega t + \theta) I_{max} \{ \cos(\omega t + \theta) \cos \phi + \sin(\omega t + \theta) \sin \phi \}$$

- Que pode ser reescrita como:

$$p(t) = V_{max} I_{max} \{ \cos \phi \cdot \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \theta) \} + \\ + V_{max} I_{max} \{ \sin \phi \cdot \sin(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \theta) \}$$

Potência instantânea em circuitos de corrente alternada – outra forma de equacionamento

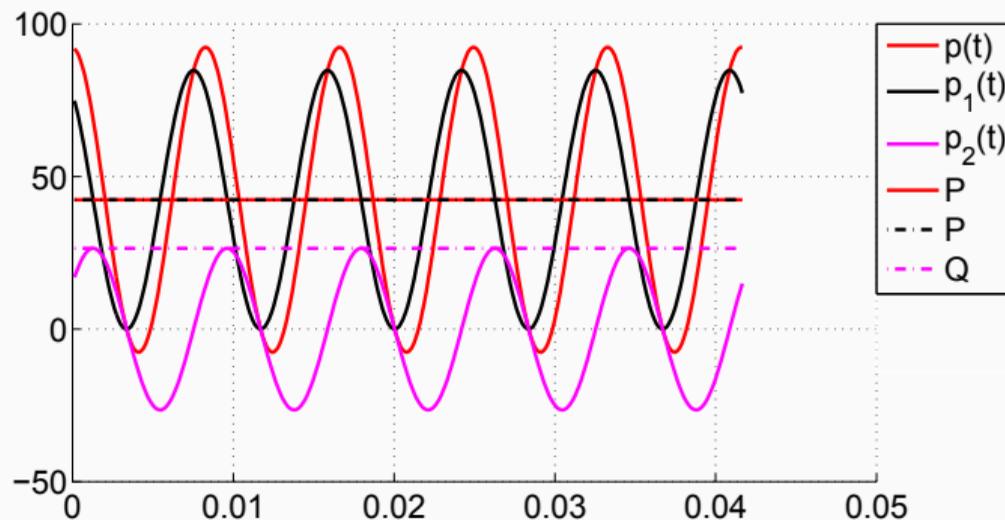
- Reescrevendo a equação que define a potência instantânea, tem-se:

$$p(t) = \frac{V_{max}I_{max}}{2} \{ \cos \phi \cdot \{ \cos (2\omega t + 2\theta) + \cos 0 \} \} + \\ + \frac{V_{max}I_{max}}{2} \{ \sin \phi \cdot \{ \sin (2\omega t + 2\theta) + \sin 0 \} \}$$

$$p(t) = \underbrace{\frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \phi \cdot \underbrace{[\cos (2\omega t + 2\theta) + 1]}_{\text{média} = 1} \right\}}_{p_1(t)} + \underbrace{\frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \left\{ \sin \phi \cdot \underbrace{[\sin (2\omega t + 2\theta)]}_{\text{média} = 0} \right\}}_{p_2(t)}$$

Potência instantânea em circuitos de corrente alternada – outra forma de equacionamento

- A representação gráfica desses sinais fica:



Casos particulares de potência circuitos monofásicos de corrente alternada

- Bipolos passivos possuem comportamentos diferentes no que se refere à potência instantânea consumida. São eles:

- Capacitor ideal: $\phi = -90^\circ$

$$p(t) = -V \cdot I \cdot \sin(2\omega t + 2\theta)$$

- Indutor ideal: $\phi = +90^\circ$

$$p(t) = +V \cdot I \cdot \sin(2\omega t + 2\theta)$$

- Resistor ideal: $\phi = 0^\circ$

$$p(t) = +V \cdot I \cdot \{\cos(2\omega t + 2\theta) + 1\}$$

Potências ativa, reativa, complexa e aparente

- Potência ativa P , em $[W]$, é o valor médio de $p(t)$ em um período T de observação, conforme a equação:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} p_1(t) dt = V \cdot I \cdot \cos \phi$$

- A potência reativa Q , em $[VAR]$, é o valor de pico do sinal $p_2(t)$, conforme a equação:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin \phi$$

Potências ativa, reativa, complexa e aparente

- Potência complexa \bar{S} é definida como o produto do fasor da tensão pelo complexo conjugado do fasor da corrente:

$$\bar{S} = \dot{V} \cdot \dot{I}^* = P + j \cdot Q$$

- Sendo assim, a potência aparente é o módulo da potência complexa:

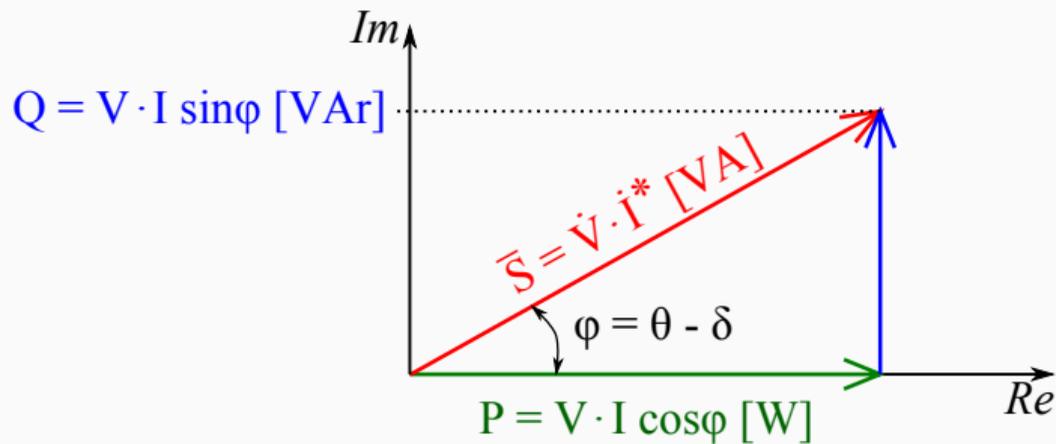
$$S = |\bar{S}| = |\dot{V}| \cdot |\dot{I}| = V \cdot I$$

- E fator de potência é:

$$\cos \phi = \frac{P}{S} = \cos(\theta - \delta)$$

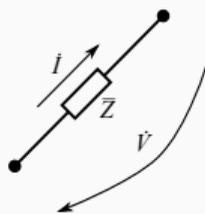
Potências ativa, reativa, complexa e aparente

- A figura ilustra o triângulo de potência em um sistema monofásico.



Potência em bipolos elétricos passivos

- O bipolo elétrico passivo ilustrado na figura é representado por sua impedância $\bar{Z} = R + j \cdot X$, em $[\Omega]$:



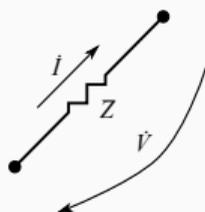
- Onde: $\dot{V} = \bar{Z} \cdot i$ e $i = \frac{\dot{V}}{\bar{Z}}$

- Portanto:

$$\bar{S} = \dot{V} \cdot i^* = \frac{\dot{V} \cdot \dot{V}^*}{\bar{Z}^*} = \frac{|\dot{V}|^2}{\bar{Z}^*} \quad \text{e} \quad \bar{S} = \dot{V} \cdot i^* = i \cdot i^* \cdot \bar{Z} = |i|^2 \cdot \bar{Z}$$

Potência no resistor

- O resistor ilustrado na figura é representado por sua impedância $\bar{Z} = R$, em $[\Omega]$:



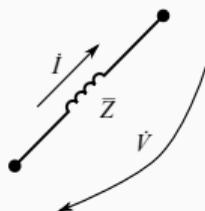
- Onde: $\dot{V} = R \cdot \dot{i}$ e $\dot{i} = \frac{\dot{V}}{R}$

- Portanto:

$$\bar{S} = \dot{V} \cdot \dot{i}^* = \frac{\dot{V} \cdot \dot{V}^*}{R} = \frac{|\dot{V}|^2}{R} \quad \text{e} \quad \bar{S} = \dot{i} \cdot \dot{i}^* \cdot R = |\dot{i}|^2 \cdot R$$

Potência no indutor

- O indutor ilustrado na figura é representado por sua impedância $\bar{Z} = j \cdot \omega L$, em $[\Omega]$:



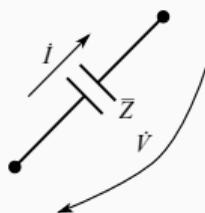
- Onde: $\dot{V} = j \cdot \omega L \cdot \dot{i}$ e $\dot{i} = \frac{\dot{V}}{j \cdot \omega L}$

- Portanto:

$$\bar{S} = \dot{V} \cdot \dot{i}^* = \frac{\dot{V} \cdot \dot{V}^*}{\{j \cdot \omega L\}^*} = \frac{|\dot{V}|^2}{-j \cdot \omega L} \quad \text{e} \quad \bar{S} = \dot{i} \cdot \dot{i}^* \cdot j \cdot \omega L = |\dot{i}|^2 \cdot j \cdot \omega L$$

Potência no capacitor

- O capacitor ilustrado na figura é representado por sua impedância $\bar{Z} = \frac{1}{j\omega C}$, em $[\Omega]$:



- Onde: $\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{i}$ e $\dot{i} = \dot{V} \cdot j \cdot \omega C$
- Portanto:

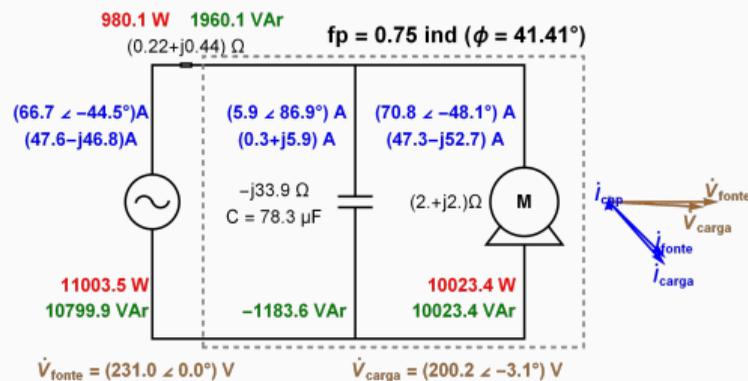
$$\bar{S} = \dot{V} \cdot \dot{i}^* = \dot{V} \cdot \left\{ \dot{V} \cdot j \cdot \omega C \right\}^* = |\dot{V}|^2 \cdot \{-j \cdot \omega C\} \quad \text{e} \quad \bar{S} = \dot{i} \cdot \dot{i}^* \cdot \frac{1}{j\omega C} = |\dot{i}|^2 \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

Potências ativa, reativa, aparente e complexa – consolidação

- Resistor ideal: $\phi = 0 \rightarrow P > 0$ e $Q = 0$, portanto absorve potência ativa apenas;
- Indutor ideal: $\phi = 90^\circ \rightarrow P = 0$ e $Q > 0$, portanto absorve potência reativa apenas;
- Capacitor ideal: $\phi = -90^\circ \rightarrow P = 0$ e $Q < 0$, portanto fornece potência reativa apenas;

Balço de potências ativas e reativas – potências fornecida e consumida

- A figura ilustra uma fonte de tensão que alimenta três cargas: uma impedância série (linha), um capacitor e um motor.

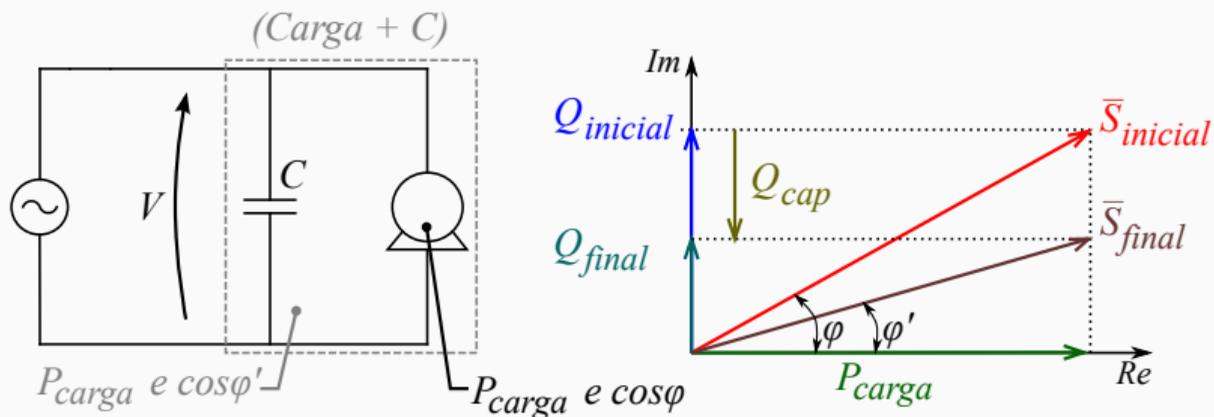


- A linha consome potência ativa igual a 980,01 [W] e o motor consome 10023,4 [W], nesse caso a fonte fornece 11003,5 [W] para ambos (idem para a potência reativa).

Correção do fator de potência

Correção do fator de potência – dimensionamento do capacitor

- A correção do fator de potência é necessária quando o fator de potência da carga (indutiva) é inferior ao recomendado pela concessionária. Nesse contexto, considere a figura:



Correção do fator de potência – situação inicial (sem capacitor para correção)

- Na situação inicial, tem-se apenas a carga que consome potência ativa P_{carga} , com fator de potência $\cos \phi$ (indutivo), quando alimentada com tensão nominal \dot{V} .
- Nesse contexto, a potência reativa consumida pela carga $Q_{inicial}$ pode ser obtida por meio da seguinte equação:

$$Q_{inicial} = V \cdot I \cdot \sin \phi = S \cdot \sin \phi$$

- Onde: $S = \frac{P_{carga}}{\cos \phi}$
- Sendo assim:

$$Q_{inicial} = \frac{P_{carga}}{\cos \phi} \cdot \sin \phi = P_{carga} \cdot \tan \phi$$

Correção do fator de potência – situação final (com capacitor para correção)

- Na situação final, tem-se o conjunto carga + capacitor, que consome potência ativa P_{carga} , com fator de potência $\cos \phi'$ (indutivo), quando alimentada com tensão nominal \dot{V} .
- Nesse contexto, a potência reativa consumida pelo conjunto Q_{final} pode ser obtida da mesma forma que foi apresentada anteriormente:

$$Q_{final} = \frac{P_{carga}}{\cos \phi'} \cdot \sin \phi' = P_{carga} \cdot \tan \phi'$$

- O capacitor que é capaz de fornecer parte da potência reativa consumida pela carga, de modo a alterar o fator de potência “visto” pela fonte, é responsável pela diferença entre Q_{final} e $Q_{inicial}$, isto é:

$$Q_{cap} = Q_{final} - Q_{inicial} = P_{carga} \cdot \tan \phi' - P_{carga} \cdot \tan \phi$$

Correção do fator de potência – cálculo da capacitância

- Para o cálculo da capacitância, deve-se utilizar a equação que descreve a potência complexa consumida pelo capacitor, isto é:

$$\bar{S} = P_{cap} + j \cdot Q_{cap} = 0 - j \cdot |\dot{V}|^2 \cdot \{\omega C\}$$

- Portanto:

$$|\dot{V}|^2 \cdot \{\omega C\} = Q_{inicial} - Q_{final} = P_{carga} \cdot \tan \phi - P_{carga} \cdot \tan \phi'$$

- E:

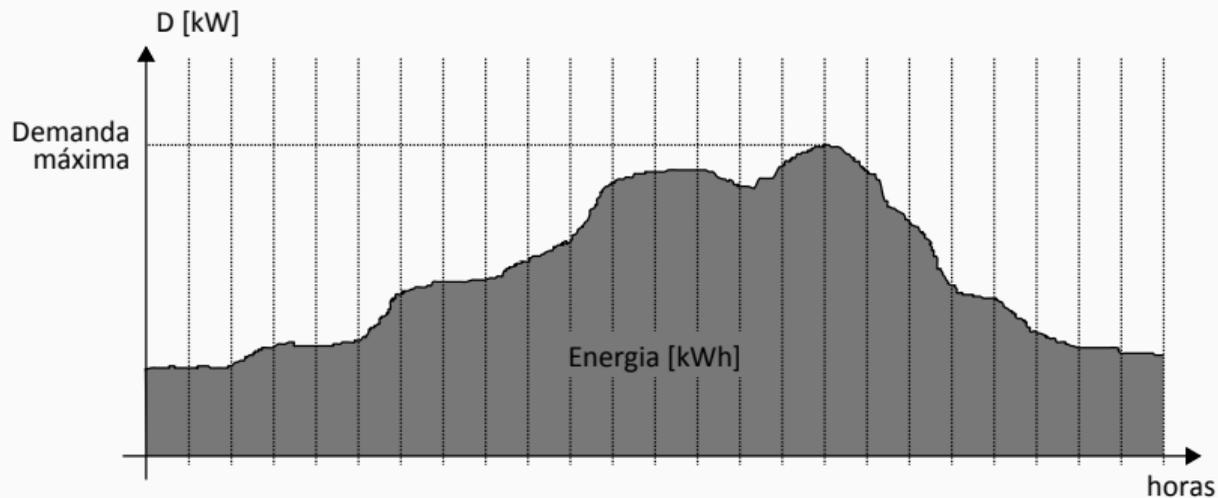
$$C = \frac{P_{carga} \cdot \tan \phi - P_{carga} \cdot \tan \phi'}{|\dot{V}|^2 \cdot \omega}$$

Correção do fator de potência

Correção do fator de potência – impacto no circuito de distribuição

Energia e tarifação

Consumo de energia e demanda de potência – disponibilidade imediata



$$\text{Fator de carga } (f_c) = \frac{\text{Demanda média}}{\text{Demanda máxima}} = \frac{\text{Energia no mês}}{(\text{Horas no mês})(\text{Demanda máxima})}$$

Tarifação de consumo e demanda

- O sistema de tarifação adotado deve contemplar os seguintes custos:
 - Operacionais: custos fixos e de combustível associados à entrega da energia contratada; e
 - De atendimento à demanda máxima: investimento em ampliação da rede.
- Para consumidores comerciais e industriais de médio e grande porte, cuja potência instalada não exceda 300 [kW], a tarifa é dividida em demanda e energia:
 - Tarifa de demanda – R\$/kW
 - Tarifa de consumo – R\$/MWh

OBRIGADO!

Este material é resultado da modernização dos materiais elaborados pelos professores do Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para as diversas disciplinas da área de Eletrotécnica Geral e foi desenvolvido pelos professores Giovanni Manassero Junior, Milana Lima dos Santos e Silvio Giuseppe Di Santo, com a coordenação do professor Hernán Prieto Schmidt.