PEF3200 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

Escola Politécnica 14/07/2023

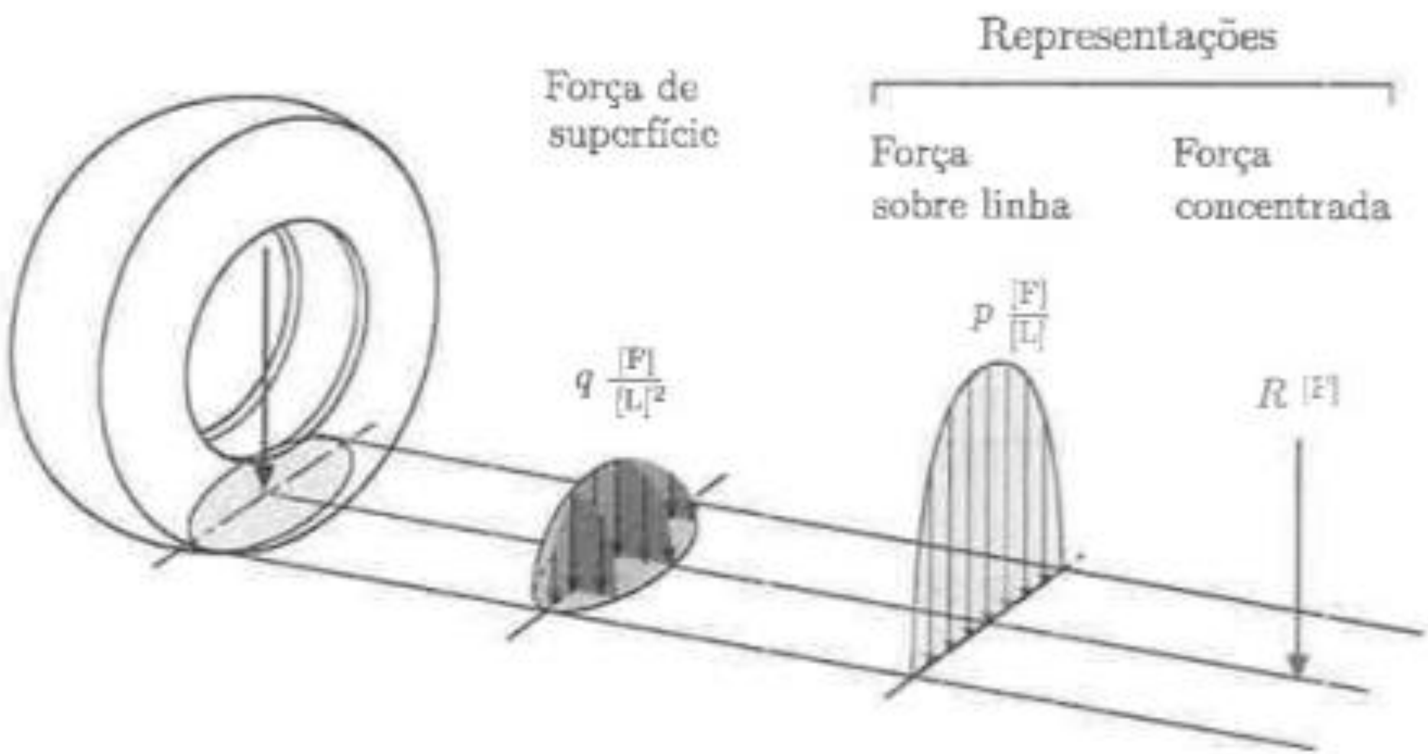
Osvaldo Nakao

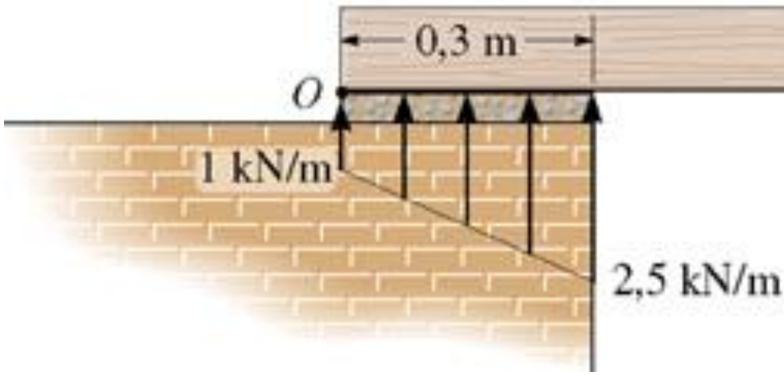
PEF3200
14 jul
PROF. NAKAO

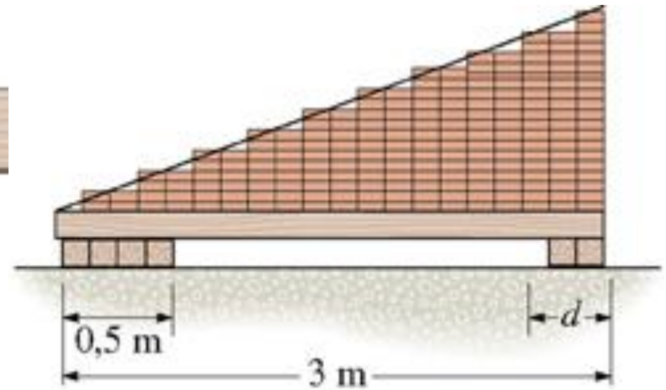
❖ **OFICINA DE EXERCÍCIOS R0**

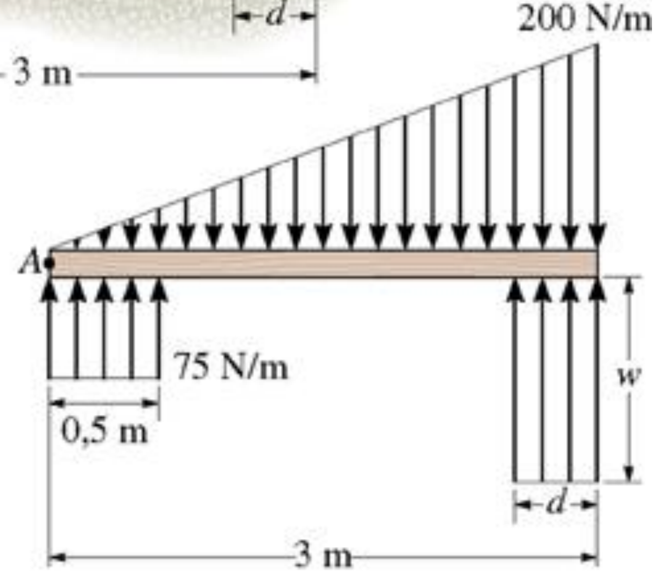
TIPOS DE FORÇAS

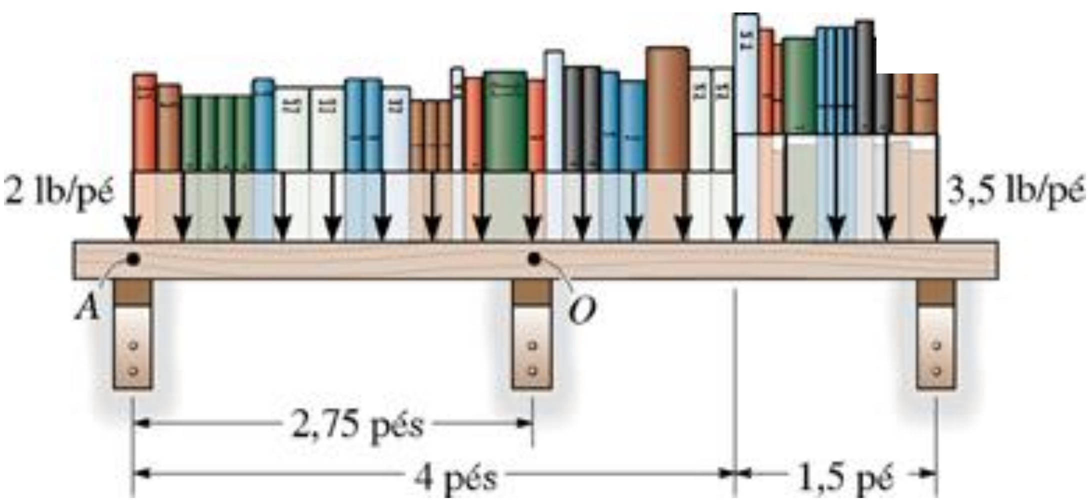
- FORÇAS DISTRIBUÍDAS DE SUPERFÍCIE
- FORÇAS DISTRIBUÍDAS DE VOLUME
- FORÇA DISTRIBUÍDA POR COMPRIMENTO
- FORÇA CONCENTRADA



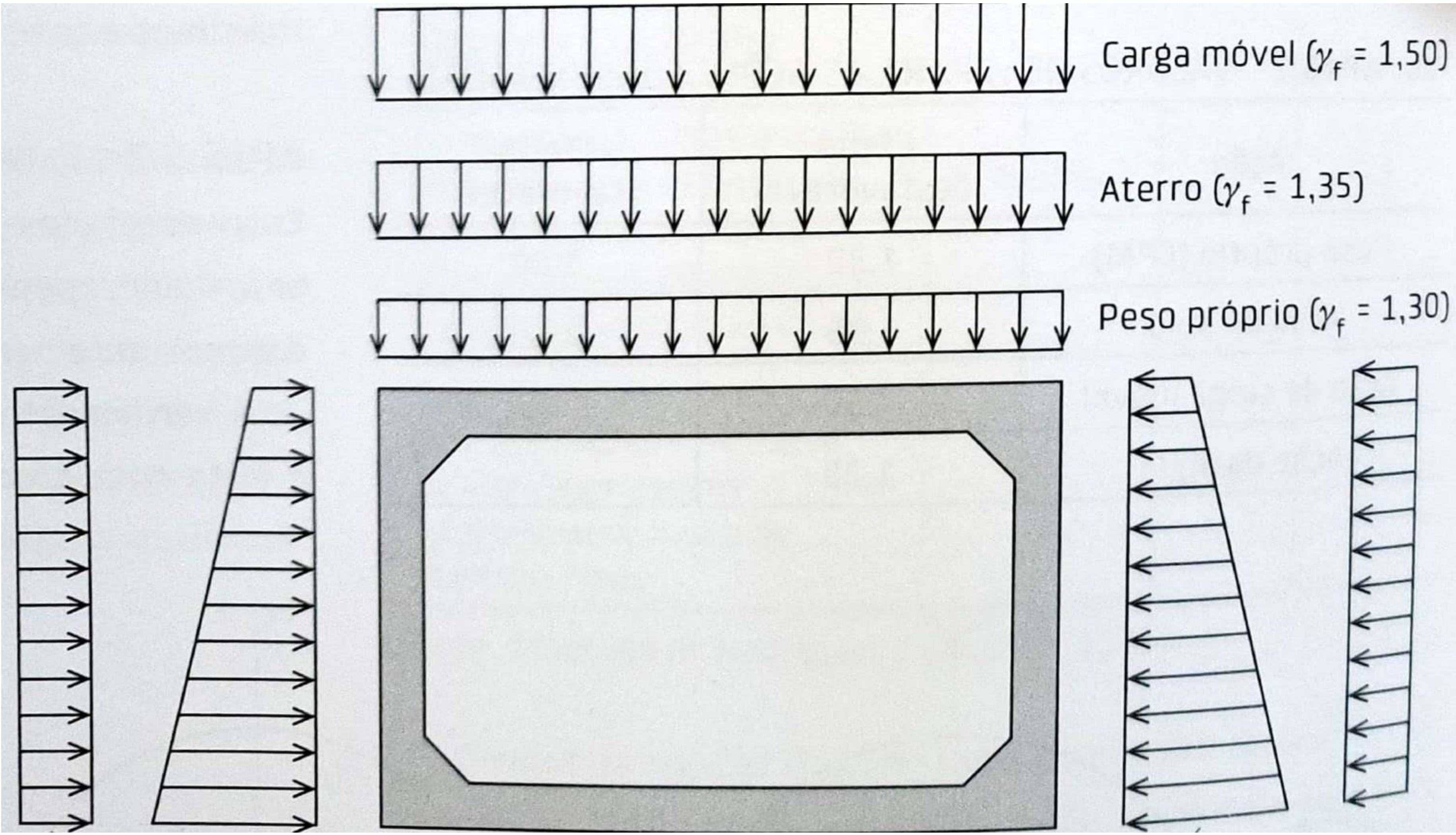

0,3 m
O
1 kN/m
2,5 kN/m

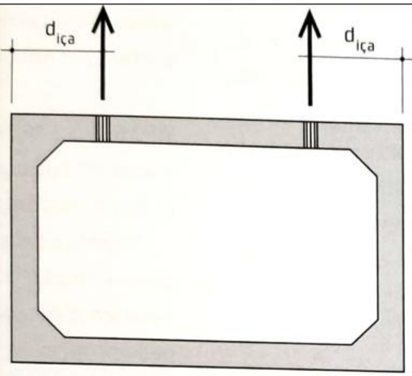

0,5 m
d
3 m


200 N/m
A
75 N/m
0,5 m
w
d
3 m

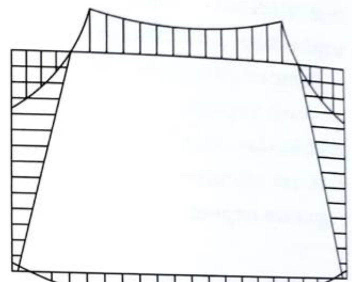

2 lb/pé
3,5 lb/pé
A
O
2,75 pés
4 pés
1,5 pé

GALERIAS ENTERRADAS

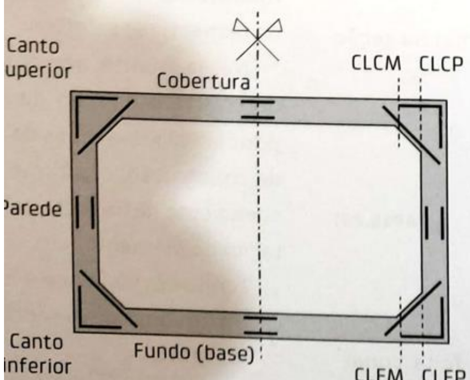




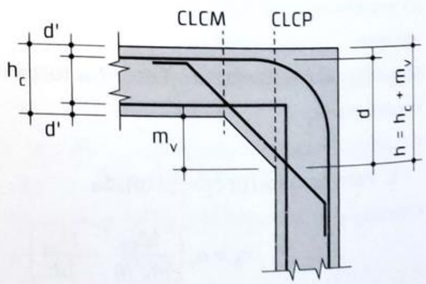
a) Esquema de levantamento



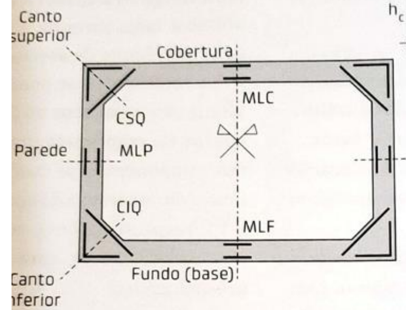
b) Diagrama de momentos fletores



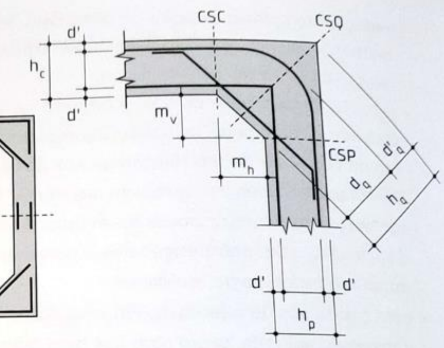
a) Posições para cálculo da armadura



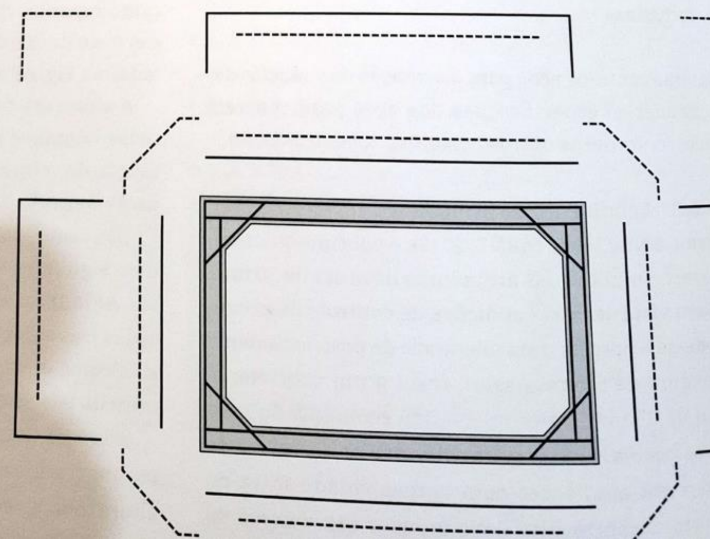
b) Detalhe da quina



a) Posições para cálculo da armadura



b) Detalhe da quina

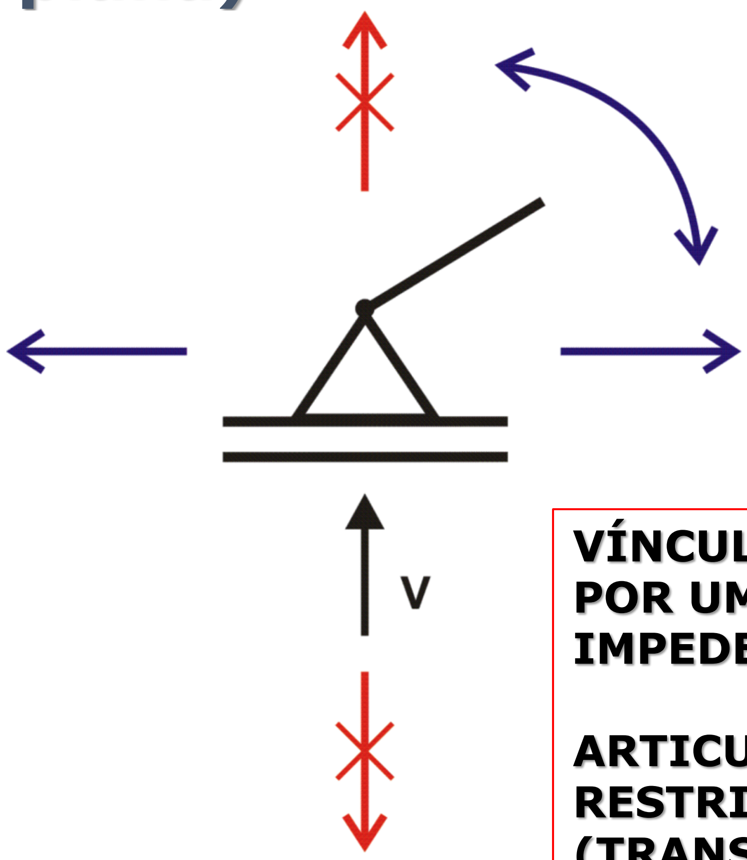


ESTÁTICA

APOIOS
Como as estruturas se apoiam?

APOIOS DE ESTRUTURAS

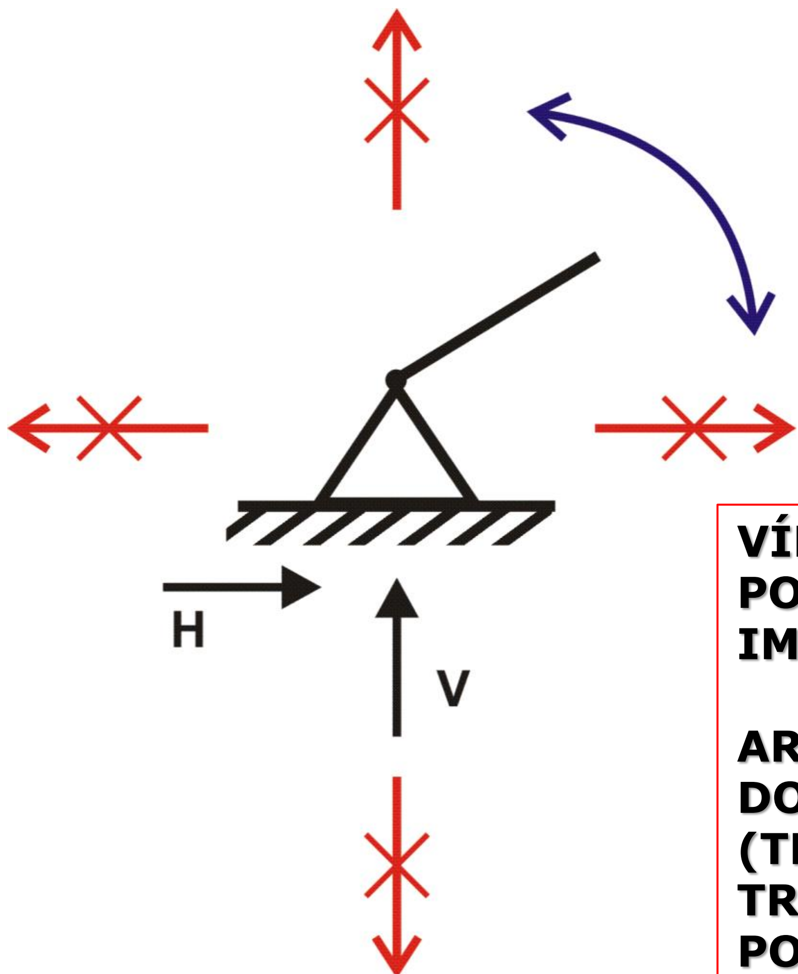
- **Articulação móvel (estrutura plana)**



VÍNCULO: RESTRIÇÃO IMPOSTA POR UM APOIO. CADA VÍNCULO IMPEDE UM DESLOCAMENTO.

ARTICULAÇÃO MÓVEL RESTRINGE UM MOVIMENTO (TRANSLAÇÃO VERTICAL), PORTANTO INTRODUZ UM VÍNCULO.

- **Articulação fixa (estrutura plana)**

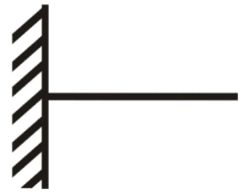


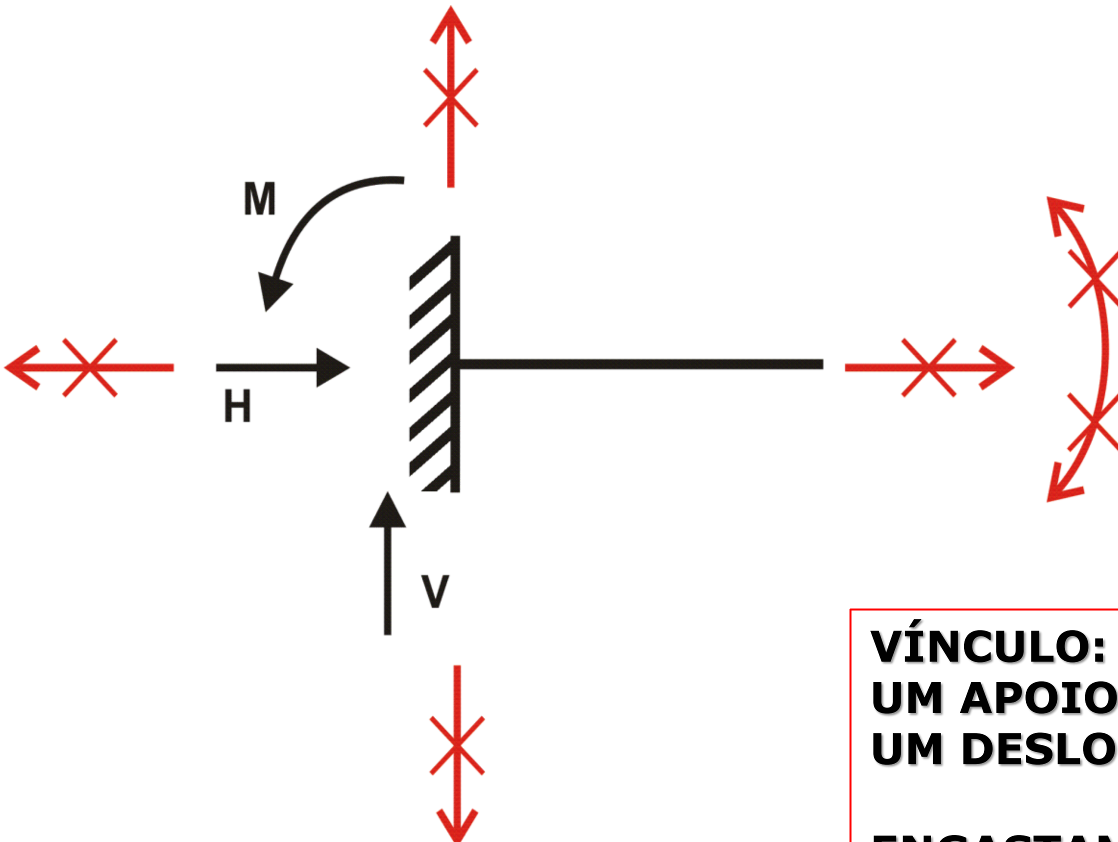
VÍNCULO: RESTRIÇÃO IMPOSTA POR UM APOIO. CADA VÍNCULO IMPEDE UM DESLOCAMENTO.

ARTICULAÇÃO FIXA RESTRINGE DOIS MOVIMENTOS (TRANSLAÇÃO HORIZONTAL E TRANSLAÇÃO VERTICAL), PORTANTO INTRODUZ DOIS VÍNCULOS.

Ponte ferroviária Zarate Brazo Largo I sobre o rio Paraná de las Palmas, Argentina, 1978

- **Engastamento (estrutura plana)**





VÍNCULO: RESTRIÇÃO IMPOSTA POR UM APOIO. CADA VÍNCULO IMPEDE UM DESLOCAMENTO.

ENGASTAMENTO RESTRINGE TRÊS MOVIMENTOS (TRANSLAÇÃO HORIZONTAL, TRANSLAÇÃO VERTICAL E ROTAÇÃO), PORTANTO INTRODUZ TRÊS VÍNCULOS.

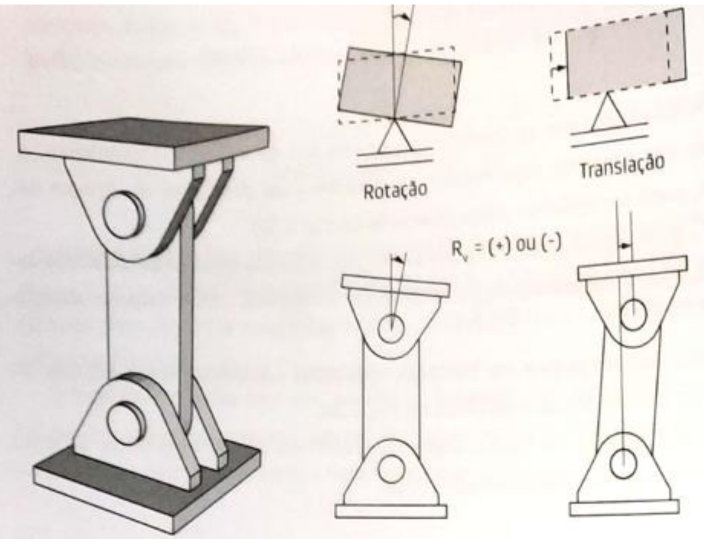
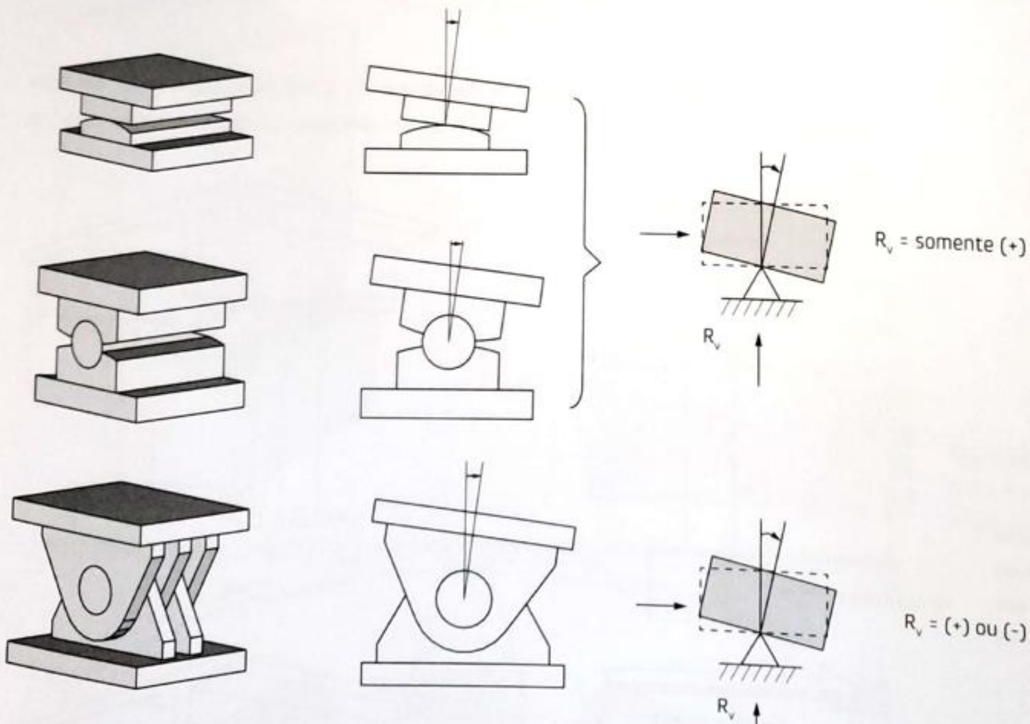



Fig. 2.20 *Aparelho de apoio metálico pe*
para reações verticais positivas e negati



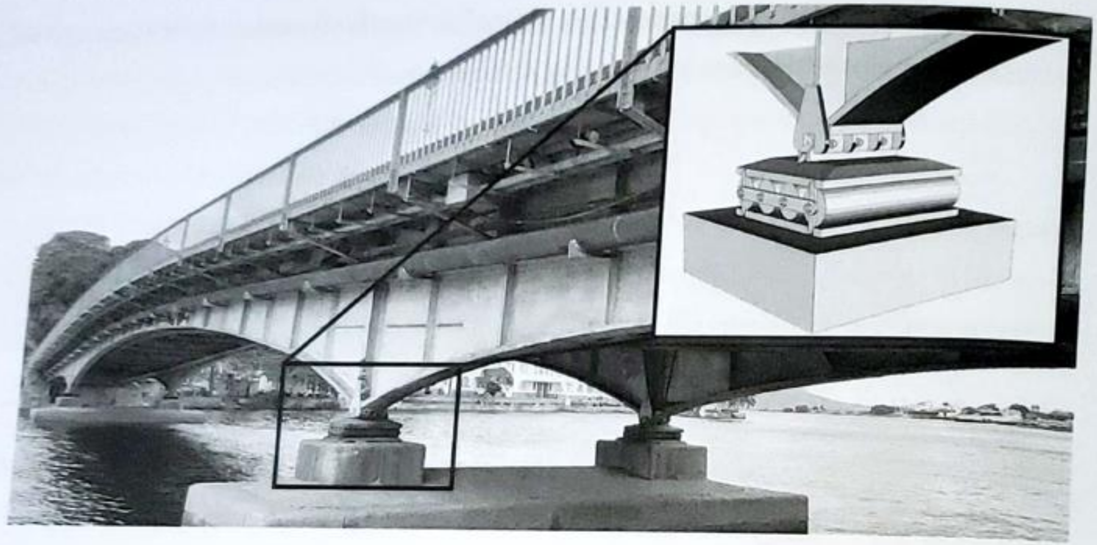
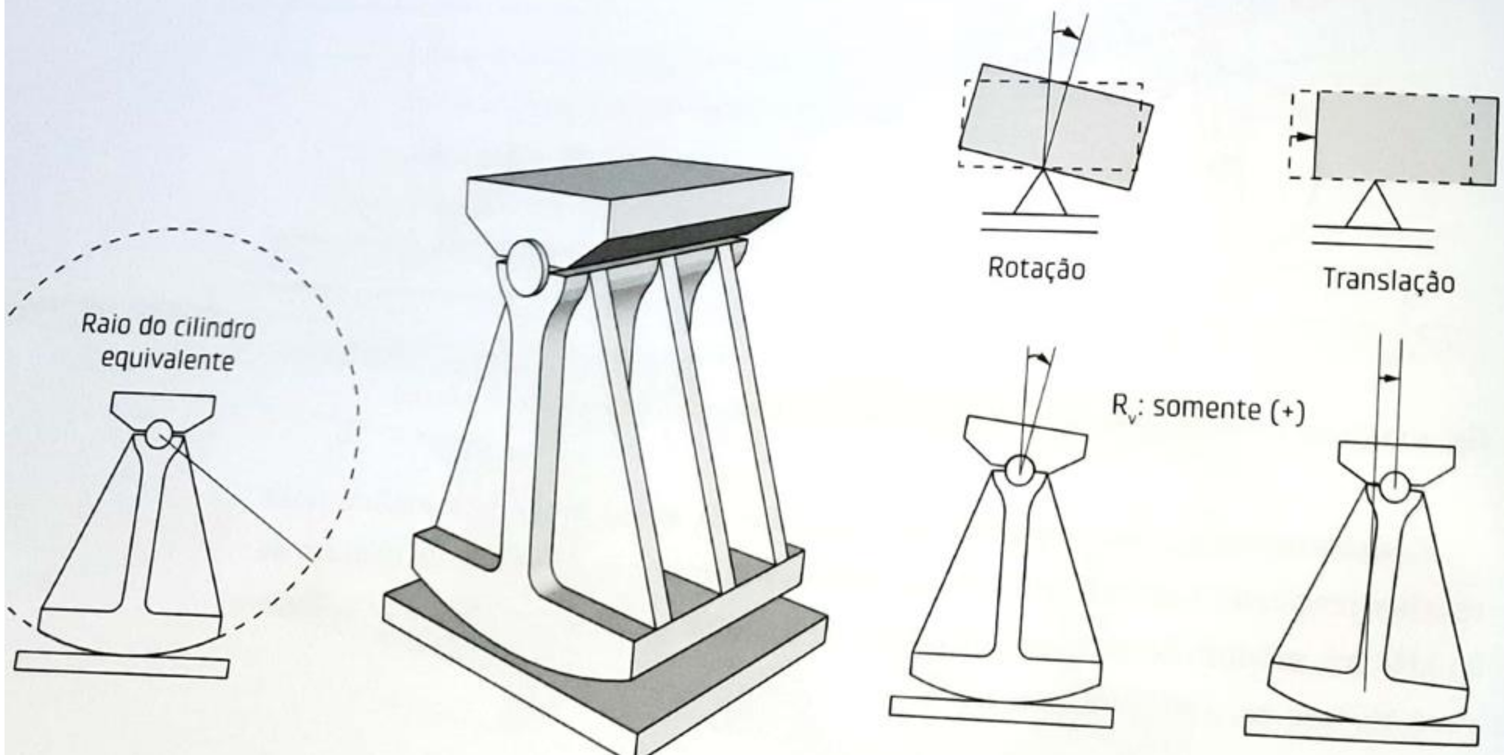


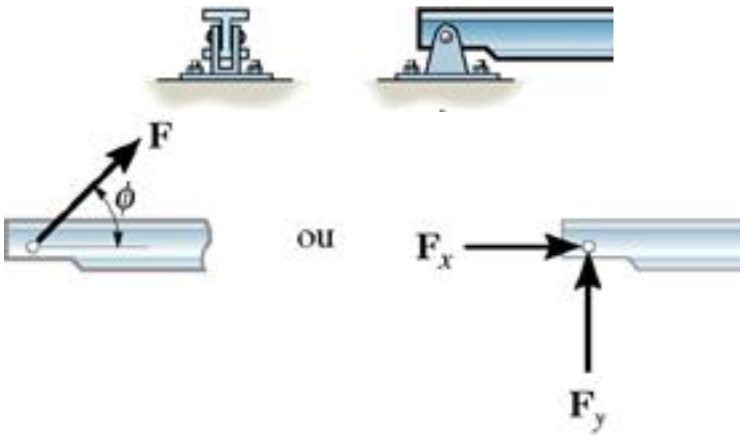
Fig. 2.18 *Aparelho de apoio sobre rolos metálicos na ponte de acesso à Ilha das Cobras (RJ)*



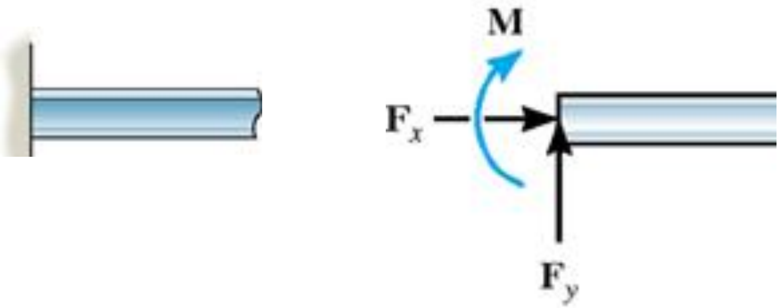
APOIOS NO PLANO

ARTICULAÇÃO MÓVEL:

ARTICULAÇÃO FIXA:



ENGASTAMENTO:



OBJETIVO: DESENVOLVER A INTUIÇÃO

COMO A ESTRUTURA VAI SE DEFORMAR?
POR ONDE AS FORÇAS VÃO CAMINHAR?

- ✓ **A ESTRUTURA PERMITE QUE OS ESFORÇOS APLICADOS EM UM CERTO PONTO CAMINHEM E CHEGUEM A OUTRO PONTO.**

- ✓ **A CARGA (esforço aplicado) SEMPRE VAI PARA O APOIO.**

- ✓ **HÁ DEFORMAÇÃO POR ONDE HÁ O CAMINHAMENTO DOS ESFORÇOS.**

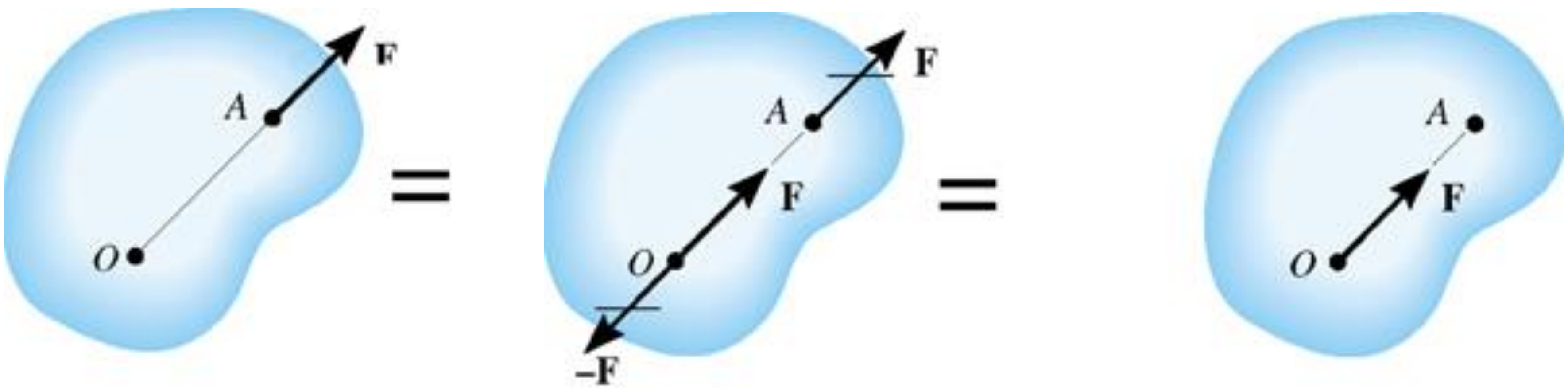
- ✓ **TODO MATERIAL É DEFORMÁVEL DESDE QUE HAJA PASSAGEM DE ESFORÇOS.**

DEFORMADA: FORMA QUE A ESTRUTURA ADQUIRE, APÓS A APLICAÇÃO DOS ESFORÇOS EXTERNOS, APÓS A DEFORMAÇÃO

ESTÁTICA

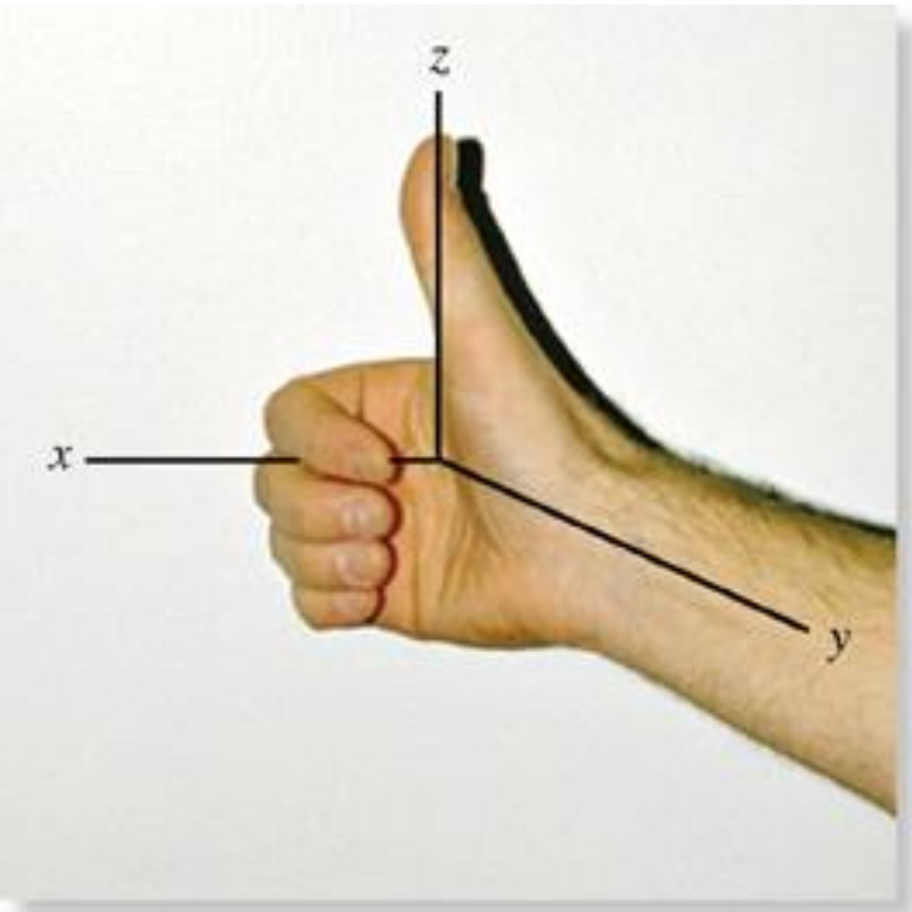
FORÇA

Linha de ação de uma força aplicada em um ponto P é a reta que passa por P

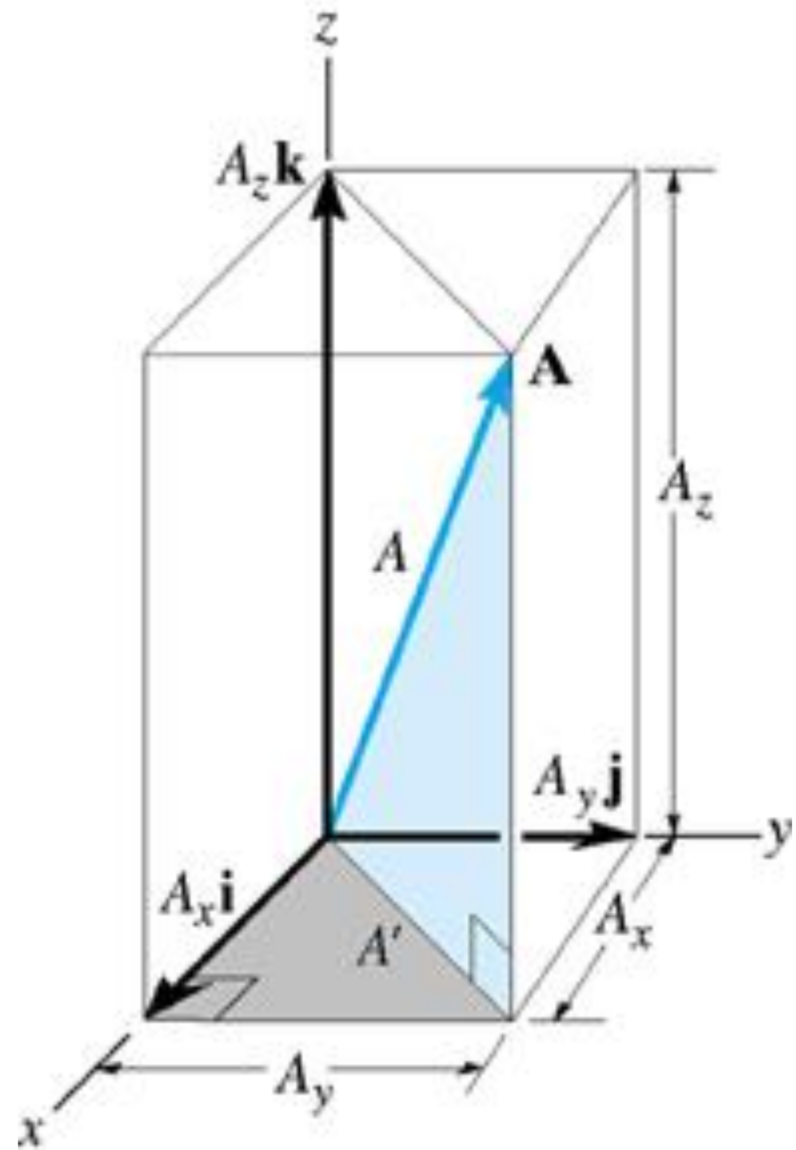


ESTÁTICA

FORÇA



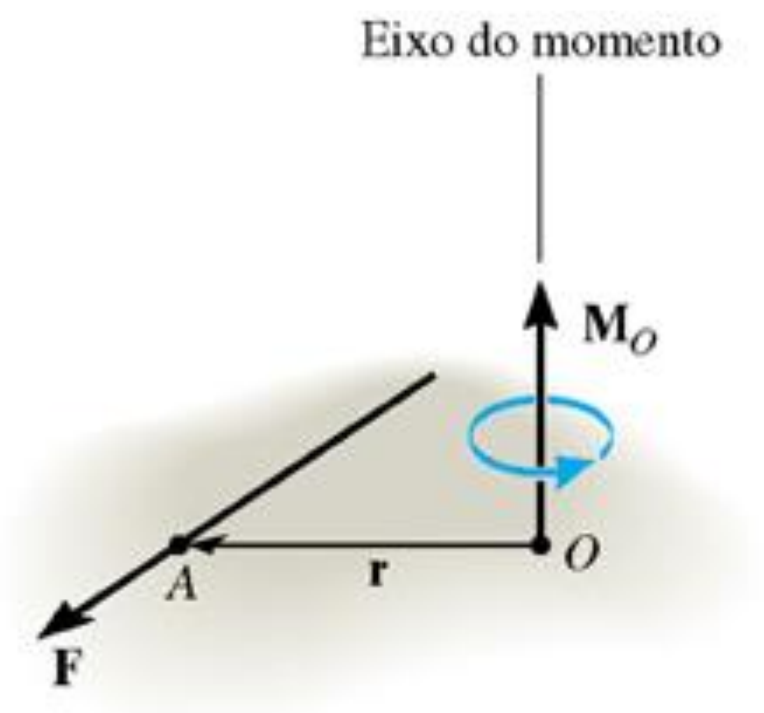
Sistema de coordenadas da mão direita

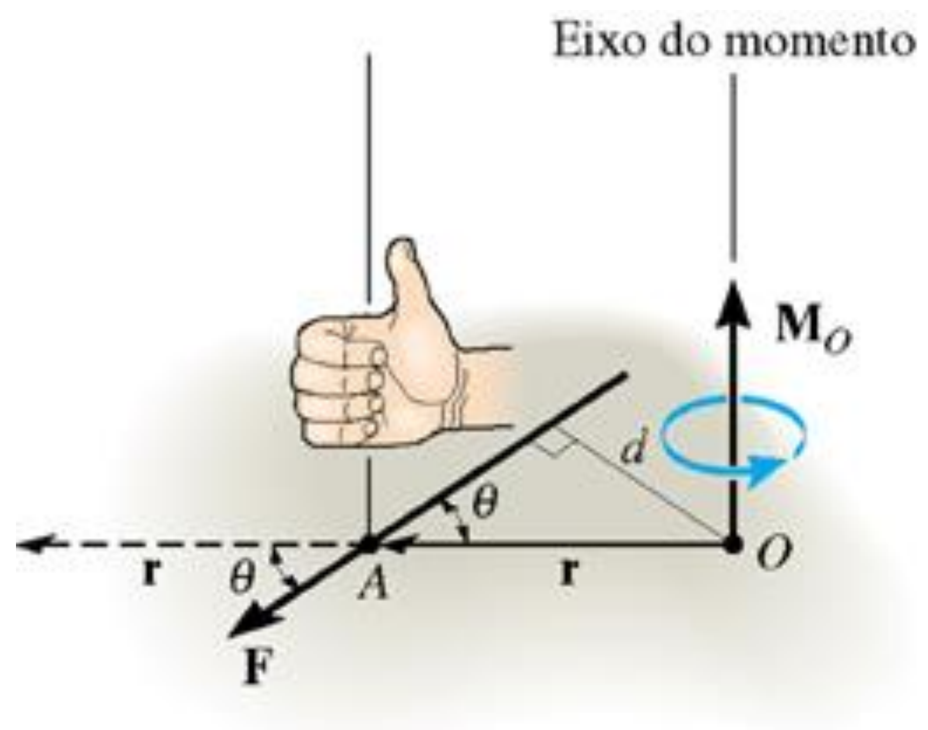


ESTÁTICA

MOMENTO

Momento em relação a um ponto (polo) é um vetor (ortogonal ao plano da força e do ponto)





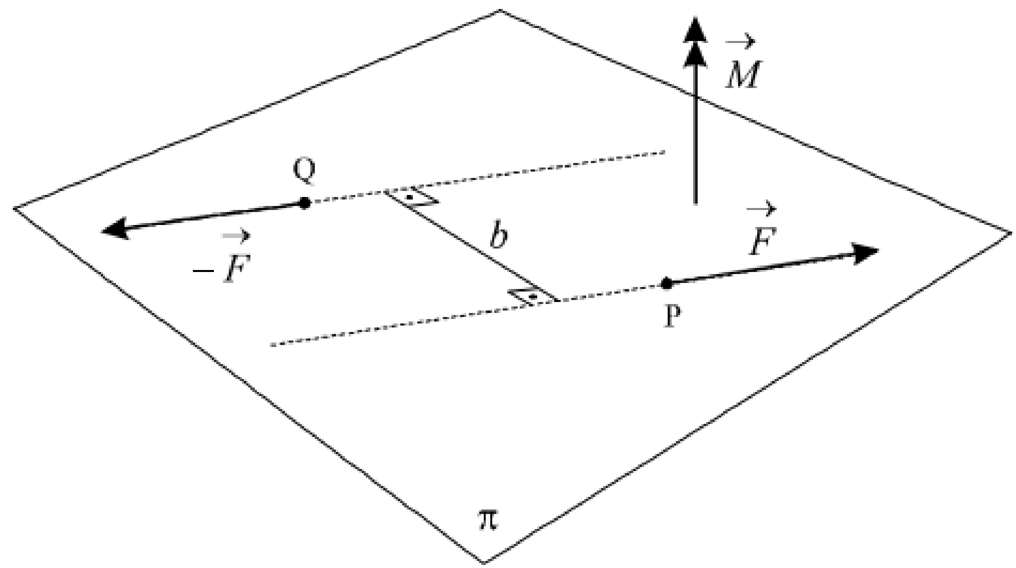
O Momento é um binário com

• direção: perpendicular ao plano definido pelas linhas de ação das forças que constituem o binário.

• sentido: pela regra da mão direita ou pela regra do saca-rolha.

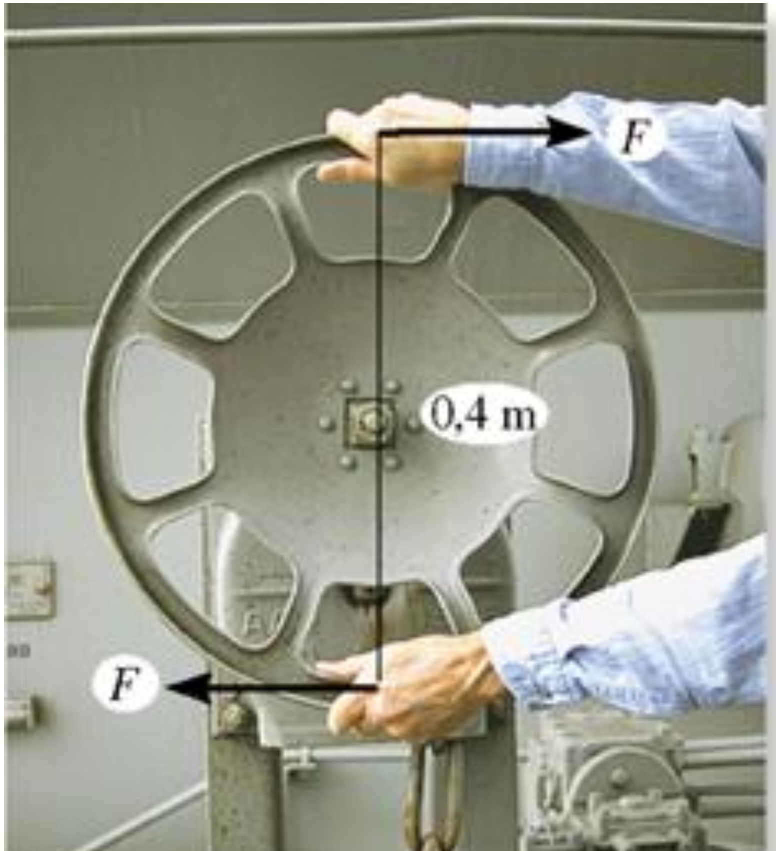
• intensidade: $\|\vec{M}\| = \|\vec{F}\| * b$

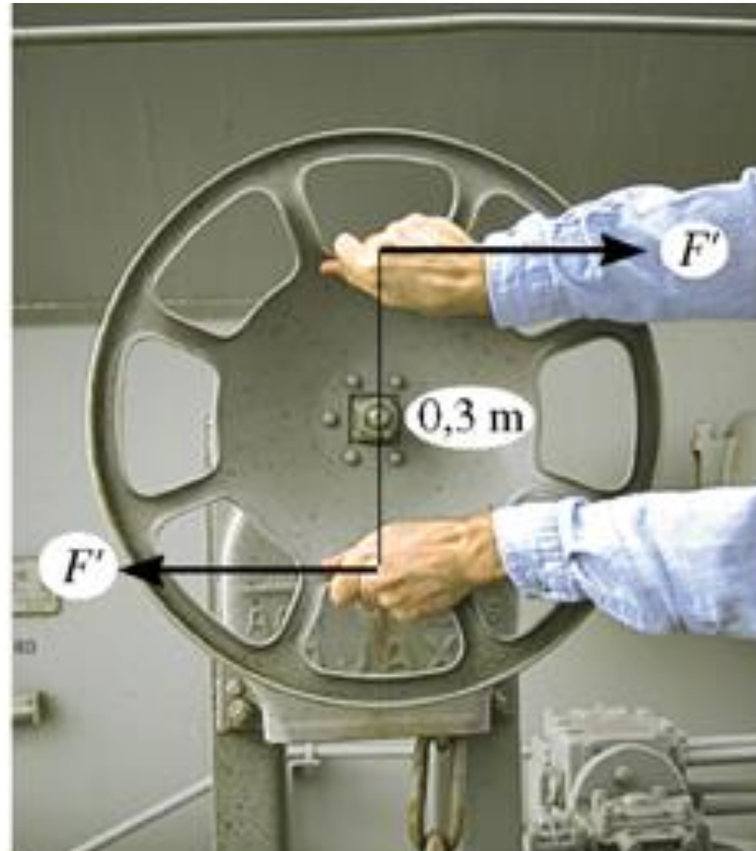
onde b é a distância entre as linhas de ação das duas forças (braço de alavanca).



Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

ESTÁTICA





QUEM FAZ O MENOR ESFORÇO?

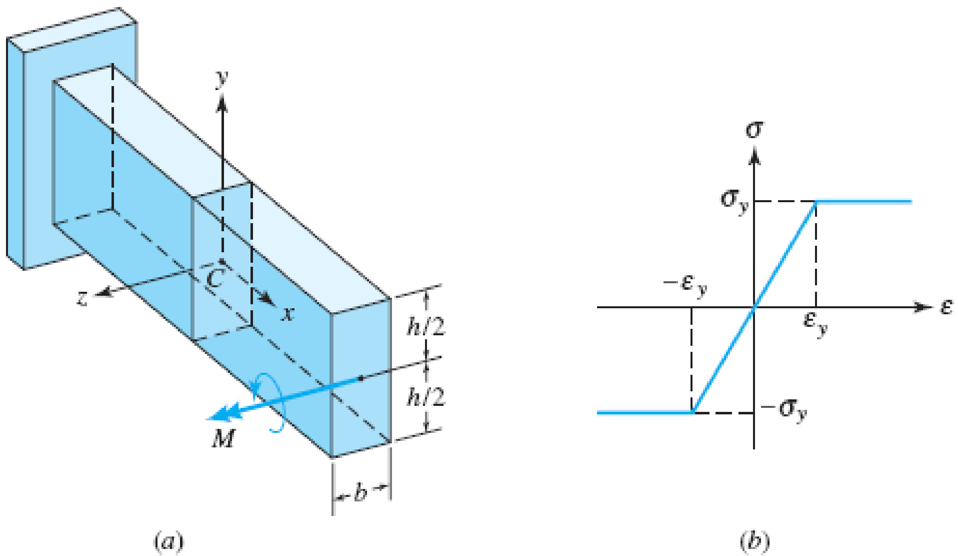


FIGURE 7.45 (a) Inelastic bending of an elastoplastic rectangular beam in pure bending; (b) stress–strain diagram for an elastoplastic material.

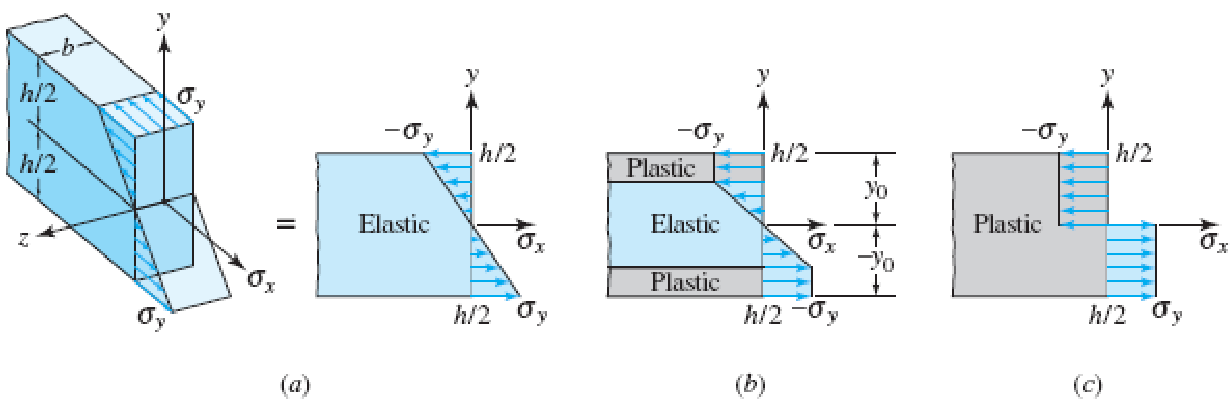
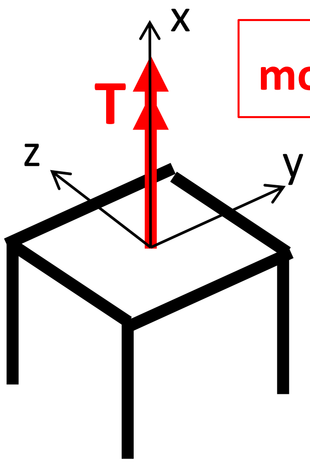
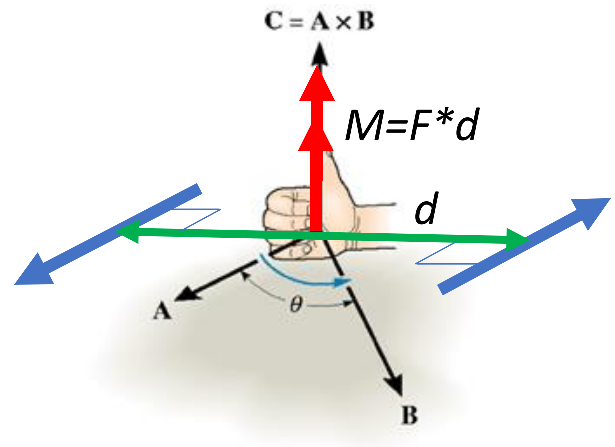


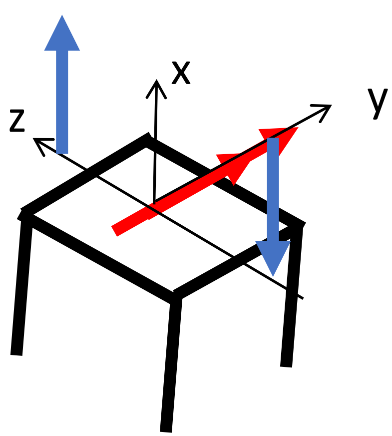
FIGURE 7.46 Stress distribution in a rectangular beam as bending moment is increased: (a) elastic; (b) partially plastic; and (c) fully plastic.

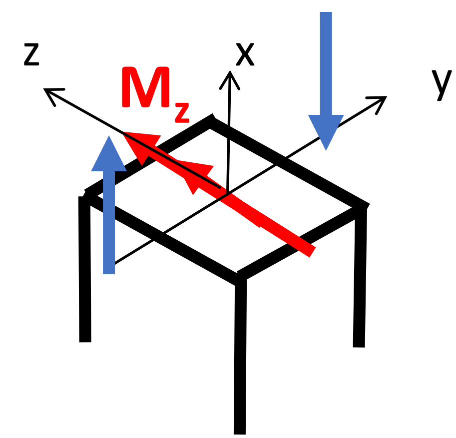
ESTÁTICA



momento de torção (T)





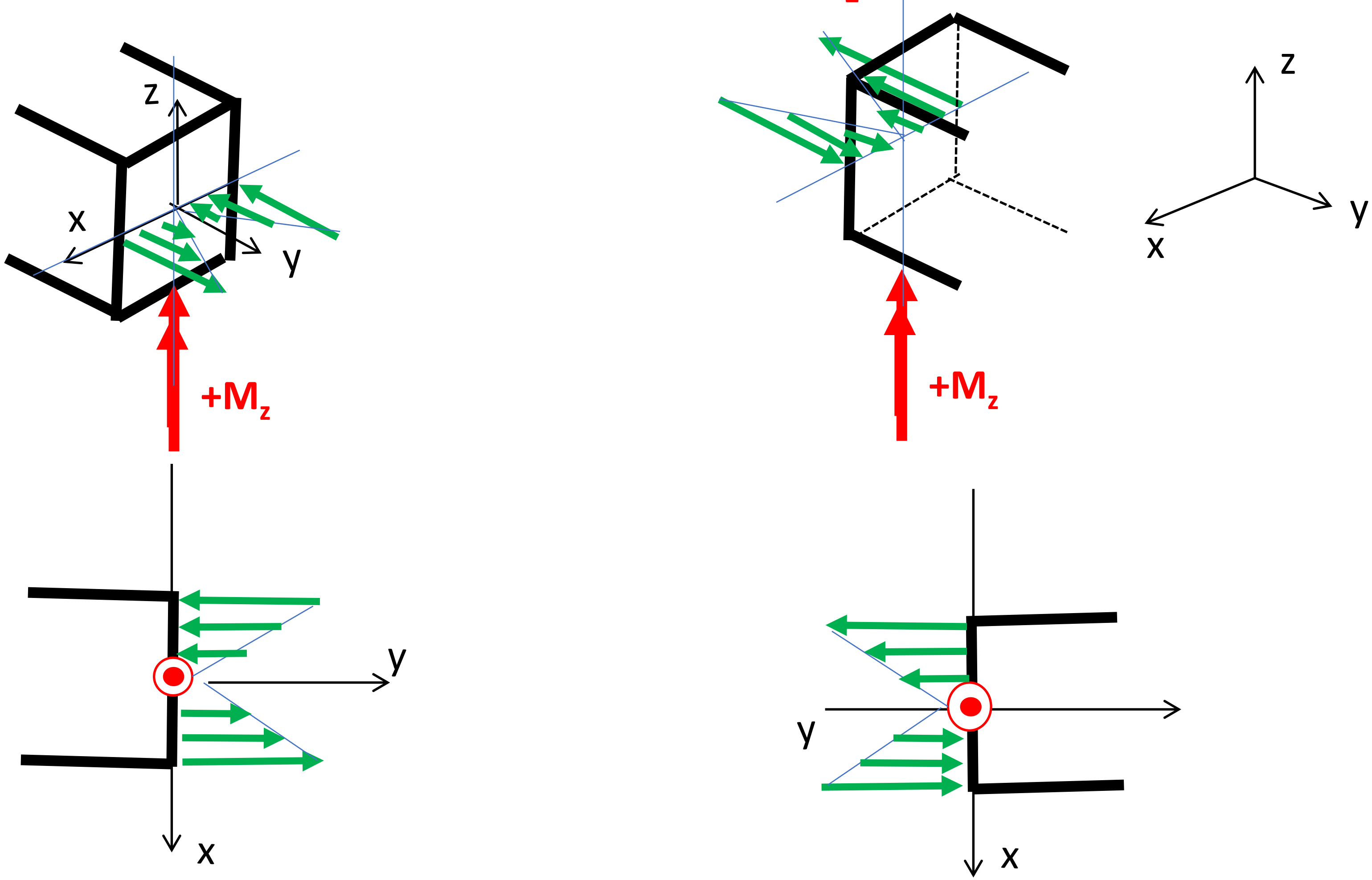


momento fletor em torno do eixo y (M_y)

momento fletor em torno do eixo z (M_z)

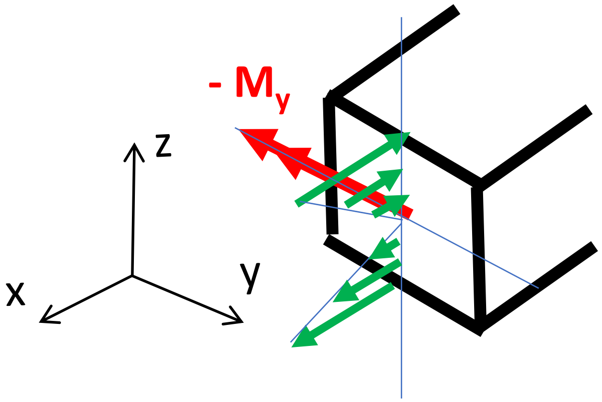
ESTÁTICA

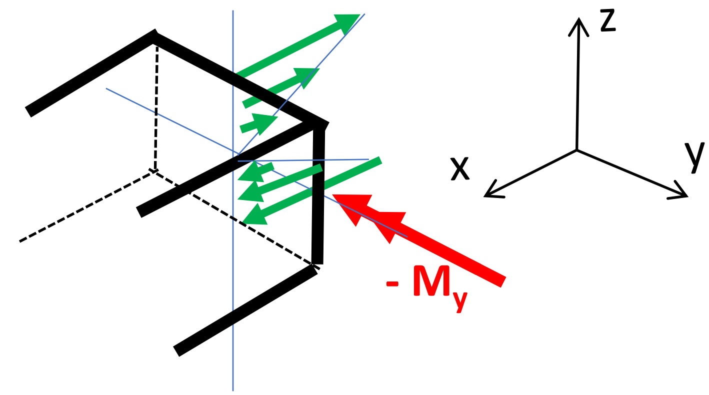
momento fletor em torno do eixo z (M_z)

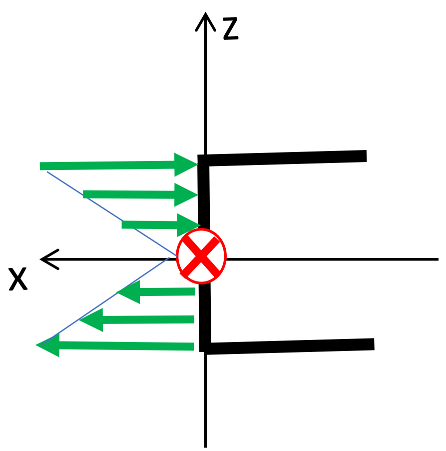


ESTÁTICA

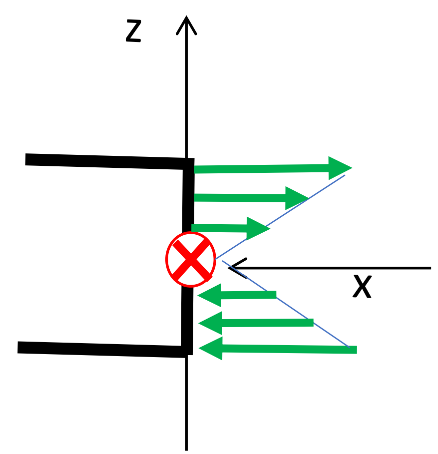
momento fletor em torno do eixo y (M_y)







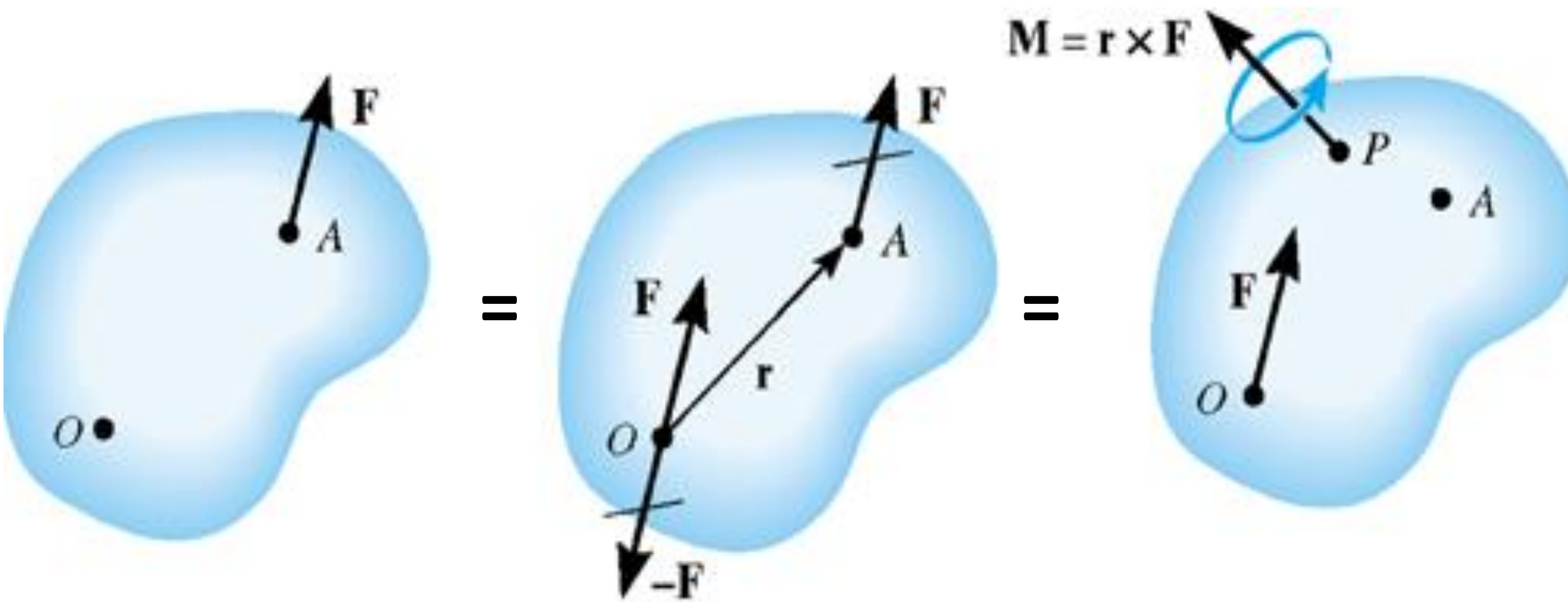
Traciona a fibra de baixo



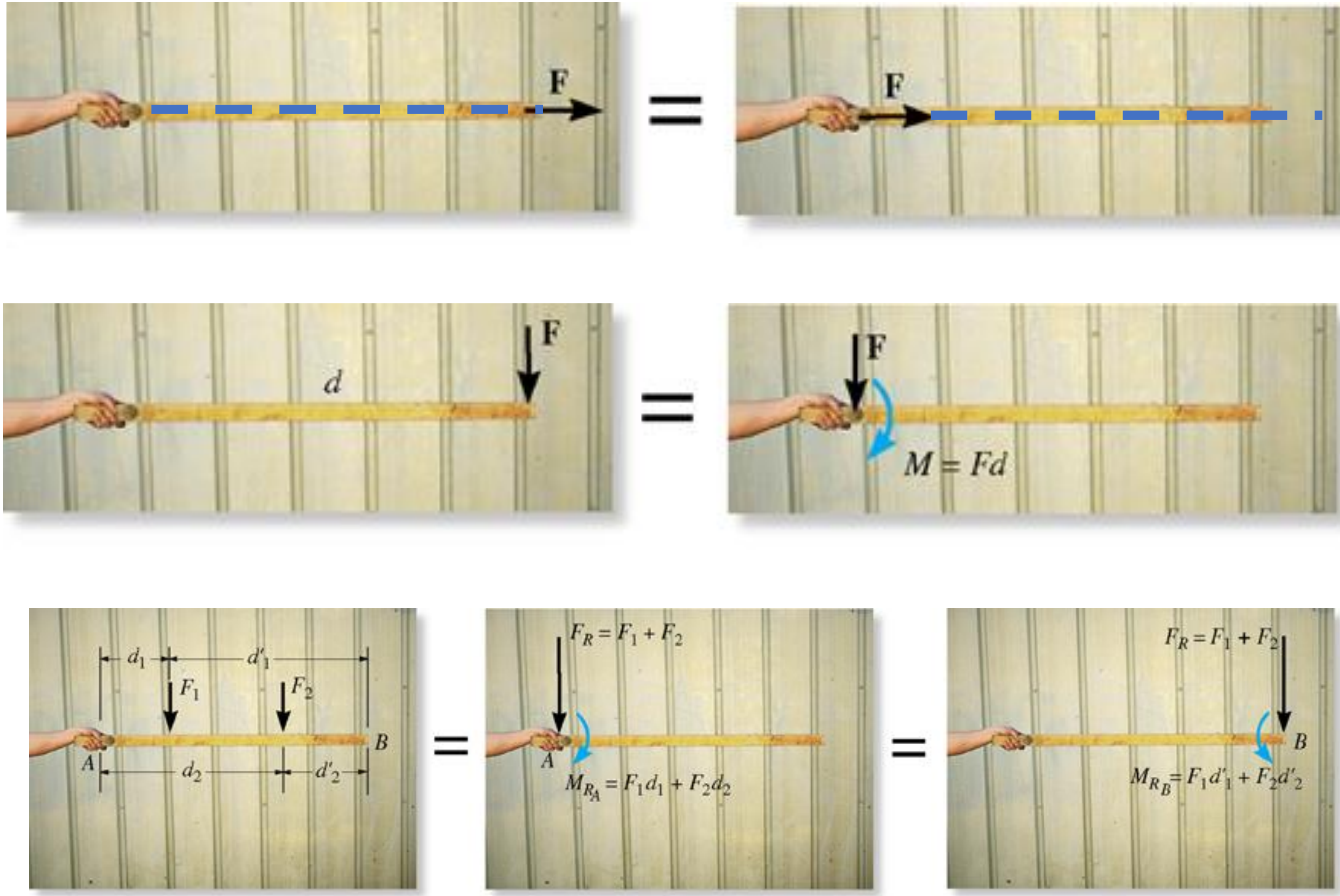
Traciona a fibra de cima

ESTÁTICA

Reduzir um sistema de esforços em um ponto é aplicar nesse ponto a resultante do sistema e os momentos das forças do sistema em relação a esse ponto



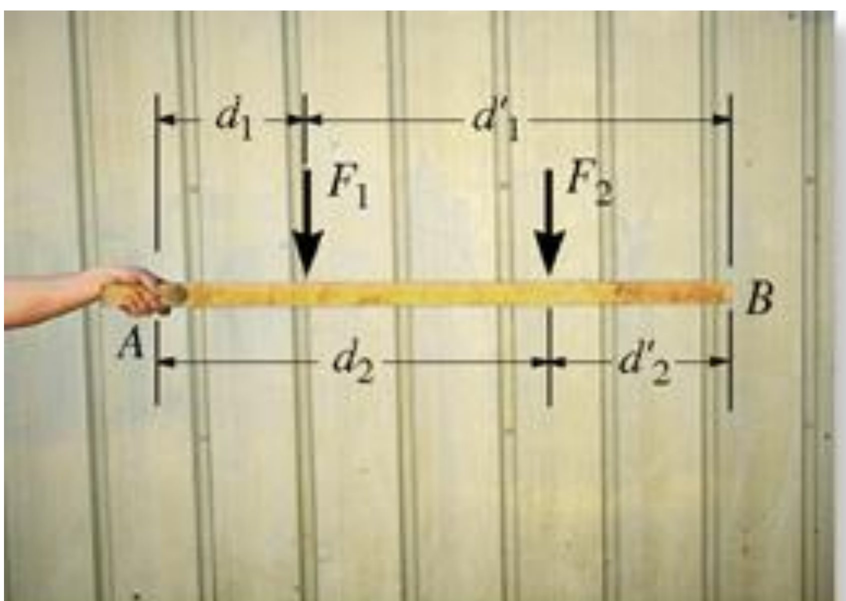
ESTÁTICA


F
=
F
F
d
=
F
M = Fd
d1
d'1
F1
F2
A
B
d2
d'2
=
FR = F1 + F2
A
MRA = F1d1 + F2d2
=
FR = F1 + F2
B
MRB = F1d'1 + F2d'2

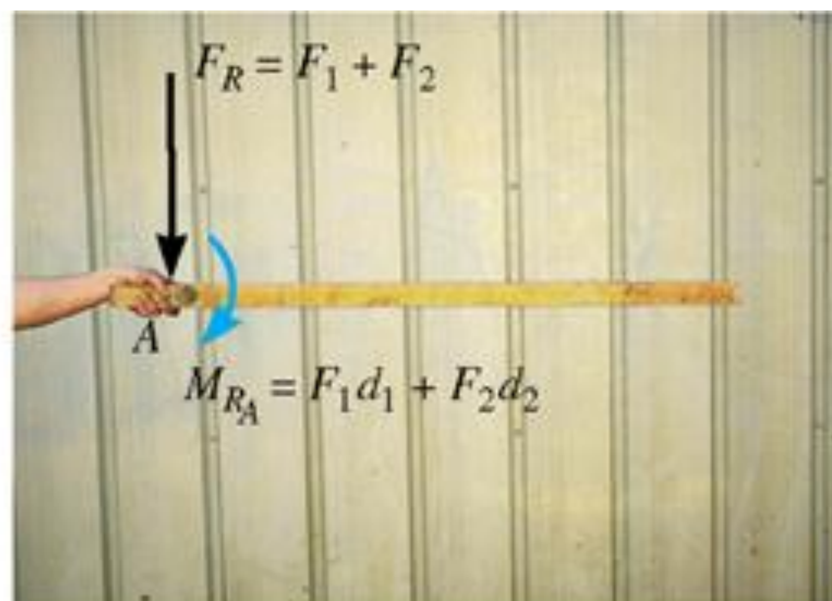
ESTÁTICA

Dois sistemas de forças S e S′ são mecanicamente equivalentes se suas reduções em um mesmo ponto A levarem aos mesmos esforços: R = R′ e $M_A = M'_A$

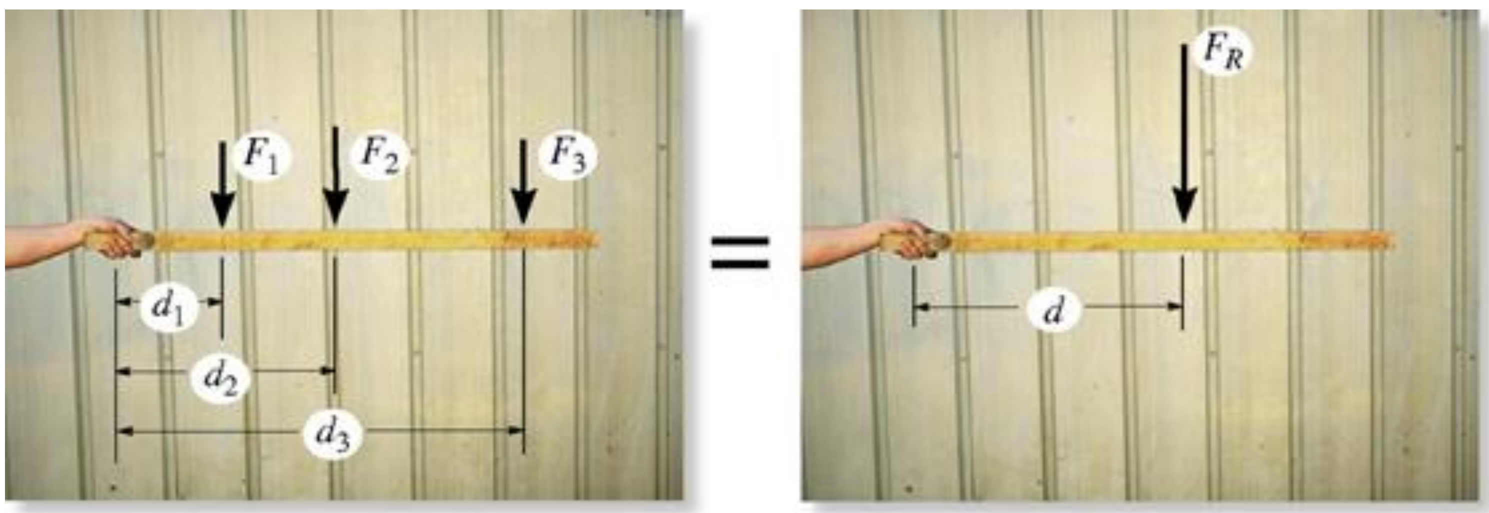
Dois sistemas de forças S e S′ mecanicamente equivalentes produzirão os mesmos efeitos, o mesmo movimento



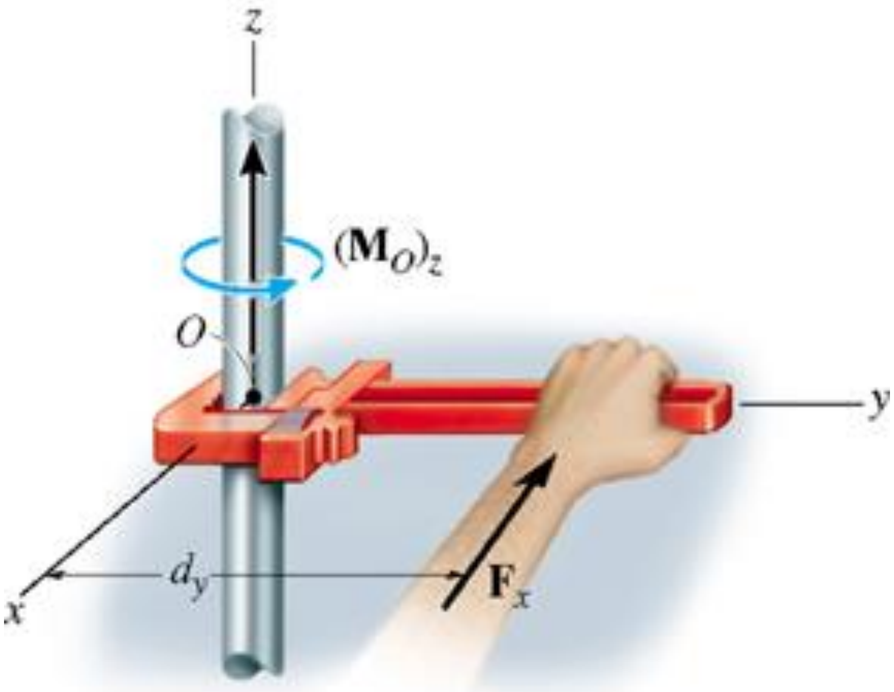
=



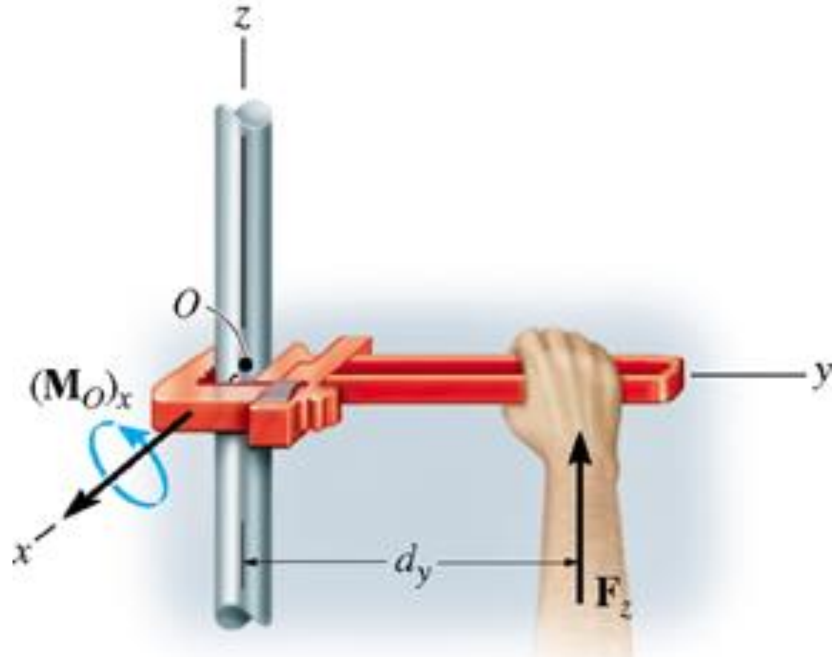
ESTÁTICA



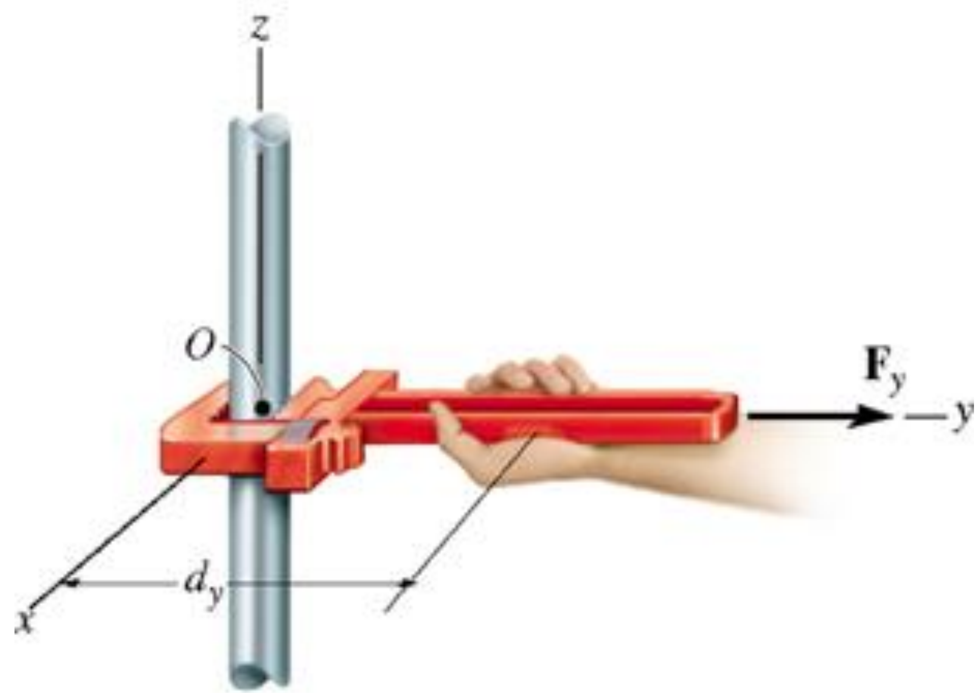
ESTÁTICA



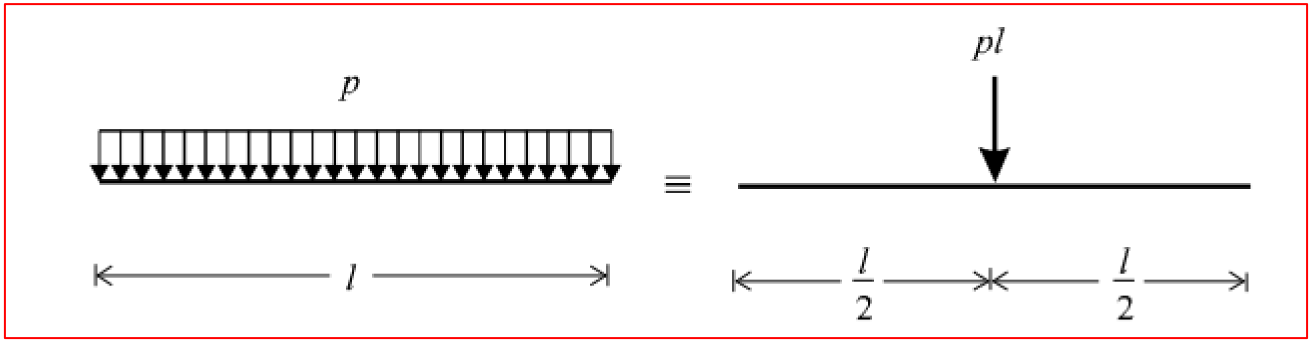
z
$(\mathbf{M}_O)_z$
O
y
x
d_y
$\mathbf{F}_x$



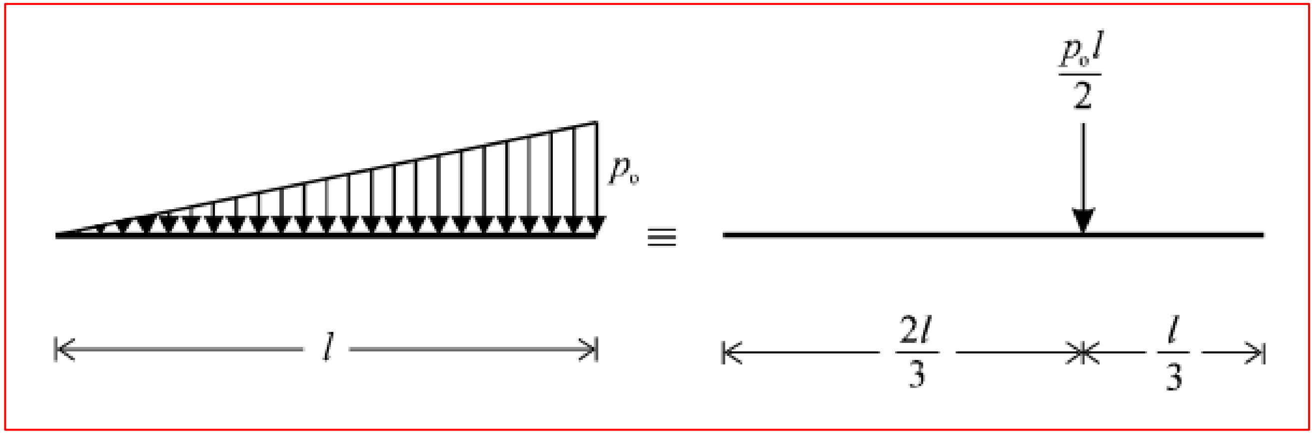
z
O
$(\mathbf{M}_O)_x$
y
x
d_y
$\mathbf{F}_z$



z
O
$\mathbf{F}_y$
y
x
d_y



SISTEMAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES



EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para um corpo em repouso em relação a um sistema inercial, as leis de Euler[3] fornecem:

$$\sum_{i=1}^{n_F} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \qquad \sum_{j=1}^{n_M} \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}\,j} = \boldsymbol{0}, \tag{2.1}$$

correspondendo ao equilíbrio de n_F forças $\boldsymbol{F}_i$ e n_M momentos $\boldsymbol{M}_j$ em relação a um polo arbitrário O. Reescrevendo a equação acima empregando as componentes de força e momento em relação a três eixos ortogonais x, y e z passando por O, obtemos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & \sum M_{\mathrm{O}x} &= 0, \\ \sum F_y &= 0, & \sum M_{\mathrm{O}y} &= 0, \\ \sum F_z &= 0, & \sum M_{\mathrm{O}z} &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

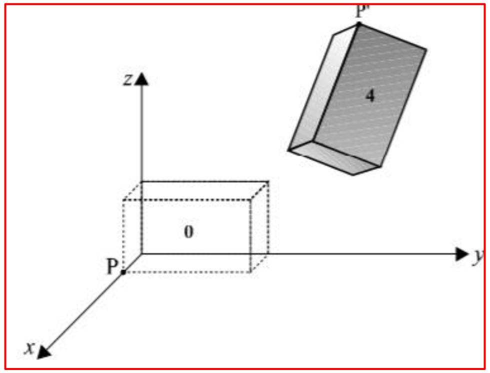
onde os índices foram omitidos. Para um sistema de forças coplanares em que as forças e momentos atuam no plano definido pelos eixos x e y, restam apenas três equações não-identicamente nulas:

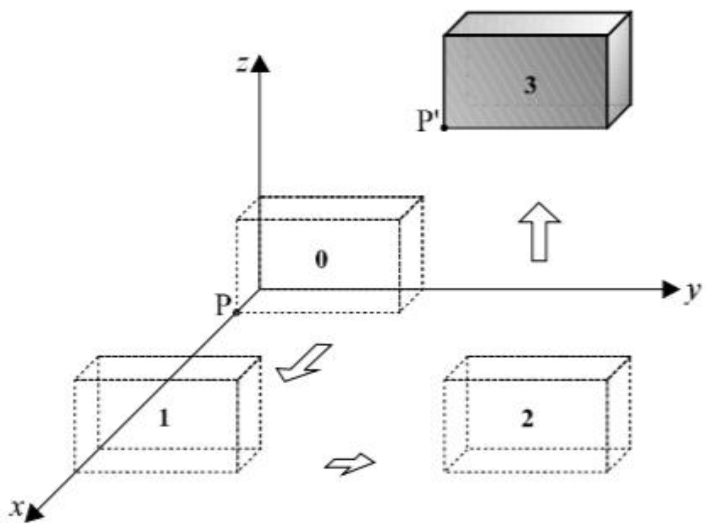
$$\begin{aligned} \sum F_x &= \ 0, \\ \sum F_y &= \ 0, \end{aligned} \qquad \sum M_{\mathrm{O}z} = 0. \tag{2.3}$$

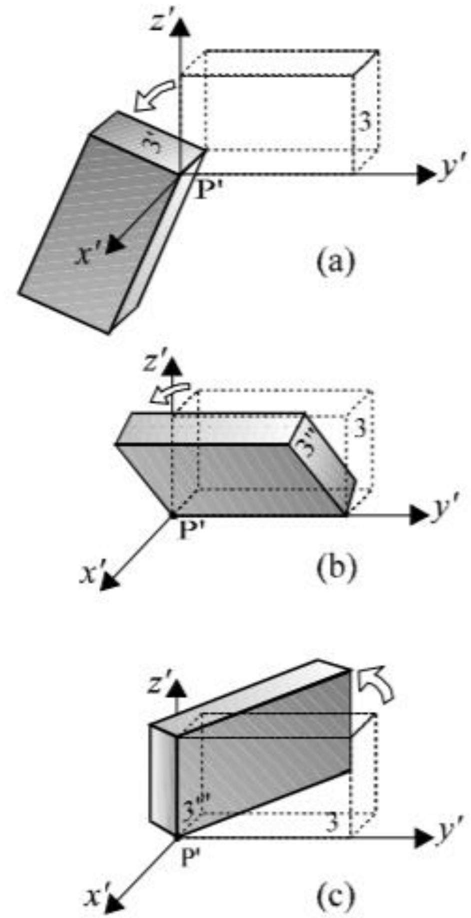
Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011

MOVIMENTO DE UM SISTEMA MATERIAL ESPACIAL:

É SEMPRE UMA COMBINAÇÃO TRÊS TRANSLAÇÕES COM TRÊS ROTAÇÕES







Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

Example (cantilever beam)

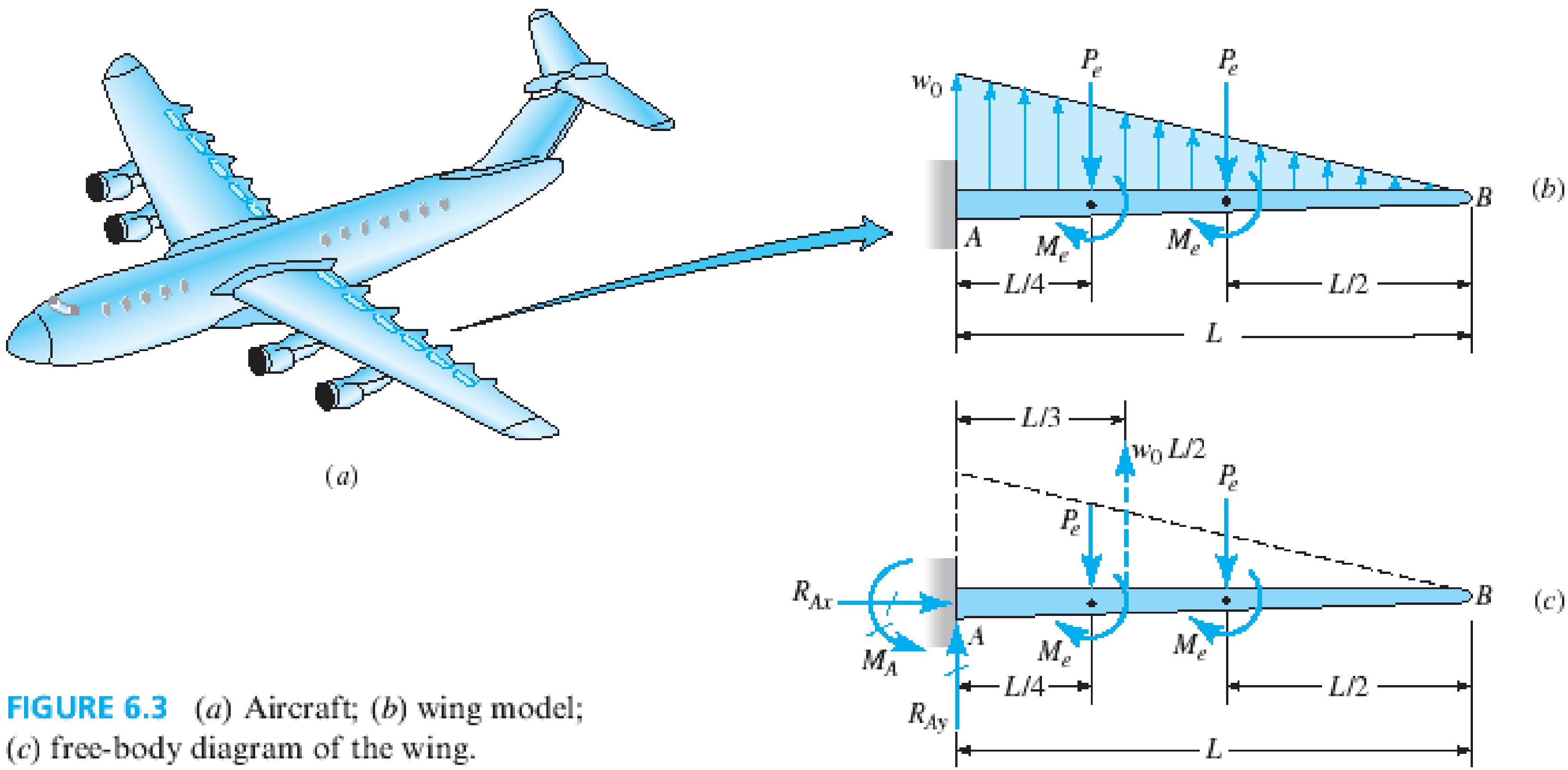
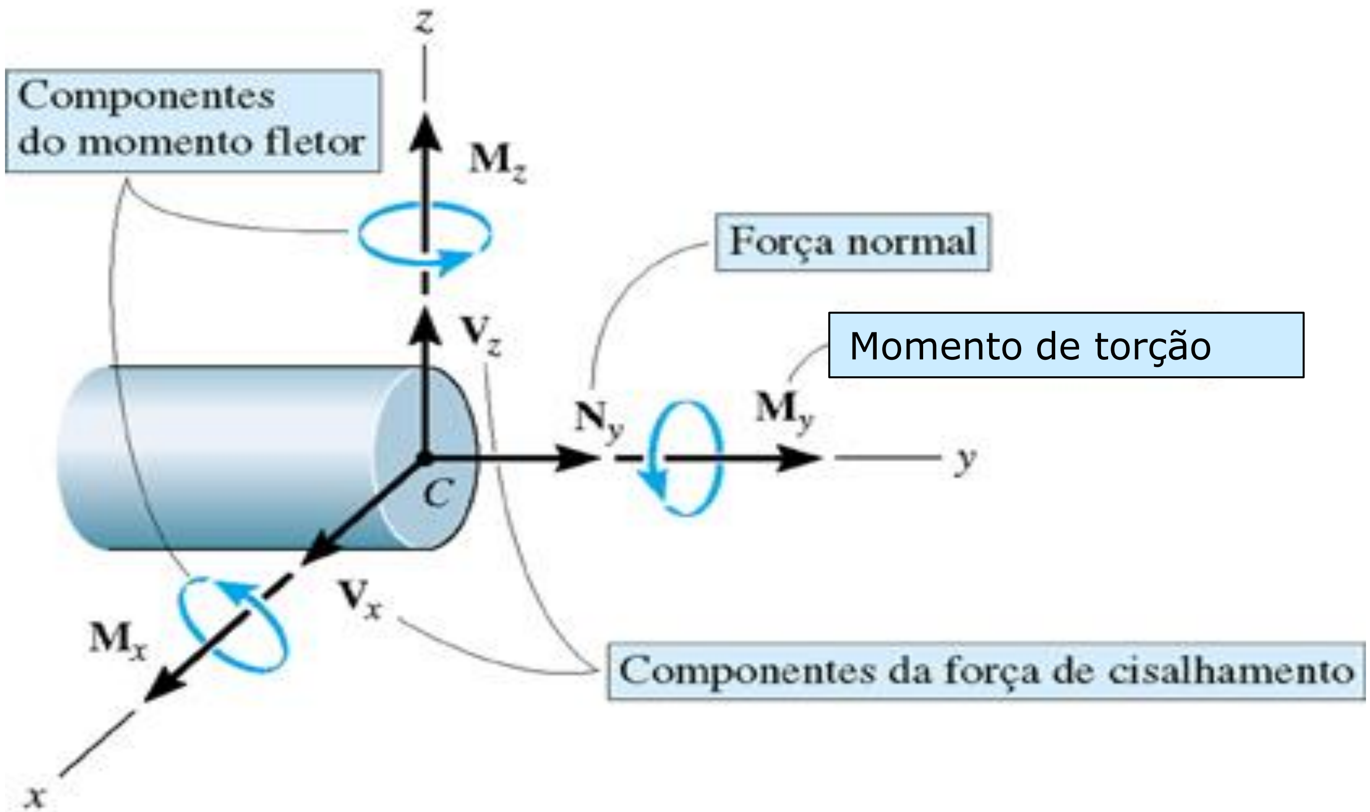


FIGURE 6.3 (*a*) Aircraft; (*b*) wing model; (*c*) free-body diagram of the wing.

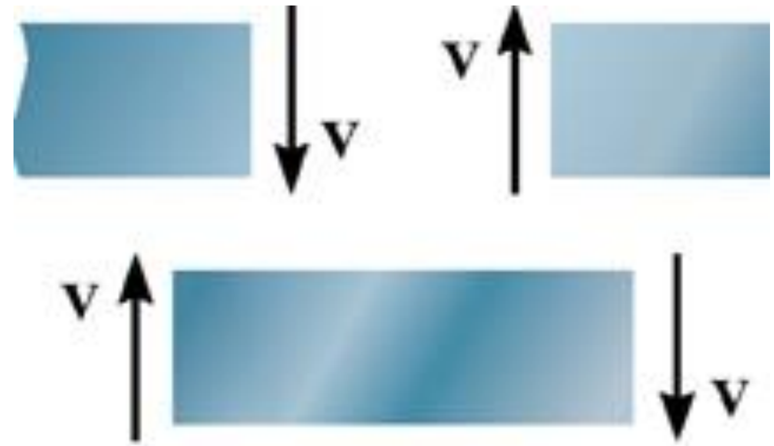
TA **Philpot,** Missouri University of Science and Technology



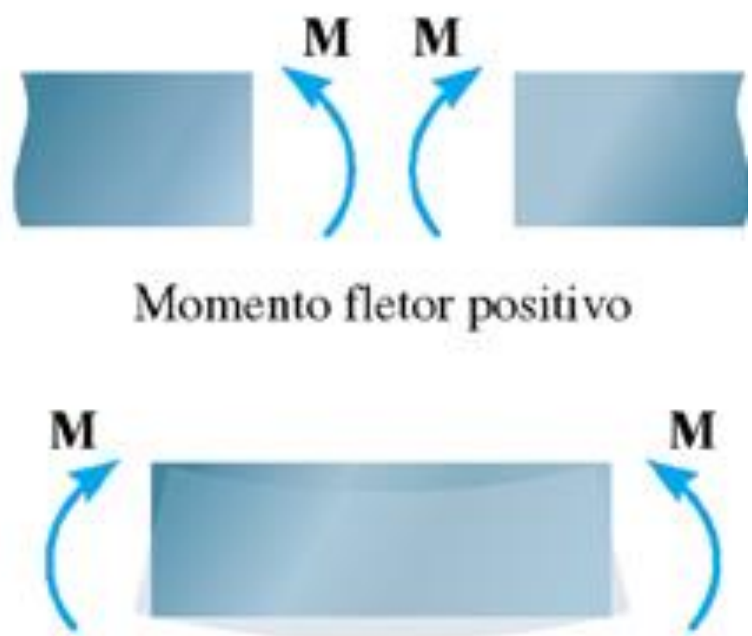
ESFORÇOS SOLICITANTES: esforços internos, resultantes das tensões na seção transversal de uma barra (reduzindo as tensões ao centro de gravidade C da seção transversal). Na figura, ao decompor esses esforços internos, obtêm-se a **força normal (N_y)**, as **forças cortantes (V_x V_y)**, os **momentos fletores (M_x M_z)**, e o **momento de torção** (M_y).

Convenção de sinais
Estruturas planas

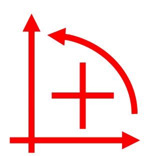
Força cortante V
Momento fletor M



Força de cisalhamento positiva



No equilíbrio, adote a convenção de GRINTER

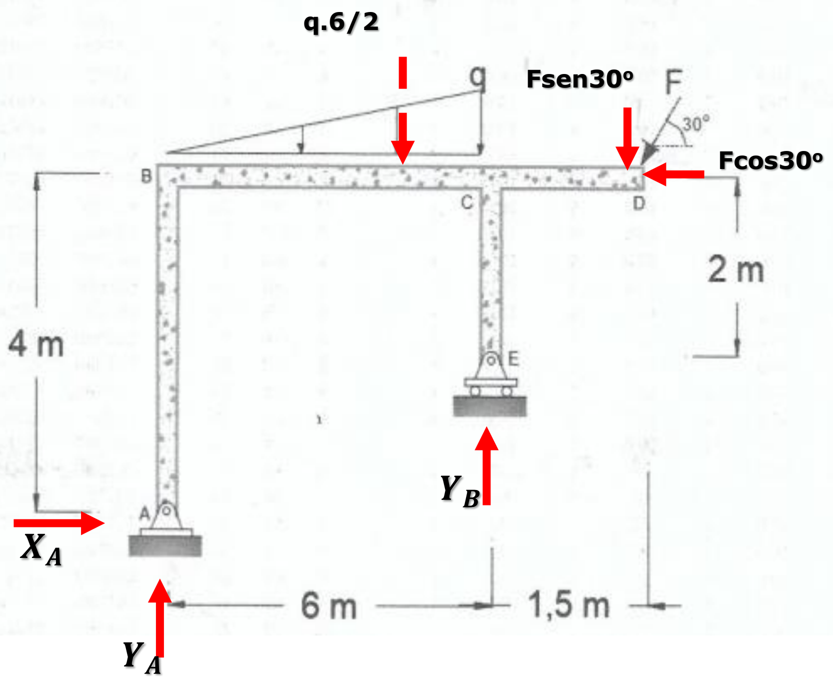


P1-2020

PEF-3200 – 1ª Prova – 27/5/2020

Nº USP:____________________Nome:____

2ª Questão(pontos) Para a estrutura a seguir, sabendo que F = 10 kN e q = 10 kN/m, obtenha os diagramas de esforços solicitantes em todos os trechos, indicando os valores e posições dos extremos dos esforços em cada trecho.



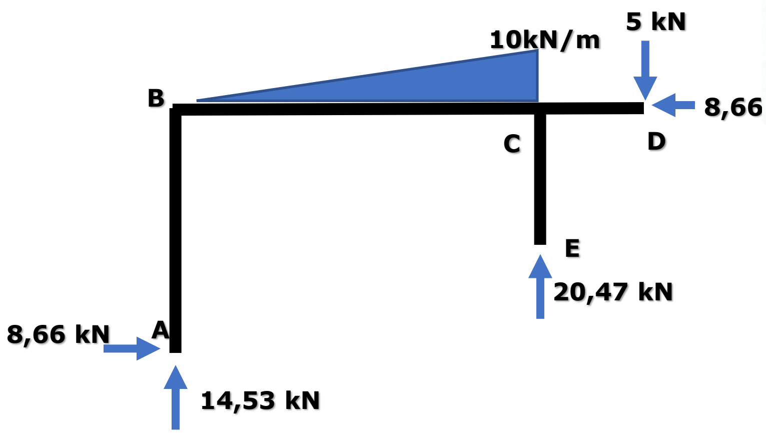
1. REAÇÕES NOS APOIOS

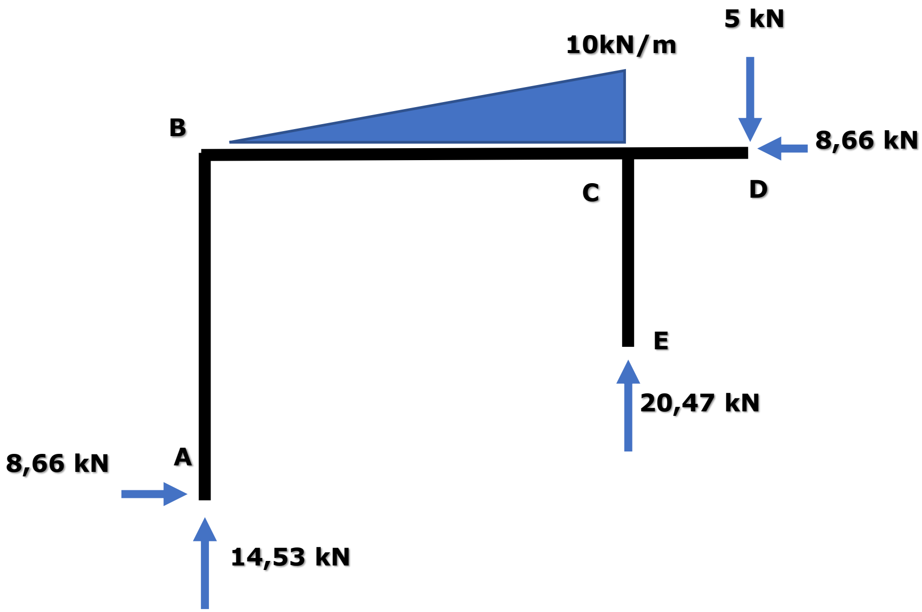
$$\sum X = 0 = X_A - 5\sqrt{3} \Longrightarrow X_A = 5\sqrt{3} = 8{,}66$$

$$\sum M_{(A)} = 0 = -30 * 4 - 5 * 7{,}5 + 5\sqrt{3} * 4 + Y_E * 6 \Longrightarrow Y_E = 20{,}47$$

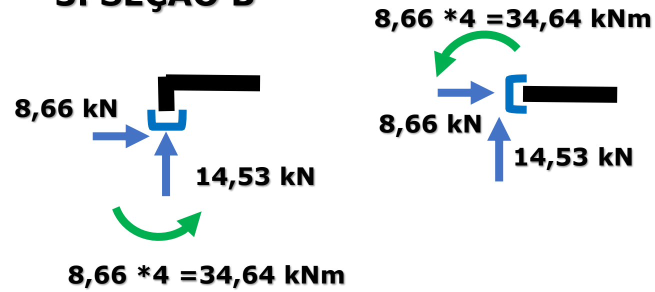
$$\sum Y = 0 = Y_A - 30 - 5 + Y_E \Longrightarrow Y_A = 14{,}53$$

2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE

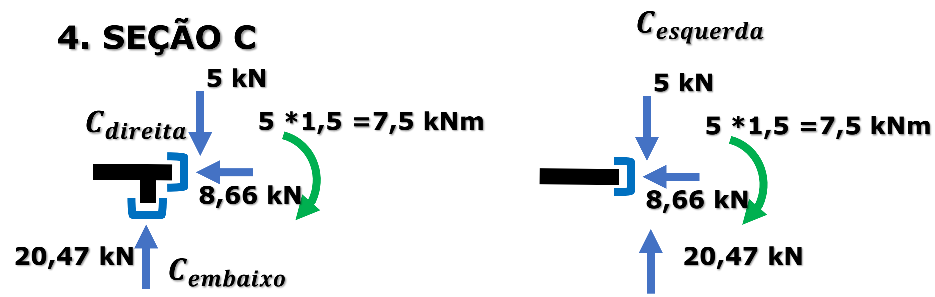




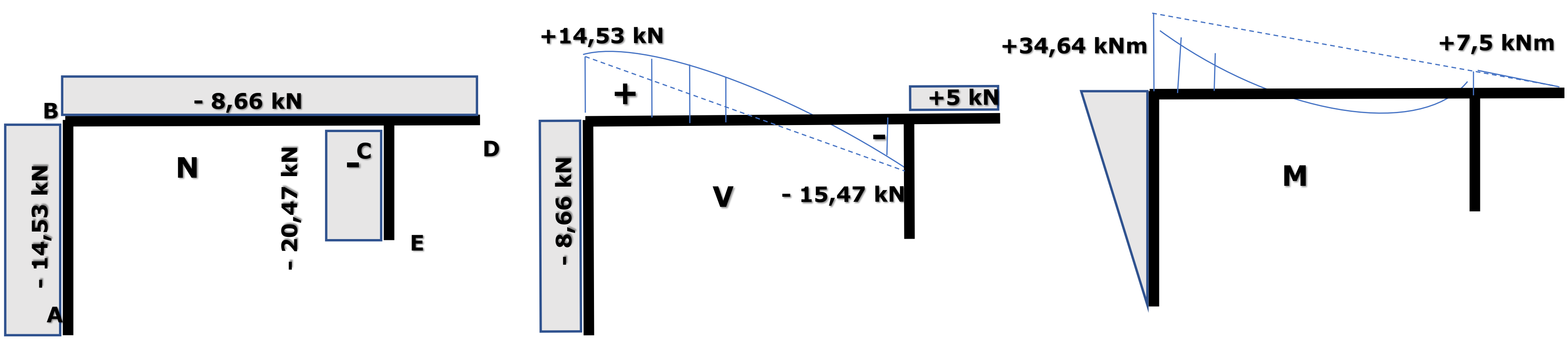
3. SEÇÃO B

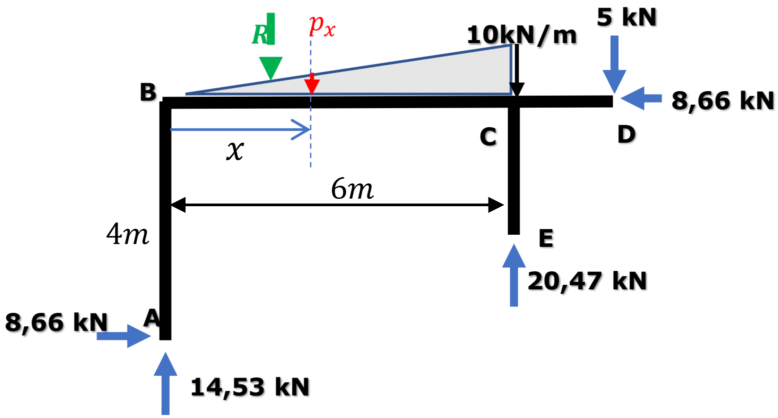


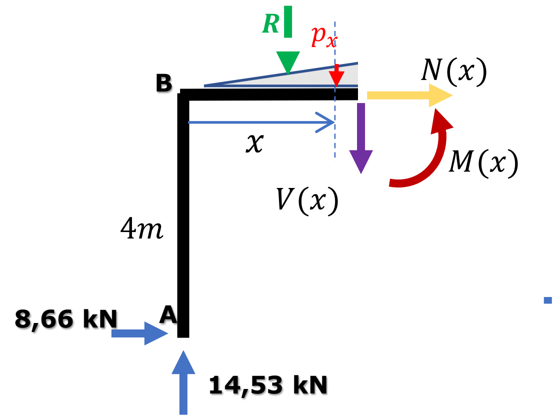
4. SEÇÃO C



5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES







6. SEÇÃO S

$$\boldsymbol{A)\ \frac{p_x}{x} = \frac{10}{6} \Longrightarrow p_x = \frac{5}{3}x}$$

$$\boldsymbol{B)\ R = \frac{p_x * x}{2} = \frac{5.x^2}{6}}$$

$\boldsymbol{C)\ Equilíbrio\ em\ S}$

$$\sum X = 0 = 8{,}66 + N(x) \Longrightarrow N(x) = -8{,}66$$

$$\sum Y = 0 = 14{,}53 - \frac{5.x^2}{6} - V(x) \Longrightarrow V(x) = 14{,}53 - \frac{5.x^2}{6}$$

$$\sum M_{(S)} = 0 = 8{,}66 * 4 - 14{,}53 * x + \frac{5.x^2}{6} * \frac{x}{3} + M(x) \Longrightarrow$$

$$M(x) = -8{,}66 * 4 + 14{,}53 * x - \frac{5.x^2}{6} * \frac{x}{3}$$

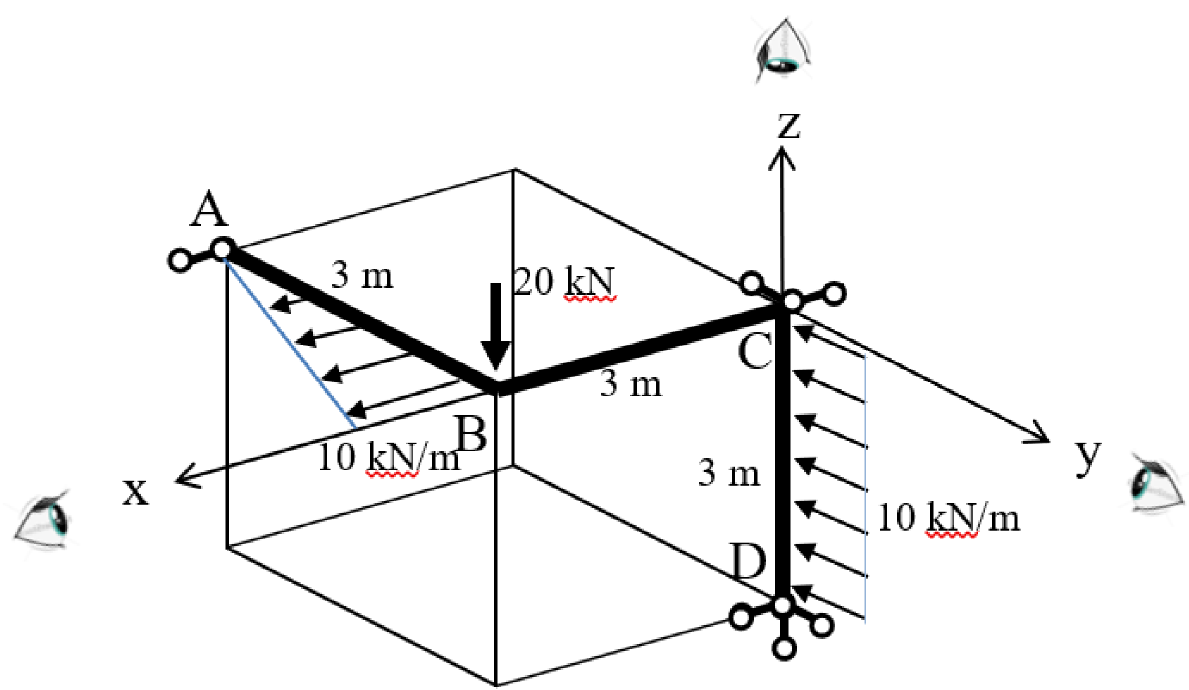
$\boldsymbol{D)\ valores\ notáveis{:}\ V = 0\ para\ x = 4,17;\ M(4,17) = 5,81}$

P1 2020

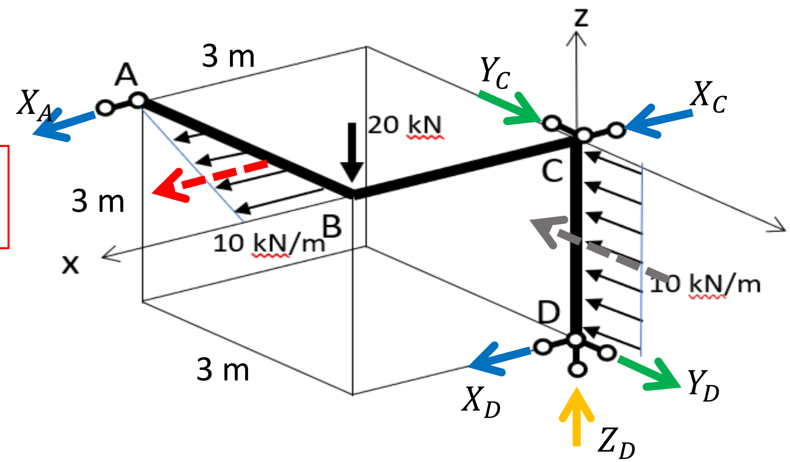
Nº USP:____________________Nome:____

1ª Questão (3,0 pontos) A viga poligonal ABCD da figura está apoiada em A, C e D por barras curtas na direção dos eixos ortogonais x, y e z. A barra AB na direção do eixo y está submetida a um carregamento uniformemente variado de zero a 10 kN/m na direção do eixo x; a barra BC está na direção do eixo x; a barra CD na direção do eixo z está submetida a um carregamento uniforme de 10 kN/m na direção do eixo y; em B há uma força concentrada de 20 kN na direção z. Determine:

a) As reações dos apoios A, C e D;
b) Os diagramas dos esforços solicitantes na barra CD, considerando o observador de frente aos eixos.

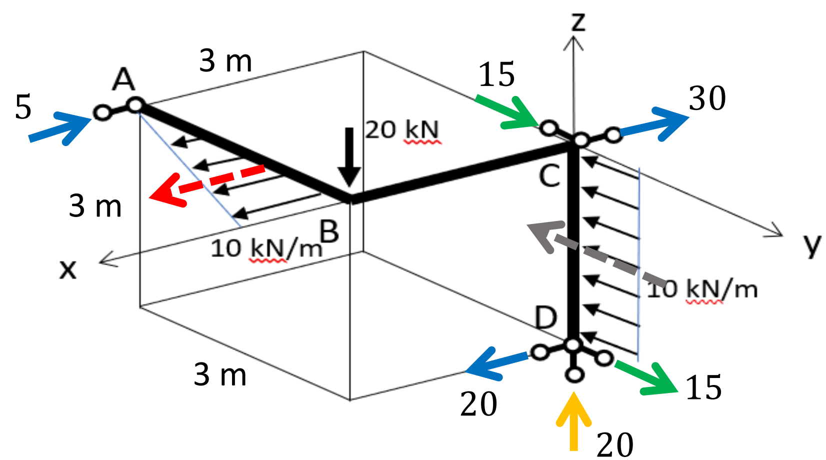


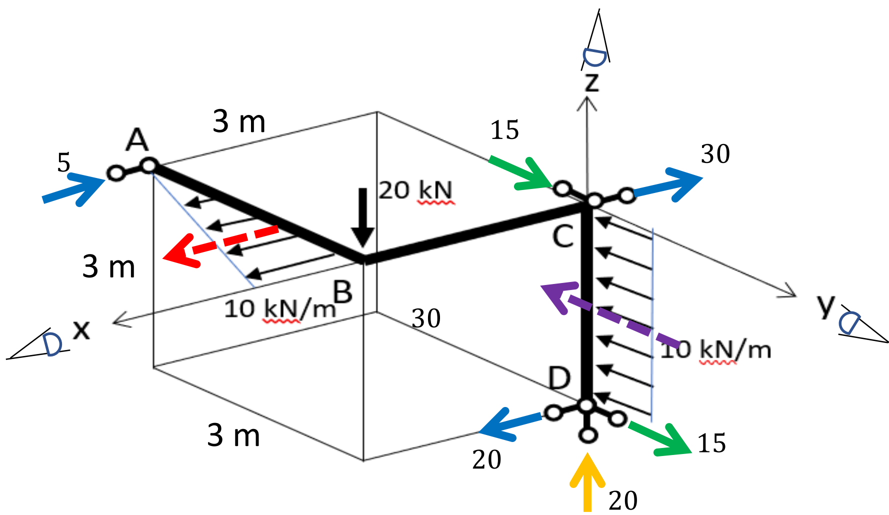
$$\boxed{10\frac{kN}{m} * 3m \div 2 = 15\ kN}$$

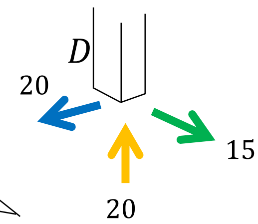


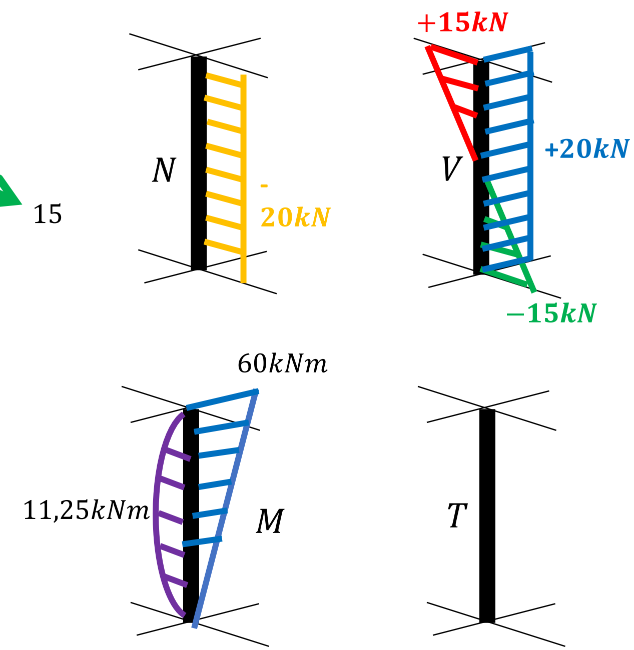
$$\boxed{10\frac{kN}{m} * 3m = 30\ kN}$$

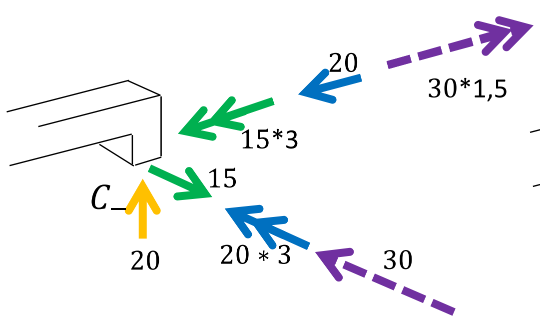
$$\begin{cases}
\sum X = 0 = X_A + 15 + X_C + X_D \Longrightarrow X_C = -30kN \\
\sum Y = 0 = Y_C - 30 + Y_D \Longrightarrow Y_C = 15kN \\
\sum Z = 0 = -20 + Z_D \Longrightarrow Z_D = 20kN \\
\sum M_x = 0 = -30 * 1{,}5 + Y_D * 3 \Longrightarrow Y_D = 15kN \\
\sum M_y = 0 = 20 * 3 - X_D * 3 \Longrightarrow X_D = 20kN \\
\sum M_z = 0 = X_A * 3 + 15 * 1 \Longrightarrow X_A = -5kN
\end{cases}$$

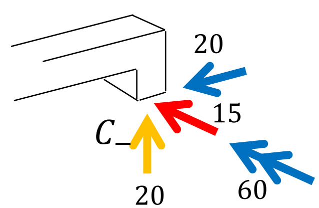












$$\boxed{\frac{pl^2}{8} = \frac{10 * 3^2}{8} = 11{,}25 kNm}$$

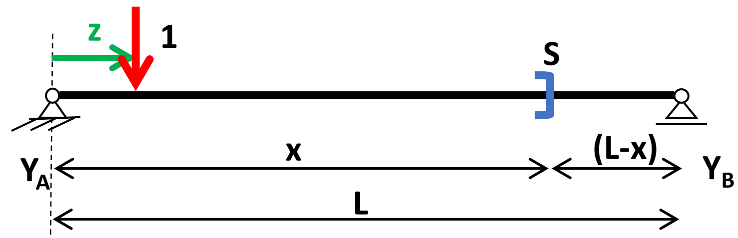
LINHAS DE INFLUÊNCIA

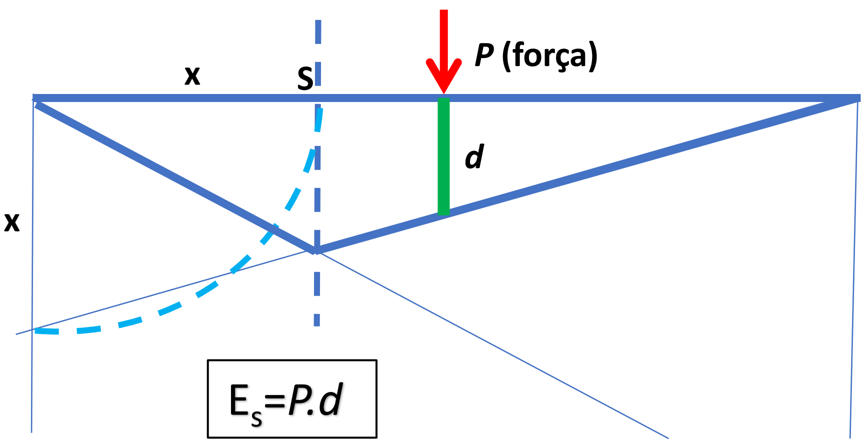
Definição

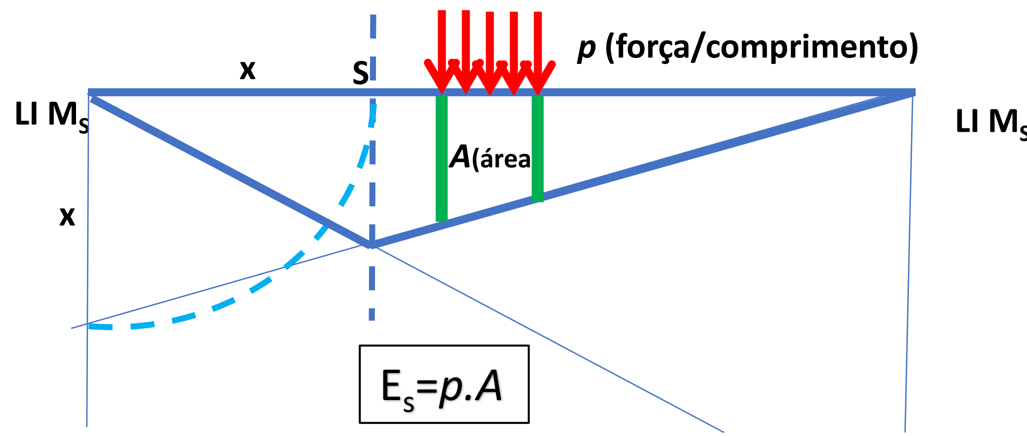
Linha de influência de um esforço E_s na seção fixa S de uma viga é o diagrama que fornece E_s produzido por uma carga unitária móvel adimensional percorrendo toda a extensão da viga.

E_s é a reação do apoio ou a força cortante ou o momento fletor

ESFORÇOS PRODUZIDOS POR CARGAS CONCENTRADAS E POR CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDAS



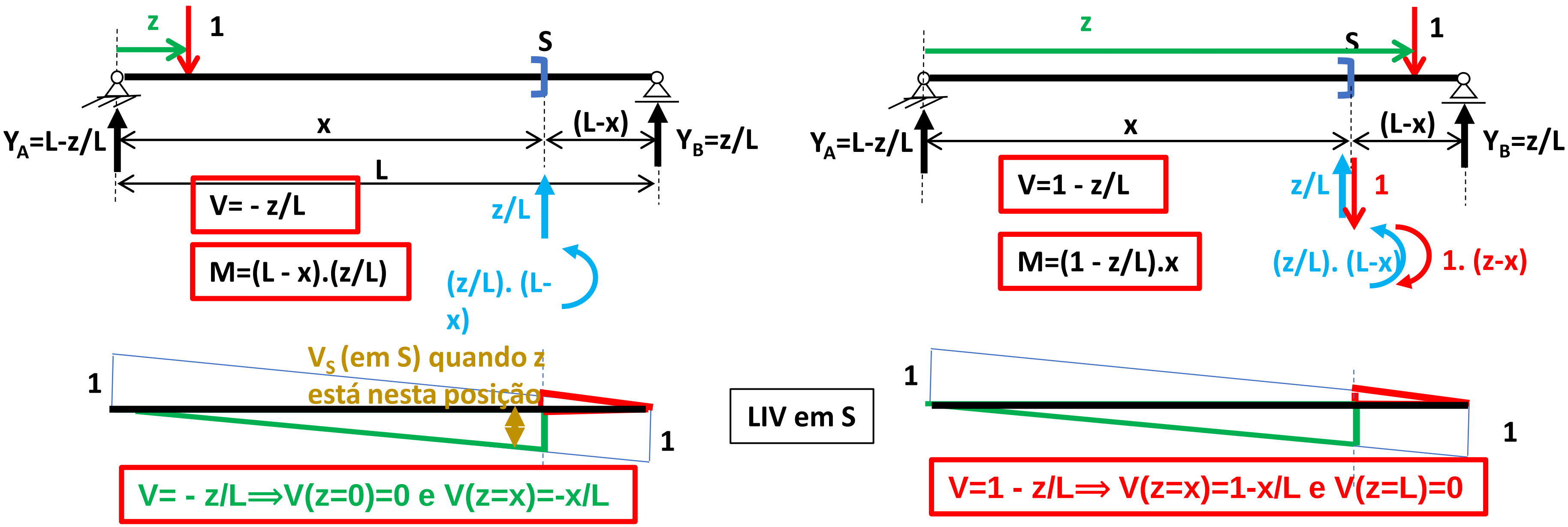




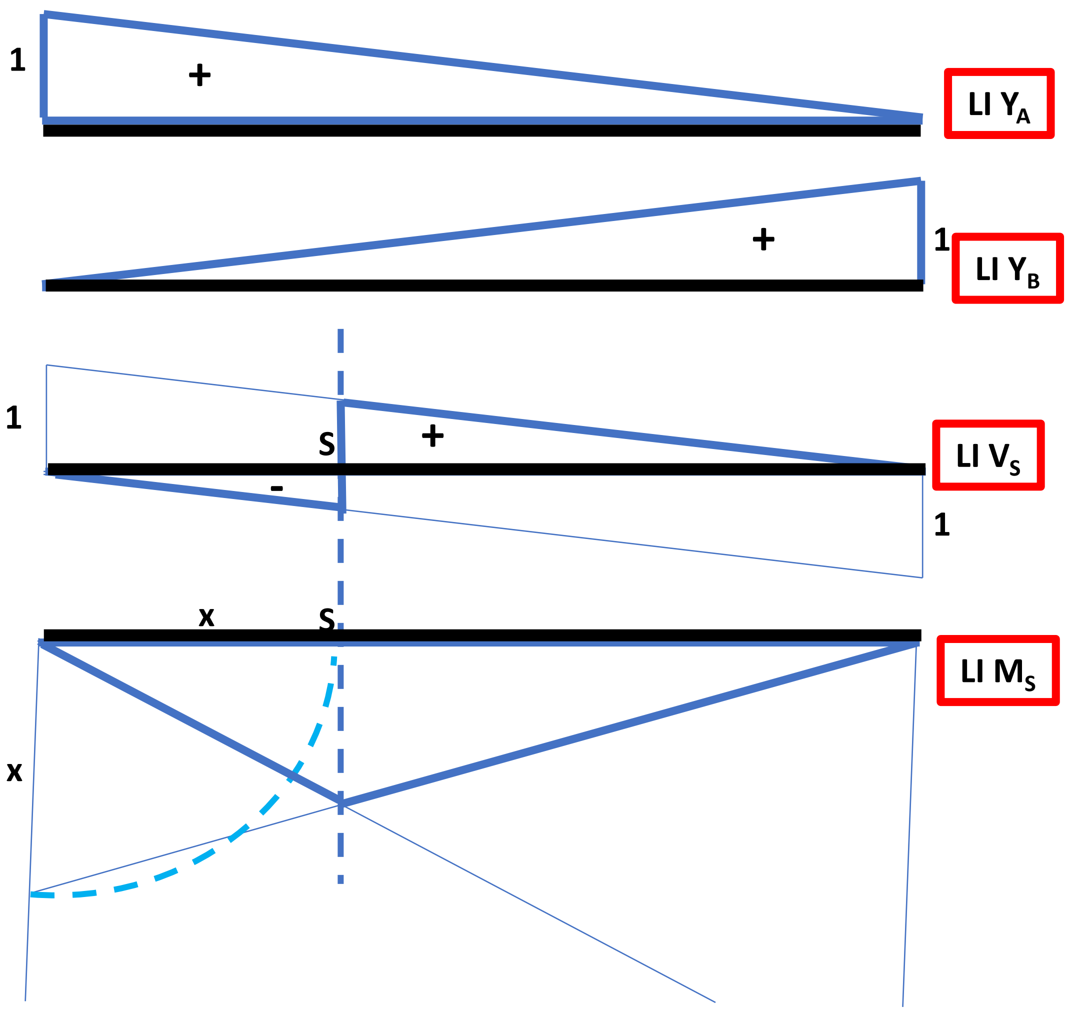
d é o Ms devido à força unitária adimensional

A é a área do Ms devido à atuação da carga distribuída

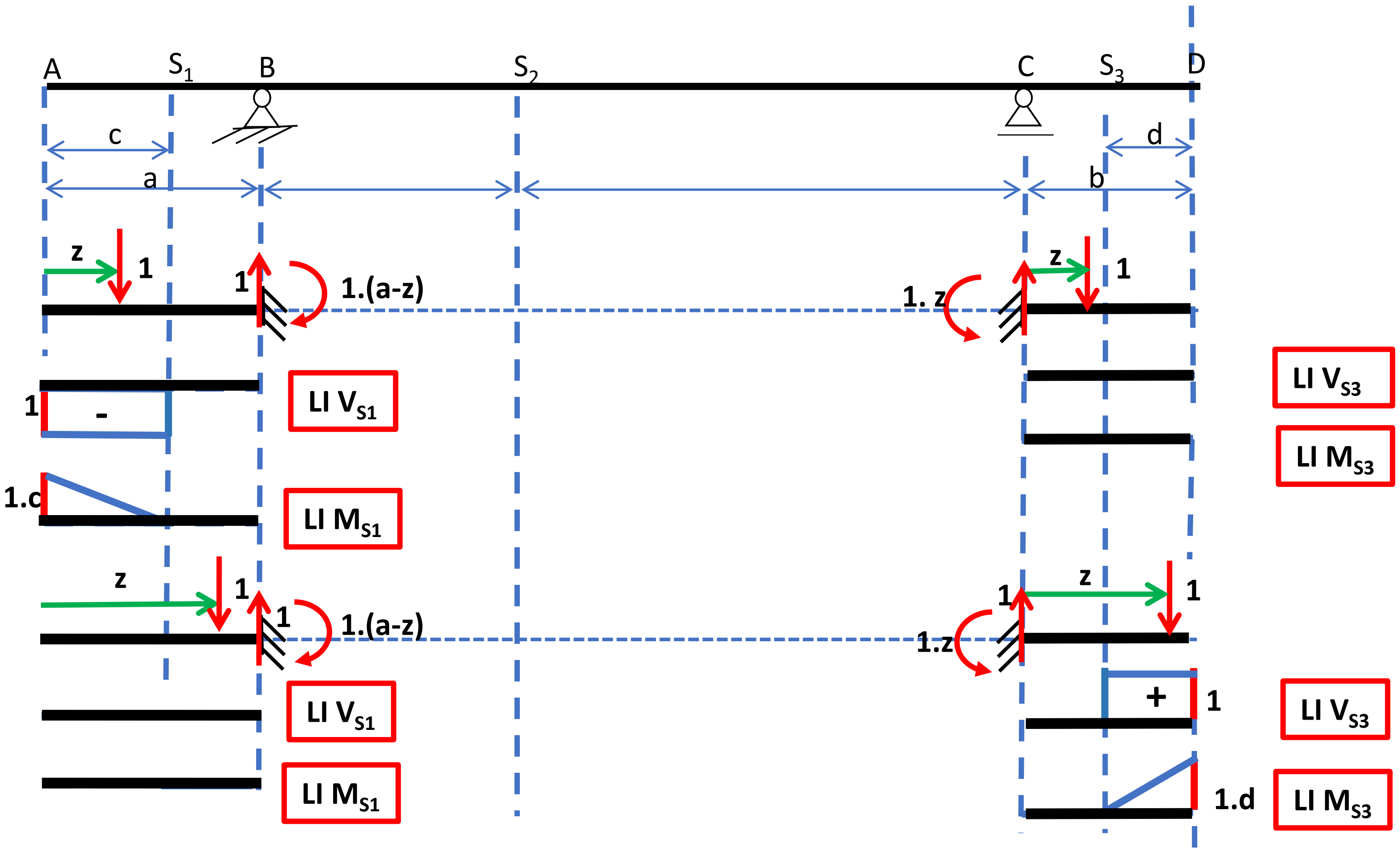
Seção S


z
1
S
x
(L-x)
Y_A=L-z/L
Y_B=z/L
L
V= - z/L
M=(L - x).(z/L)
z/L
(z/L). (L-x)
V_S (em S) quando z está nesta posição
1
1
V= - z/L⟹V(z=0)=0 e V(z=x)=-x/L
LIV em S
z
S
1
x
(L-x)
Y_A=L-z/L
Y_B=z/L
V=1 - z/L
M=(1 - z/L).x
z/L
1
(z/L). (L-x)
1. (z-x)
1
1
V=1 - z/L⟹ V(z=x)=1-x/L e V(z=L)=0

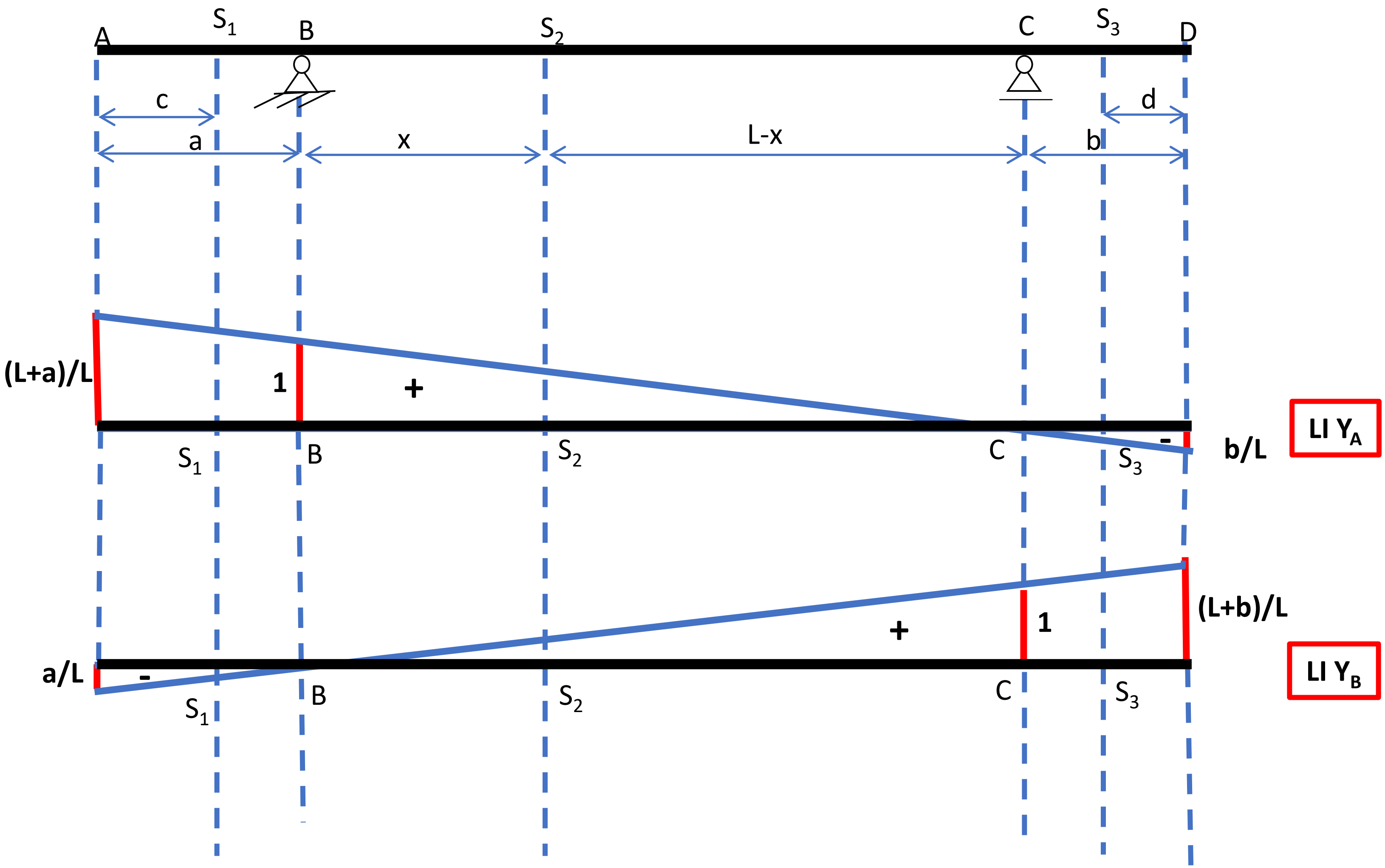
REGRA PRÁTICA para VIGA SIMPLESMENTE APOIADA

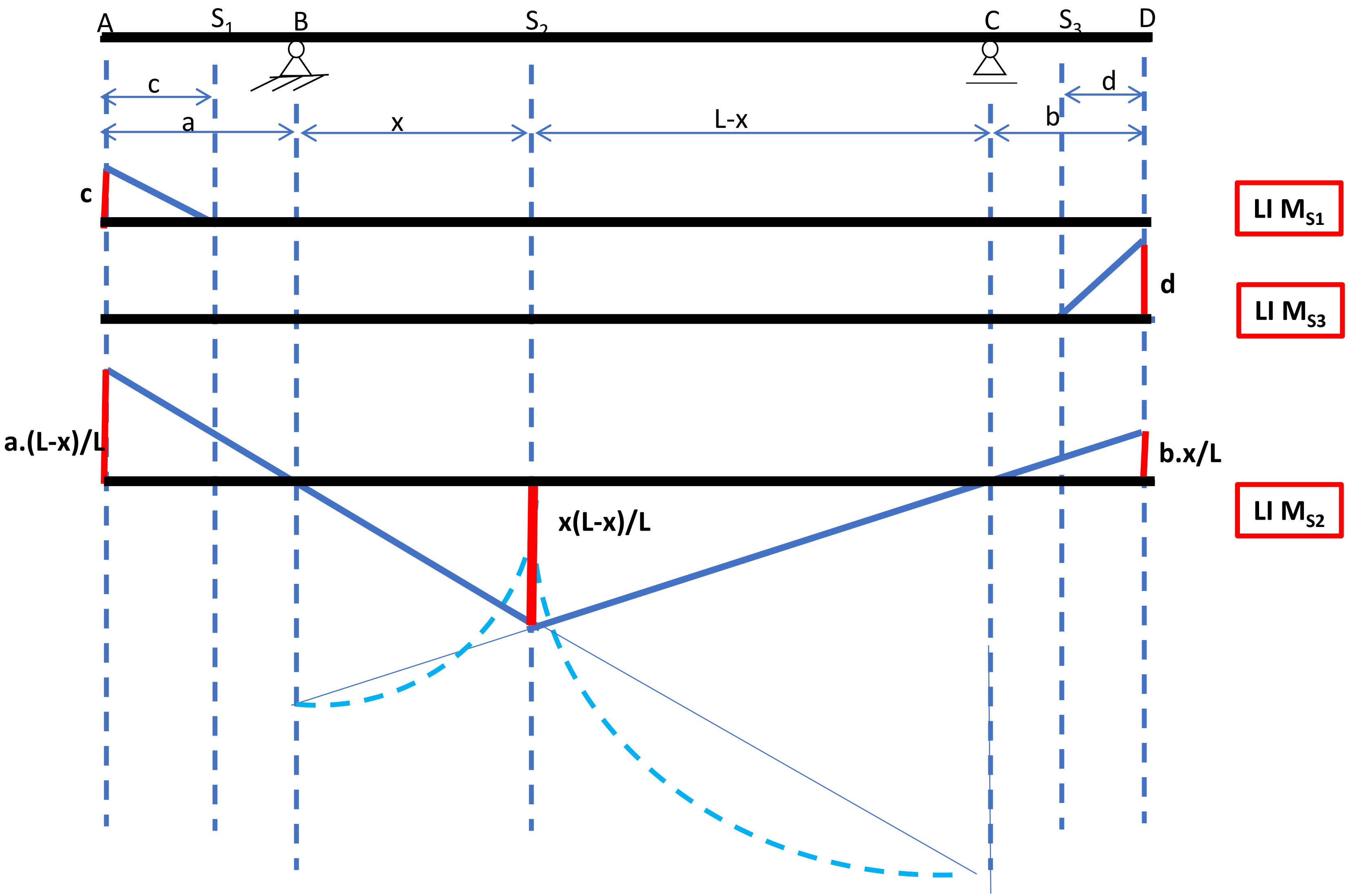


VIGA EM BALANÇO



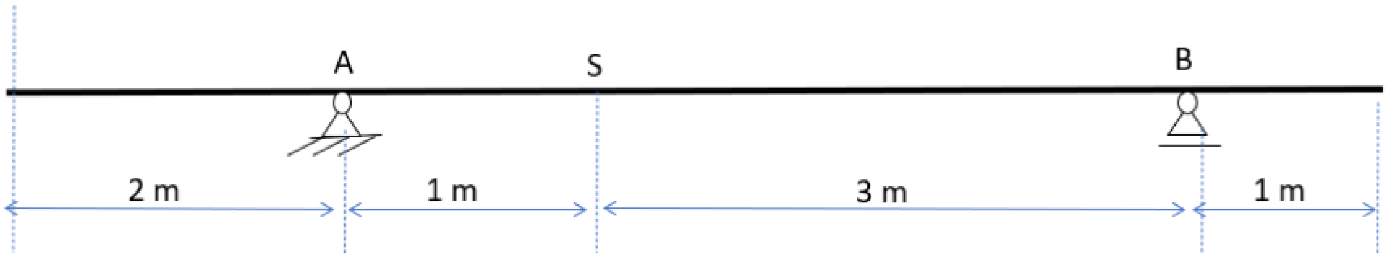
REGRA PRÁTICA para VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM BALANÇOS





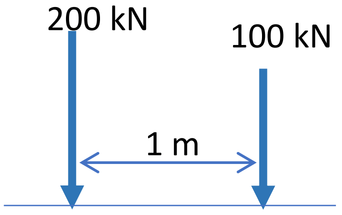
REGRA PRÁTICA para VIGA SIMPLESMENTE APOIADA COM BALANÇOS

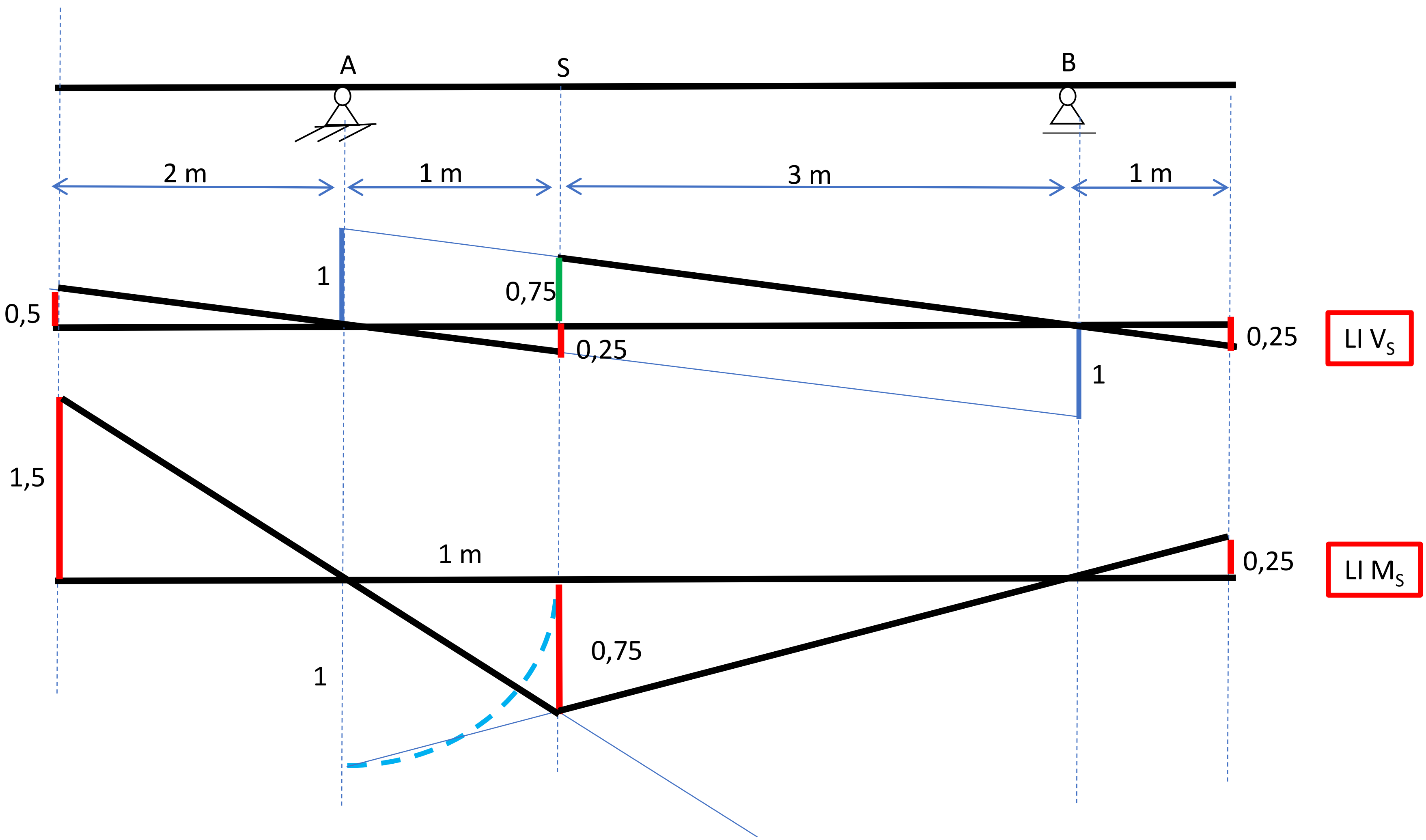
P2 -2006



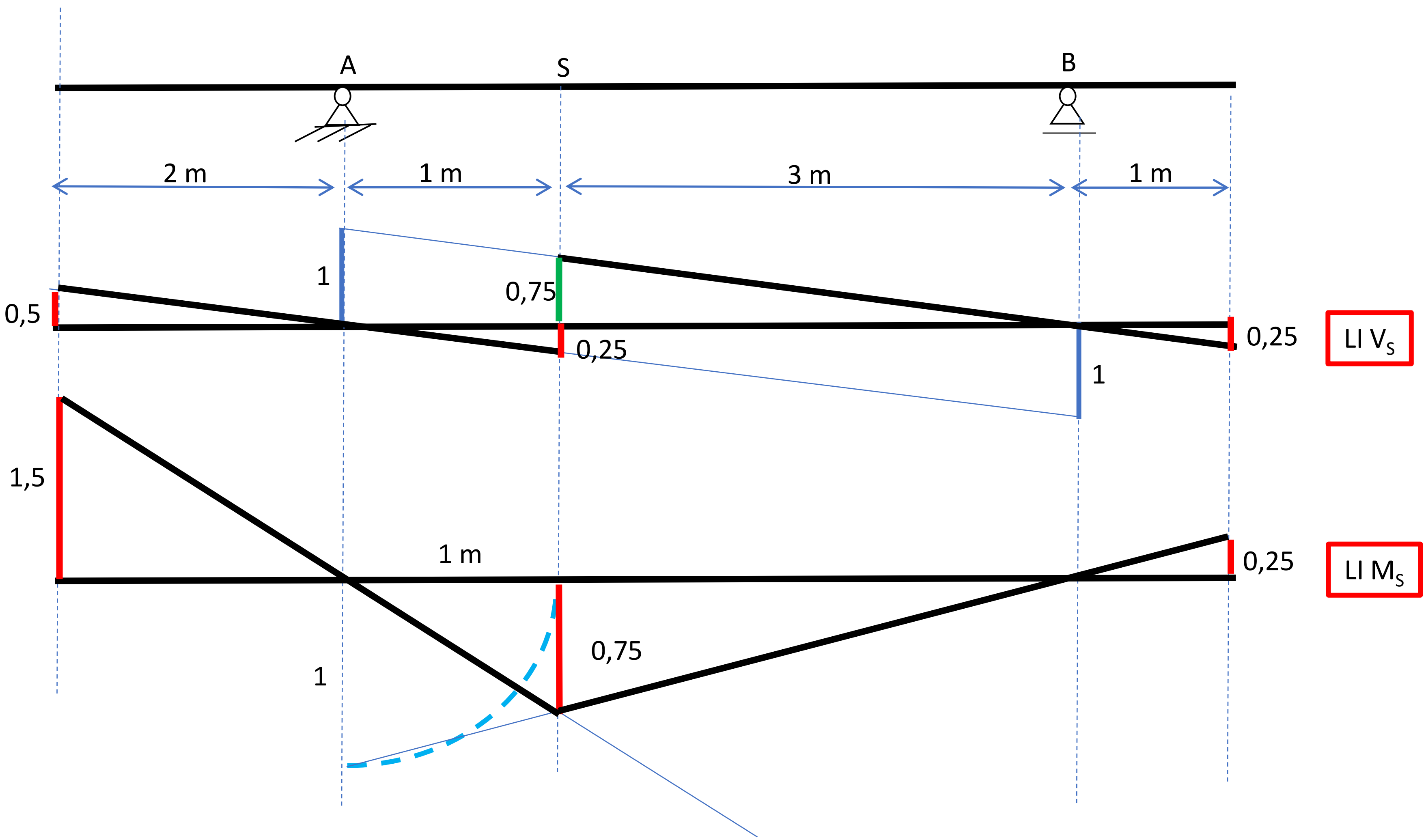
a) Desenhe a LI da força cortante V para a seção S
b) Desenhe a LI do momento fletor M para a seção S
c) Determine o máximo momento fletor positivo que pode ocorrer na seção S com o veículo-tipo e peso próprio fornecidos

pp= 20 kN/m

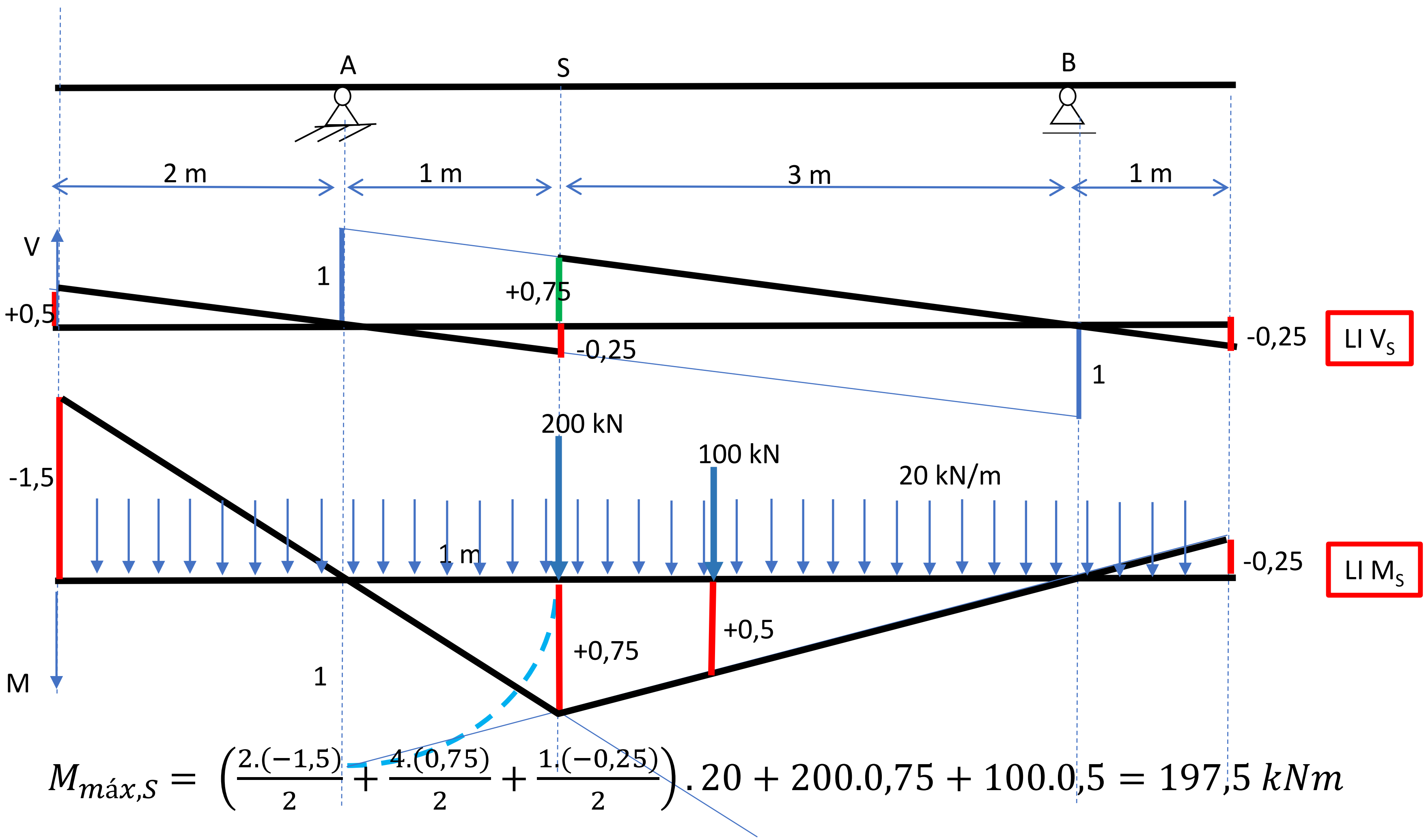




A
S
B
2 m
1 m
3 m
1 m
1
0,75
0,5
0,25
0,25
1
LI V$_S$
1,5
1 m
0,25
LI M$_S$
0,75
1



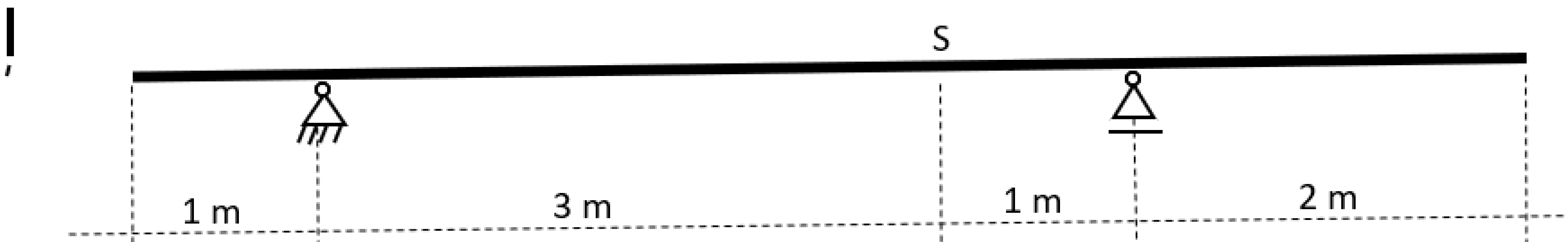
A
S
B
2 m
1 m
3 m
1 m
1
0,75
0,5
0,25
0,25
1
LI V_S
1,5
1 m
0,25
LI M_S
0,75
1



$$M_{máx,S} = \left(\frac{2.(-1{,}5)}{2} + \frac{4.(0{,}75)}{2} + \frac{1.(-0{,}25)}{2}\right).20 + 200.0{,}75 + 100.0{,}5 = 197{,}5\ kNm$$

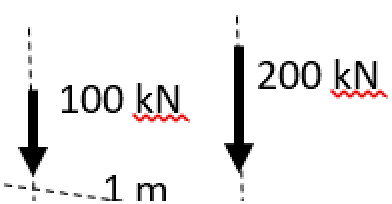
P2 -2023

Questão 1 (3,0 pontos) A viga de uma ponte que possui peso próprio pp = 30 kN/m e carga móvel de multidão pm = 10 kN/m deve ser dimensionada para a passagem do veículo-tipo indicado com segurança.



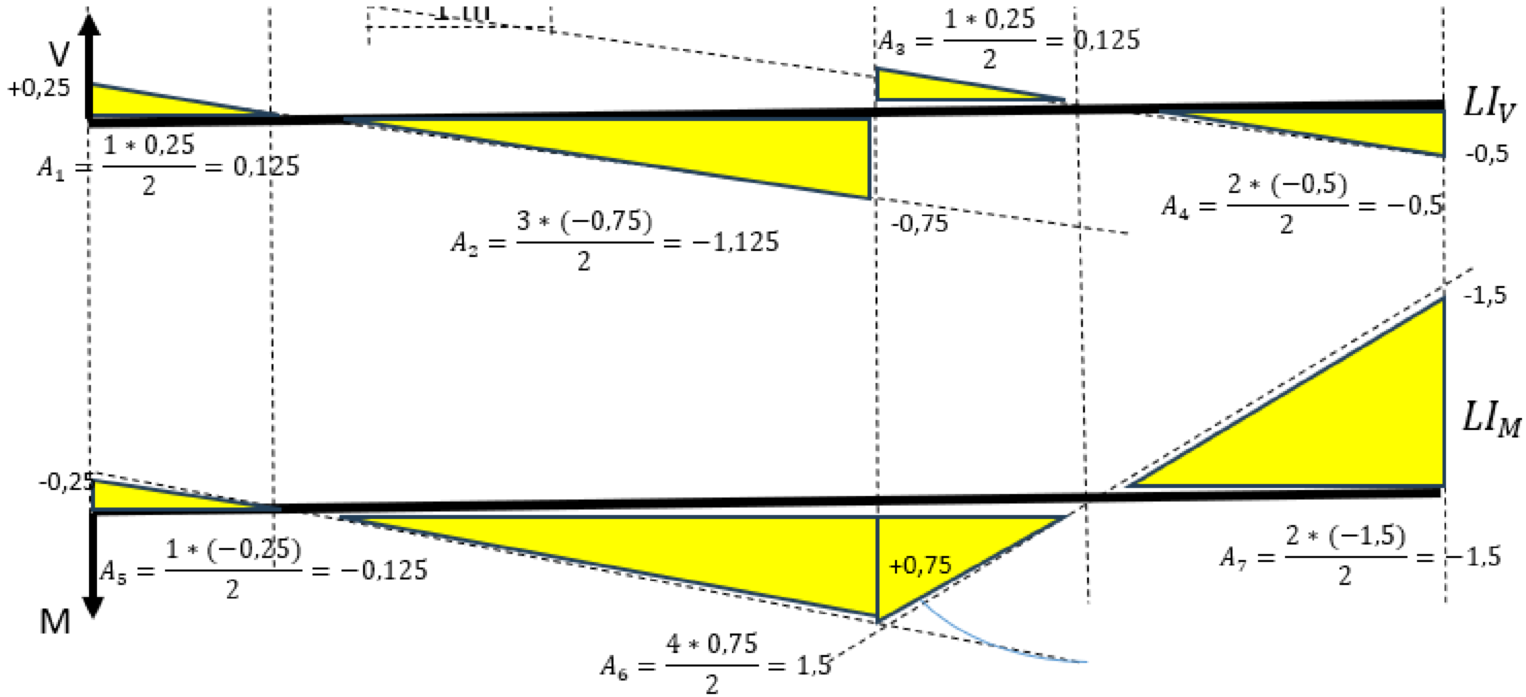
a) Desenhe a LI da força cortante V para a seção S.
b) Desenhe a LI do momento fletor M para a seção S.
c) Determine o máximo momento fletor positivo que pode ocorrer na seção S com o veículo-tipo, peso próprio, carga de multidão fornecidos.
d) Determine a máxima força cortante que pode ocorrer na seção S com o veículo-tipo, peso próprio, carga de multidão fornecidos.

Veículo-tipo



pp= 30 kN/m

pm=10 kN/m



$$M_{máx,S} = (A_5 + A_6 + A_7) * 30 + A_6 * 10 + 200 * 0,75 + 100 * 0,5 = +211,25\ kN$$

MOMENTO MÁXIMO É O MAIOR EM VALOR ABSOLUTO

MOMENTO POSITIVO É O DE TRAÇÃO (PARTE DE BAIXO)

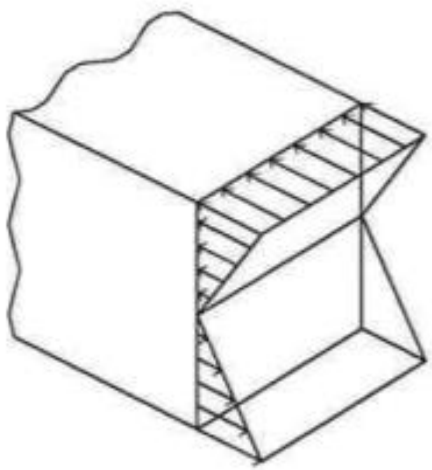
$$V_{máx,S} = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) * 30 + (A_1 + A_3) * 10 + 200 * 0,25 + 100 * 0 = +11,25\ kN$$

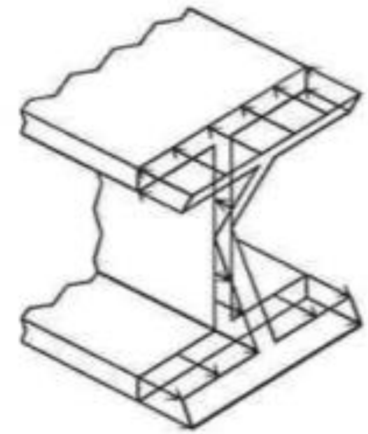
CORTANTE MÁXIMA É O MAIOR EM VALOR ABSOLUTO

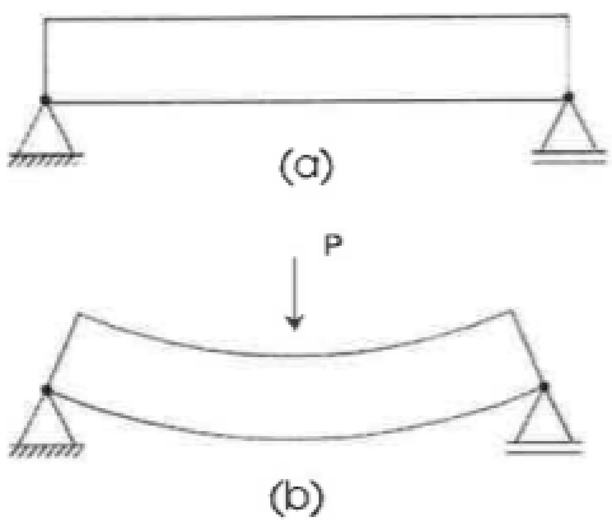
$$V_{mín,S} = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) * 30 + (A_2 + A_4) * 10 + 200 * (-0,75) + 100 * (-0,5) = -257,5\ kN$$

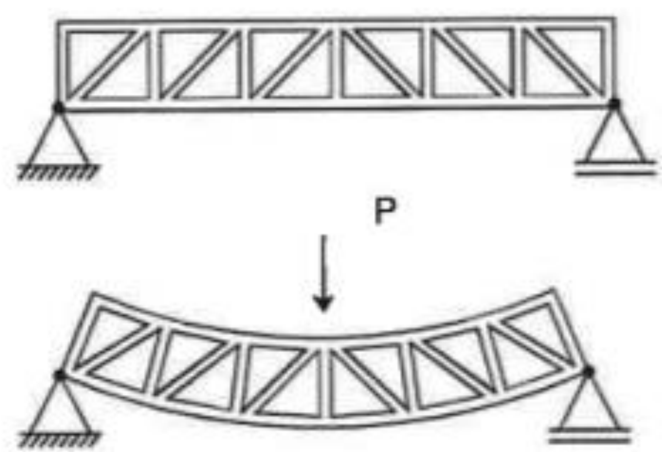
CORTANTE MÁXIMA EM MÓDULO DEVE CONSIDERAR OS VALORES NEGATIVOS

TRELIÇAS





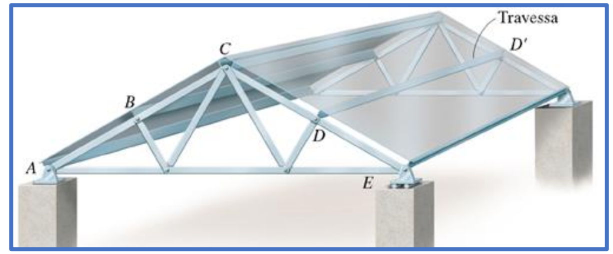


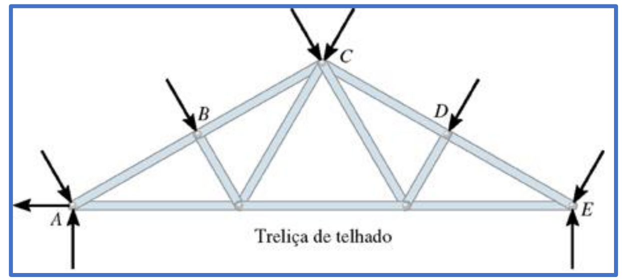


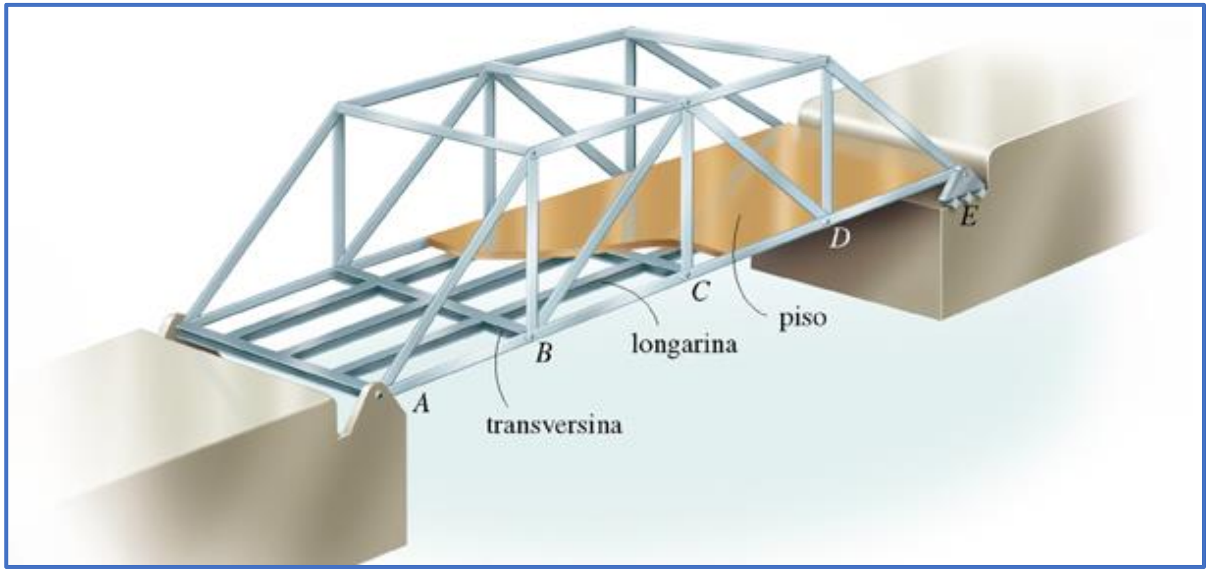
TRELIÇAS: São estruturas formadas por barras ligadas por articulações que trabalham predominantemente sob a ação de forças normais.

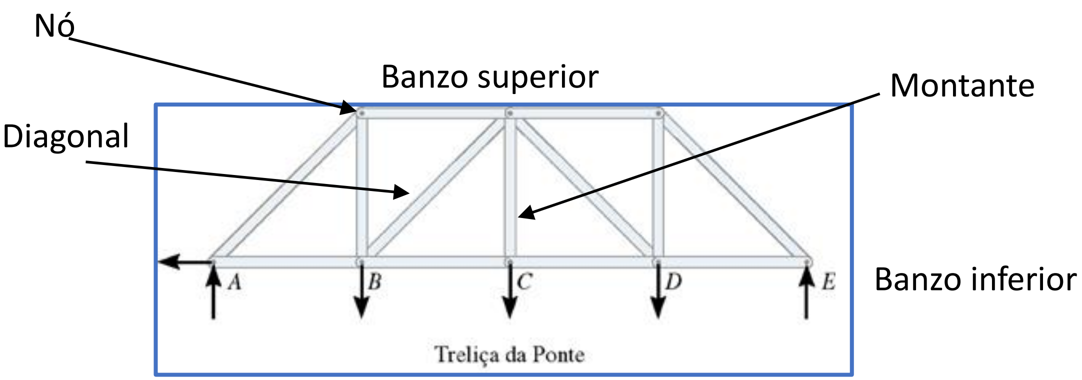
HIPÓTESES:

a) **As barras se ligam aos nós por articulações perfeitas.**
b) **As cargas e as reações de vínculos aplicam-se apenas nos nós da treliça.**
c) **O eixo das barras coincide com a reta que une os nós.**






A
B
C
D
E
transversina
longarina
piso


Nó
Banzo superior
Montante
Diagonal
Banzo inferior
A
B
C
D
E
Treliça da Ponte

Na prática:

- **os nós não são articulações perfeitas;**

- **Pelo menos o peso próprio é uma carga aplicada ao longo do eixo das barras;**

- **Os esforços secundários gerados por essas divergências não são significativos.**

Treliças planas são as que possuem os eixos de todas as suas barras em um mesmo plano, no qual também se situam todas as forças externas que as solicitam.

Treliças espaciais são as que não possuem os eixos de todas as suas barras situados em um mesmo plano.

Treliça de escoramento dos segmentos
do tabuleiro da ponte
(fotografia de Anderson Glauco Benite)

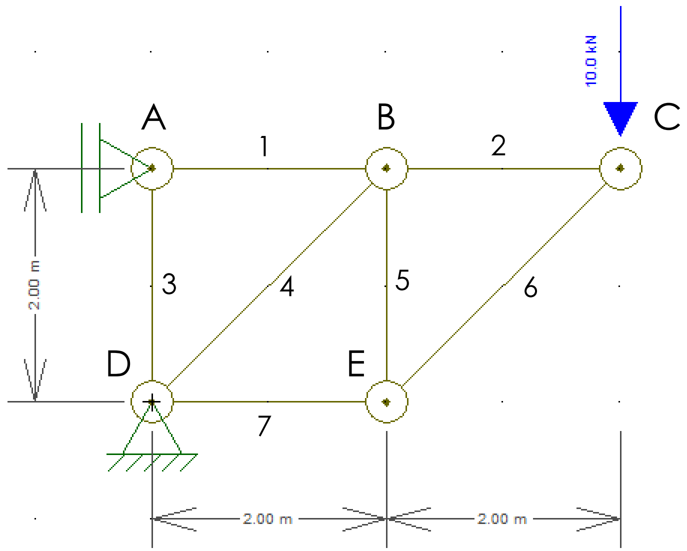
MÉTODO DO EQUILÍBRIO DOS NÓS

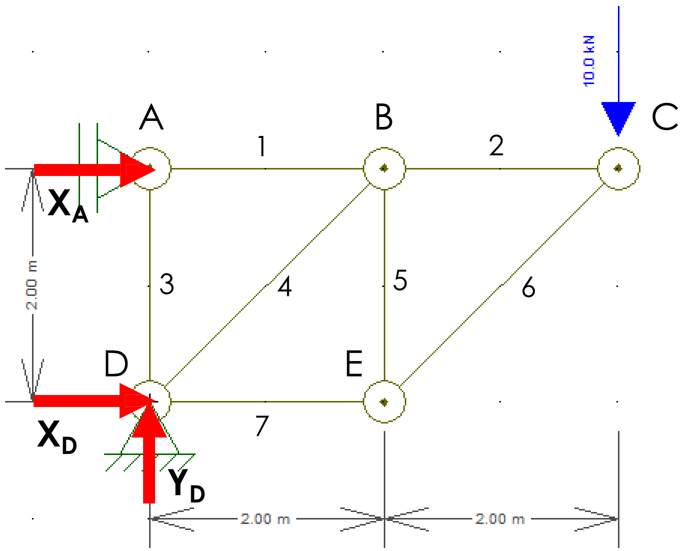
- **Consideram-se como incógnitas os esforços normais nas barras**
- **Se a estrutura está em equilíbrio, então seus nós também estão em equilíbrio**
- **Apenas duas equações de equilíbrio podem ser aplicadas para cada nó, por ser articulado nas barras**
- **Em treliças simples isostáticas, é possível explicitar as incógnitas uma a uma pelo equilíbrio dos nós**
- **Procedimento:**
  - **Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido**
  - **Cálculo sucessivo dos esforços nas barras, pelo equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas**
  - **No final da resolução, surgem três equações de verificação**

Para os nós:
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

Exercício

Calcule os esforços nas barras da treliça ilustrada.





GRINTER

Reações de apoio

$\Sigma F_y = 0$

$Y_D - 10 = 0$

$Y_D = 10$ kN

$\Sigma M_D = 0$

$- X_A * 2 - 10 * 4 = 0$

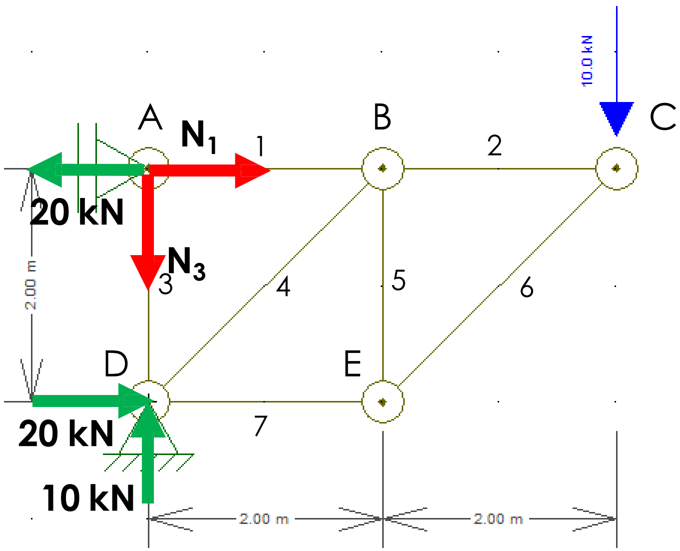
$X_A = - 20$ kN

$\Sigma F_x = 0$

$X_A + X_D = 0$

$- 20 + X_D = 0$

$X_D = 20$ kN



Equilíbrio do nó A

$\Sigma F_x = 0$

$N_1 - 20 = 0$

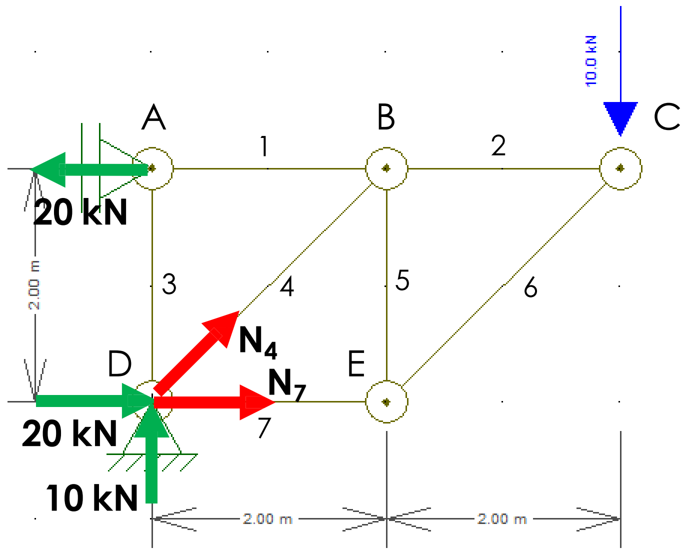
$N_1 = 20$ kN

$\Sigma F_y = 0$

$-N_3 = 0$

$N_3 = 0$

GRINTER



Equilíbrio do nó D

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_4 * \text{sen}45^{\circ} + 10 = 0$$

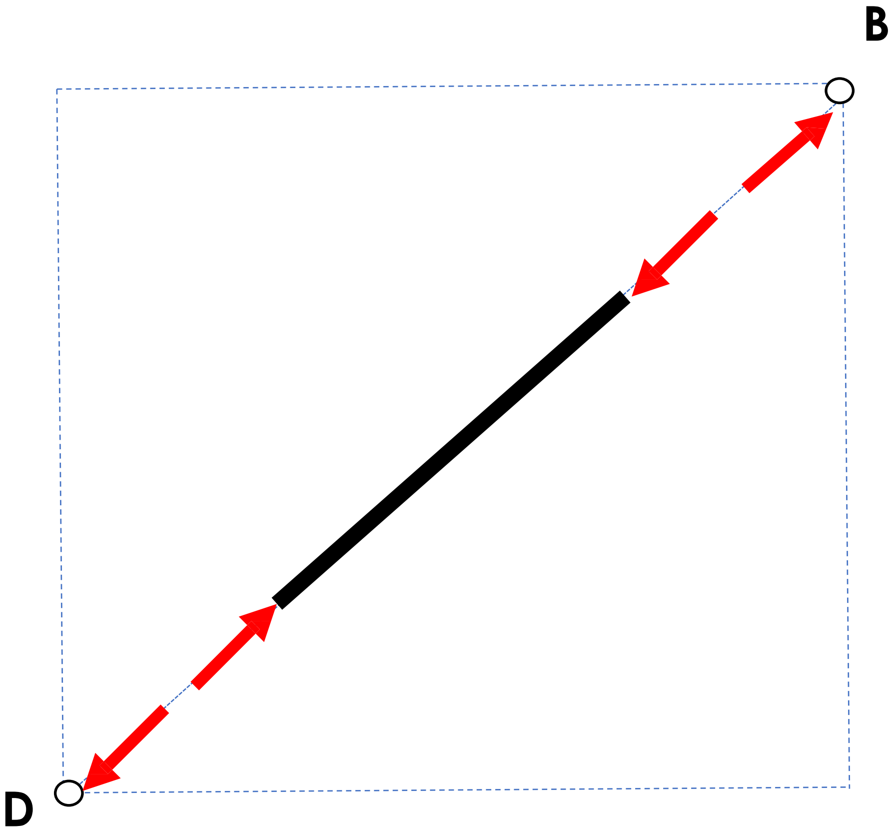
$$N_4 = -14{,}1 \text{ kN}$$

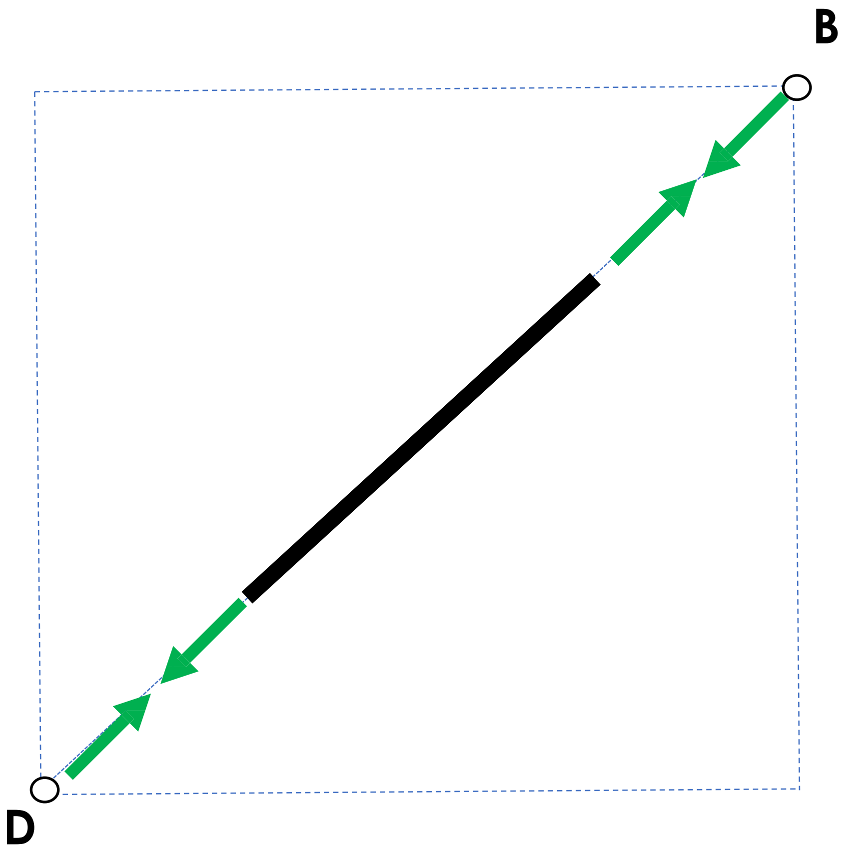
$$\Sigma F_x = 0$$

$$N_7 + 20 + N_4 * \cos 45^{\circ} = 0 \quad N_7 + 20 - 10 = 0$$

$$N_7 = -10 \text{ kN}$$

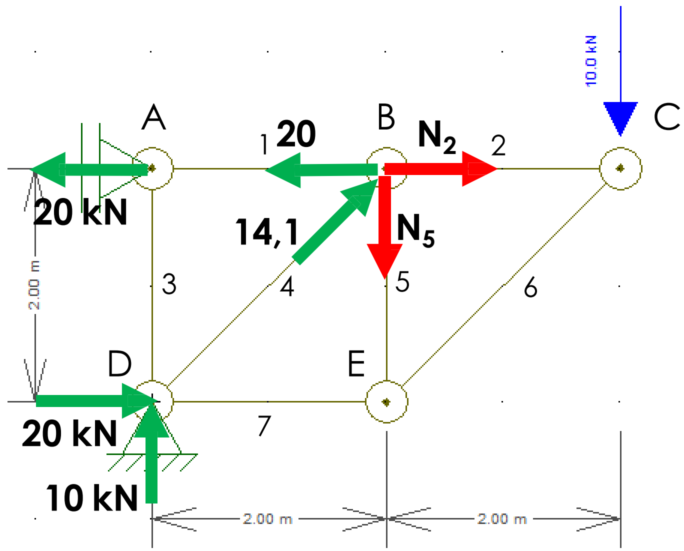
GRINTER





TRAÇÃO NO NÓ = TRAÇÃO NA BARRA

COMPRESSÃO NO NÓ = COMPRESSÃO NA BARRA



GRINTER

Equilíbrio do nó B

$\Sigma F_y = 0$

$-N_5 + 14{,}1 * sen45^{o} = 0$

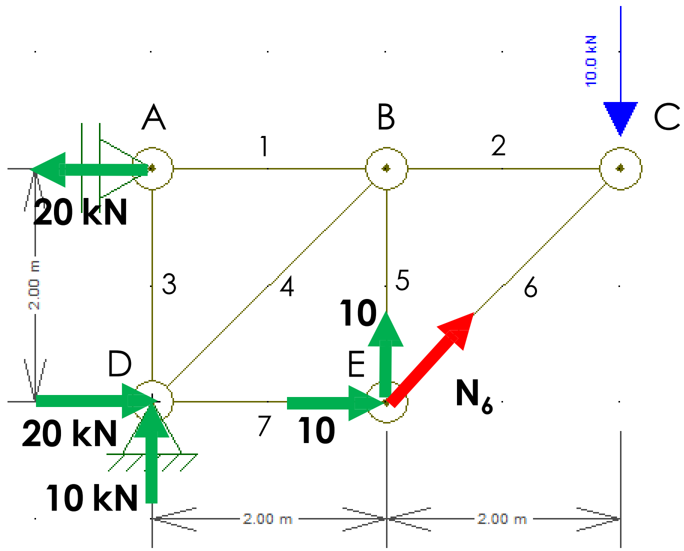
$N_5 = 10\ kN$

$\Sigma F_x = 0$

$N_2 - 20 + 14{,}1 * cos45^{o} = 0$

$N_2 - 10 = 0$

$N_2 = 10\ kN$



Equilíbrio do nó E

$\Sigma F_y = 0$

$N_6 * sen45° + 10 = 0$

$N_6 = -14{,}1$ kN

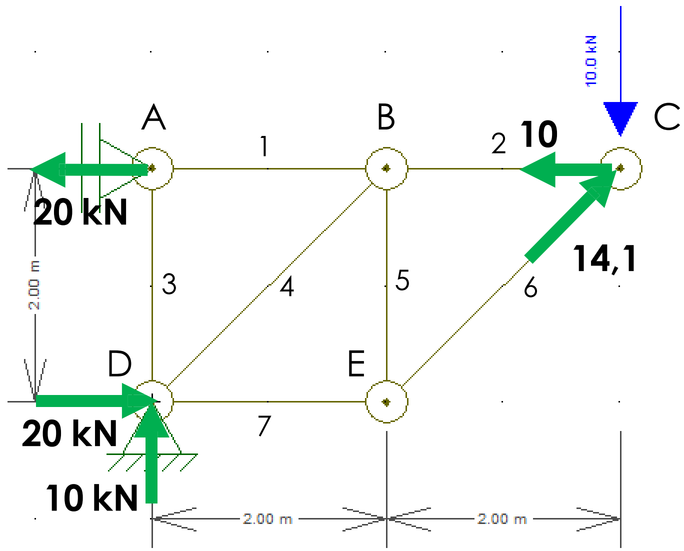
Verificação 1

$\Sigma F_x = 0$

$N_6 * cos45° + 10 = 0$

$-10 + 10 = 0$ OK

GRINTER



Equilíbrio do nó C

Verificação 2

$\Sigma F_y = 0$

$14{,}1 * sen45^{o} - 10 = 0$

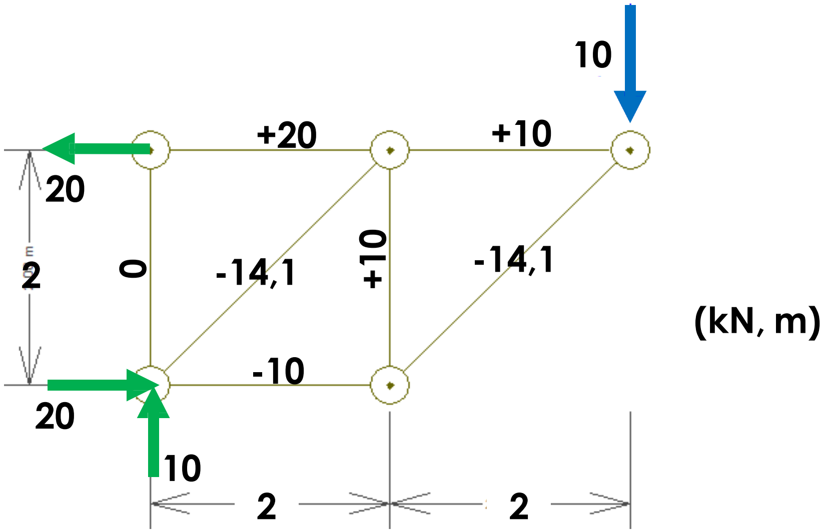
$10 - 10 = 0$ **OK**

Verificação 3

$\Sigma F_x = 0$

$14{,}1 * cos45^{o} - 10 = 0$

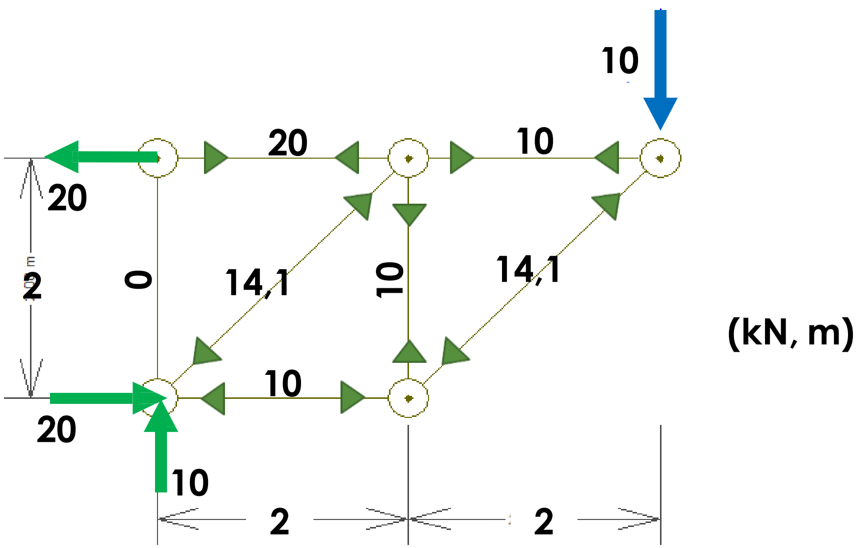
$10 - 10 = 0$ **OK**



Exemplo

Representação dos resultados do exemplo do Método do Equilíbrio dos Nós.

N_1	+ 20
N_2	+10
N_3	0
N_4	-14,1
N_5	+10
N_6	-14,1
N_7	-10



MÉTODO DE RITTER

- **Consideram-se como incógnitas os esforços normais nas barras**
- **Se a estrutura está em equilíbrio, então qualquer parte desta estrutura, separada por um corte imaginário, também está em equilíbrio**
- **Para uma parte da estrutura que contenha pelo menos dois nós, as três equações de equilíbrio no plano podem ser aplicadas**
- **Em treliças simples ou compostas, é comum encontrar uma linha de corte ("corte de Ritter") que explicite três incógnitas, que podem ser obtidas pelo equacionamento do equilíbrio de uma das partes da treliça, destacada pelo corte**
- **É comum mesclar o Método de Ritter com o Método do Equilíbrio dos Nós, explicitando as incógnitas de forma conveniente**

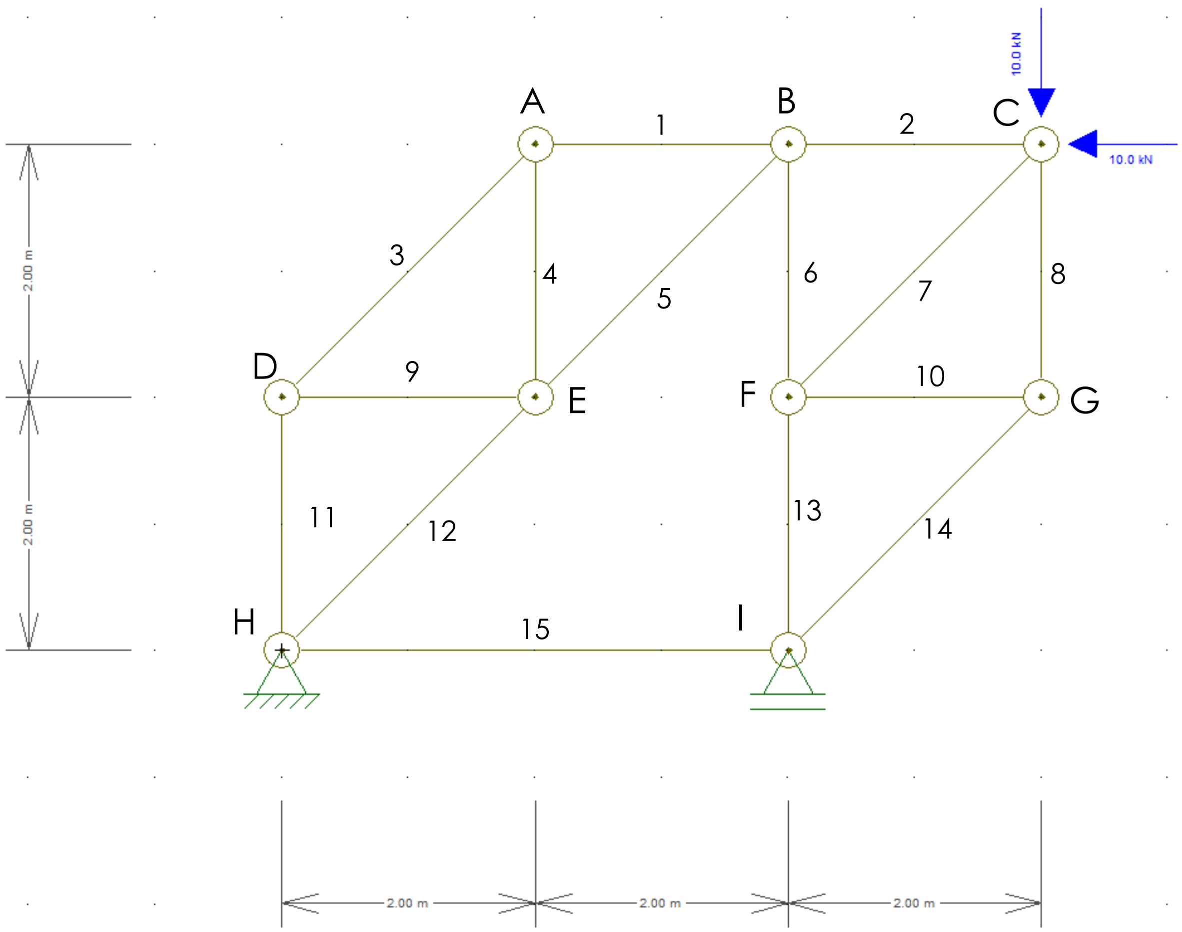
Para partes da estrutura:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_O = 0$$

MÉTODO DE RITTER

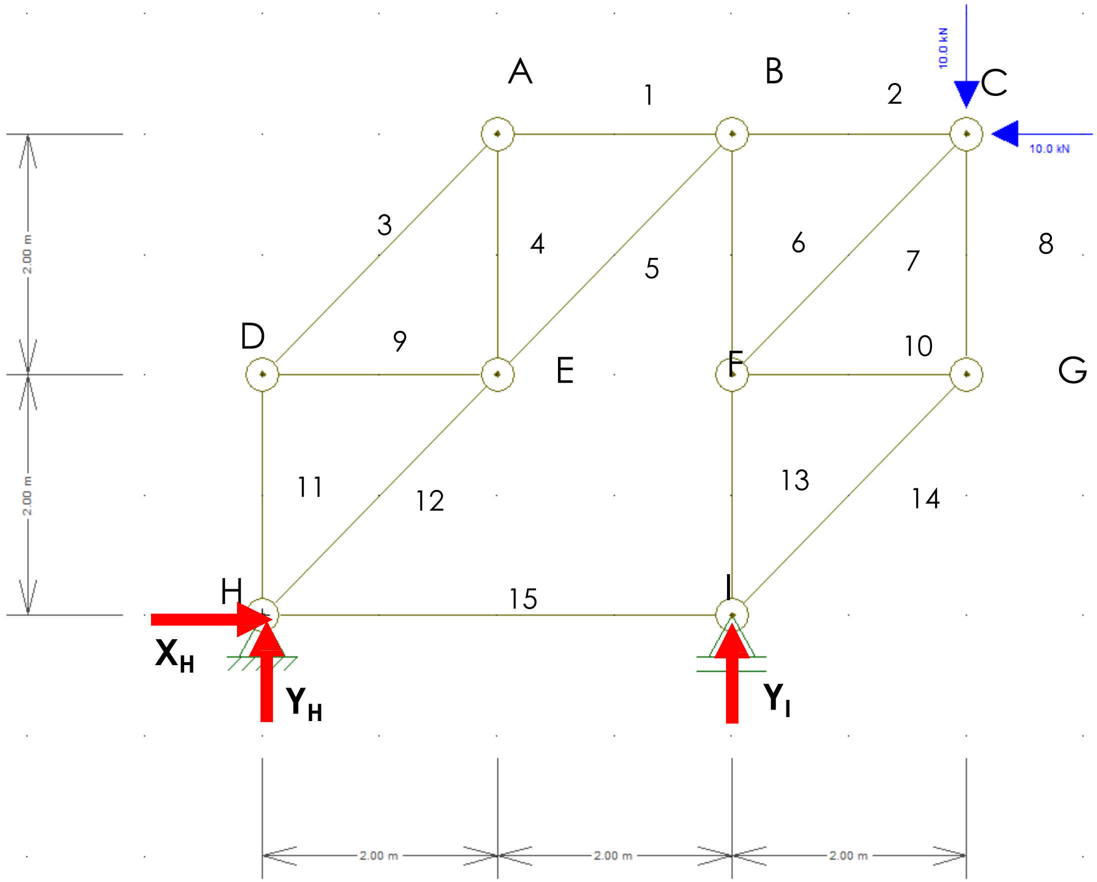
- **Procedimento:**
  - **Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido;**
  - **Corte da treliça em duas partes contendo pelo menos dois nós cada uma, com uma linha de corte que atravesse três barras;**
  - **Cálculo dos esforços nas três barras onde houve o corte, pelo equacionamento do equilíbrio de uma das partes cortadas;**
  - **Em seguida, pelo Método dos Nós, cálculo sucessivo dos esforços das barras, pelo equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas;**
  -
  - **No final da resolução, surgem três equações de verificação**

Para partes da estrutura: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_O = 0$



Exercício

Calcule os esforços nas barras 1, 5 e 15 da treliça ilustrada.



Reações de apoio

$\Sigma F_x = 0$

$X_H - 10 = 0$

$X_H = 10 \text{ kN}$

$\Sigma M_H = 0$

$Y_I * 4 + 10 * 4 - 10 * 6 = 0$

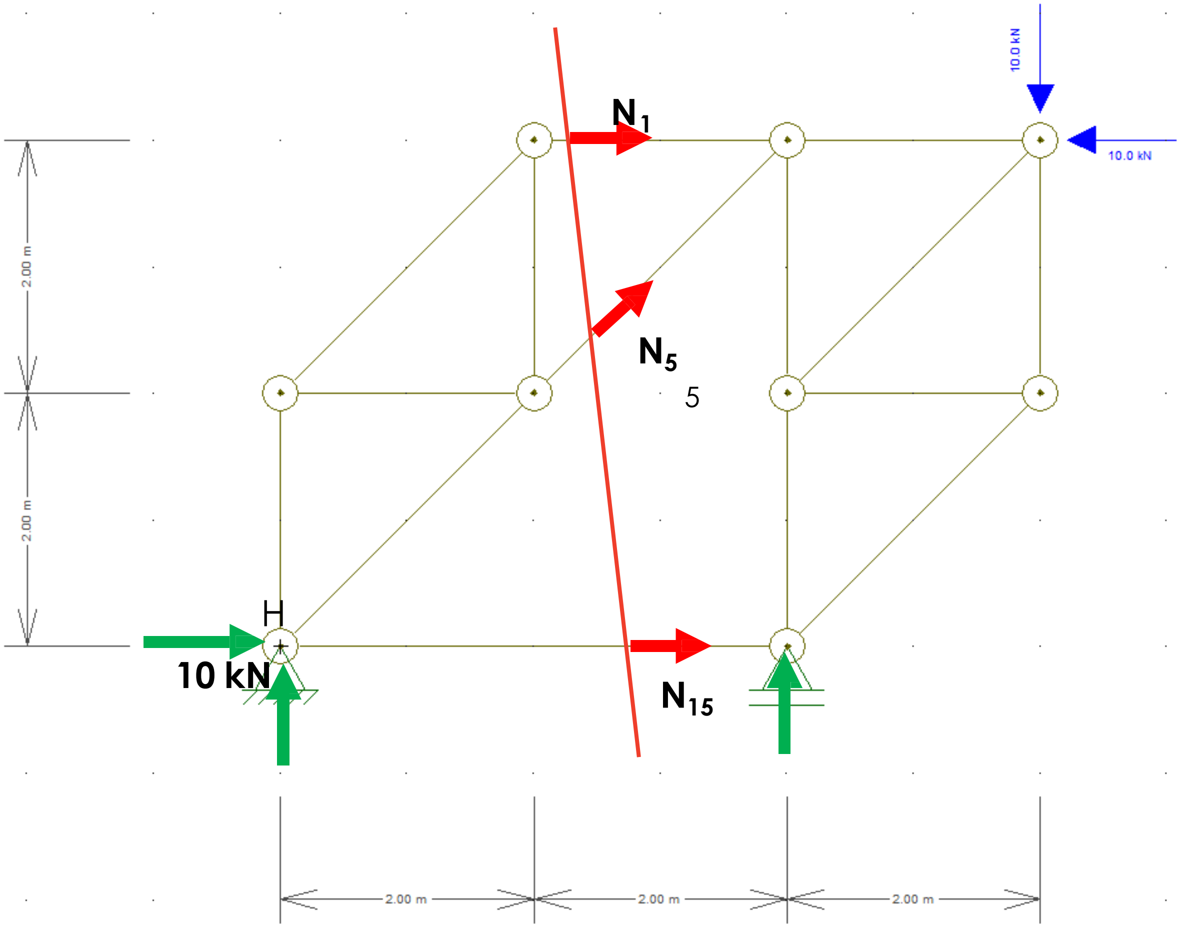
$Y_I = 5 \text{ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_H - 10 + Y_I = 0$

$Y_H - 10 + 5 = 0$

$Y_H = 5 \text{ kN}$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_5 * sen45° + 5 = 0$

$N_5 = -7{,}1$ kN

$\Sigma M_H = 0$

GRINTER

$-N_1 * 4 = 0$

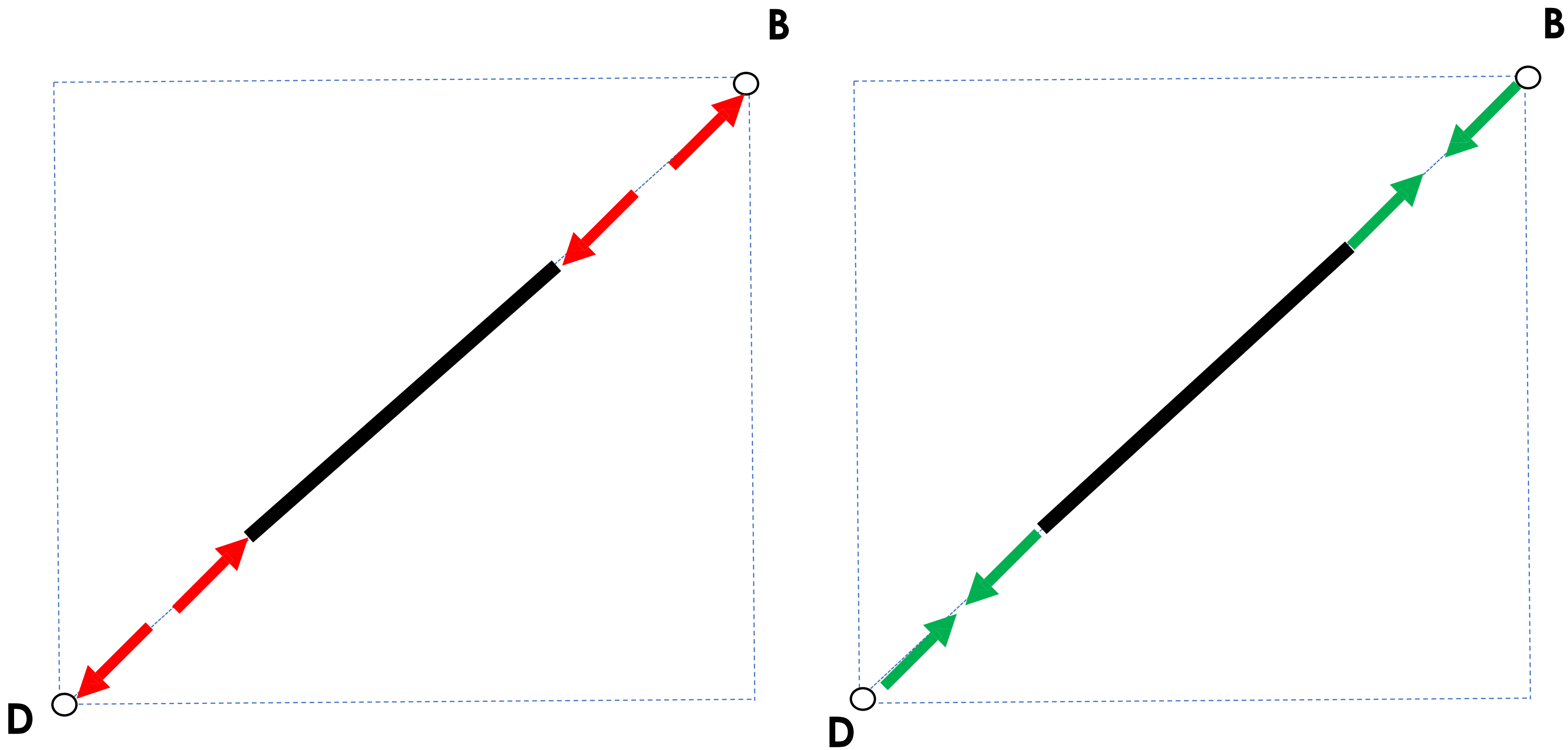
$N_1 = 0$

$\Sigma F_x = 0$

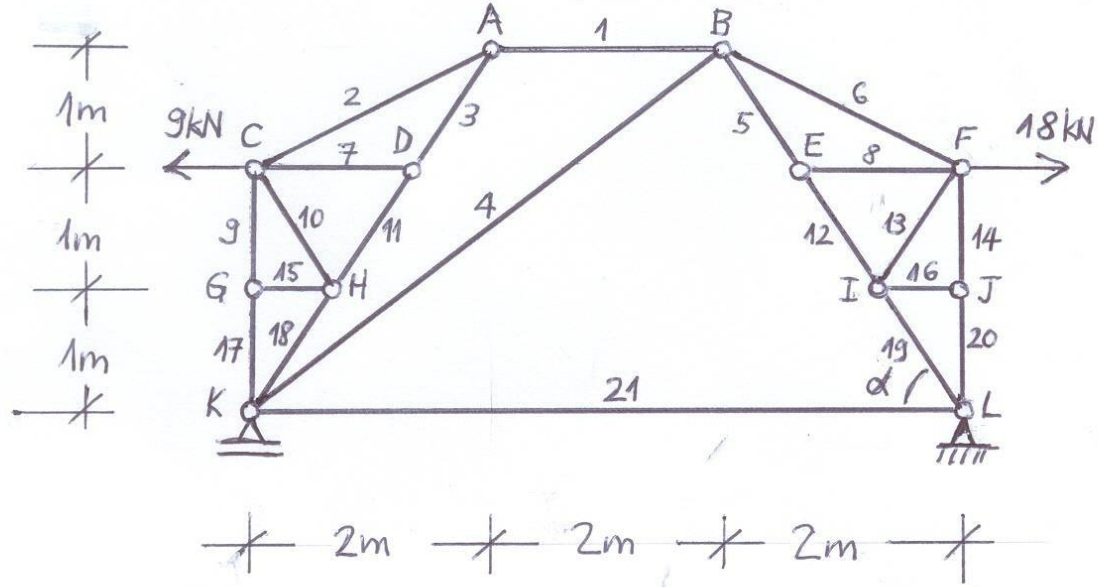
$N_1 + N_5 * cos45° + N_{15} + 10 = 0$

$0 - 7{,}1 * cos45° + N_{15} + 10 = 0$

$N_{15} = -5$ kN



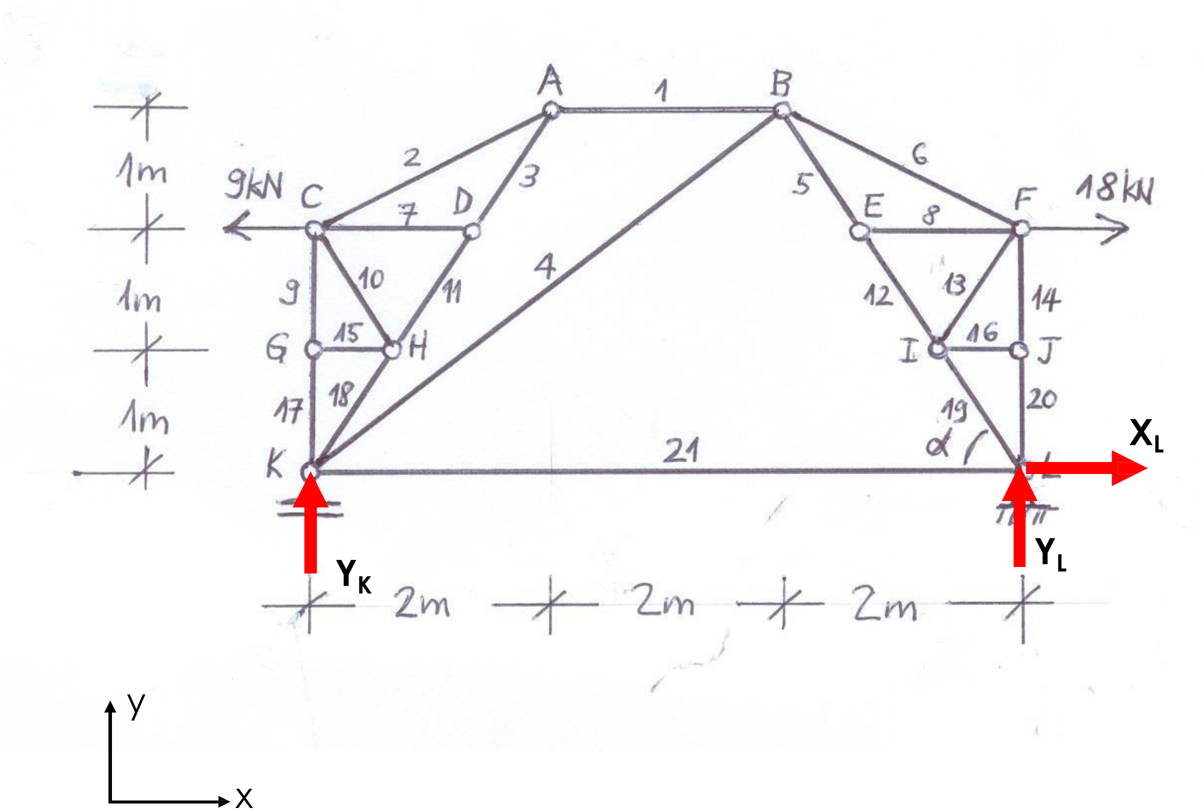
COMPRESSÃO NO NÓ, COMPRESSÃO NA BARRA **TRAÇÃO NO NÓ, TRAÇÃO NA BARRA**



Exercício

Calcule os esforços nas barras 1, 19, 20 e 21 da treliça ilustrada.

Dados: α=56,31˚, cosα=0,555; senα=0,832



14/04/2020

Reações de apoio

$\Sigma F_x = 0$

$X_L + 18 - 9 = 0$

$X_L = -9 \text{ kN}$

$\Sigma M_K = 0$

$Y_L * 6 + 9 * 2 - 18 * 2 = 0$

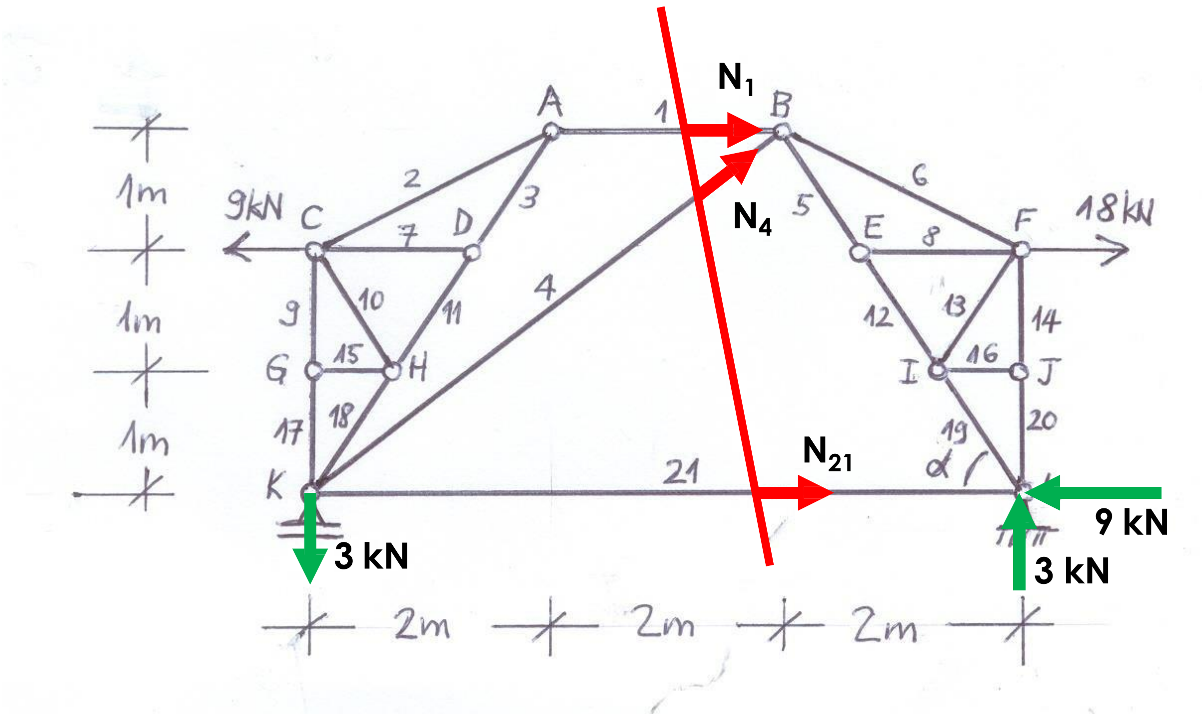
$Y_L = 3 \text{ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_K + Y_L = 0$

$Y_K + 3 = 0$

$Y_K = -3 \text{ kN}$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_4 * 3/5 - 3 = 0$

$N_4 = 5$ kN

$\Sigma M_K = 0$

$- N_1 * 3 + 9 * 2 = 0$

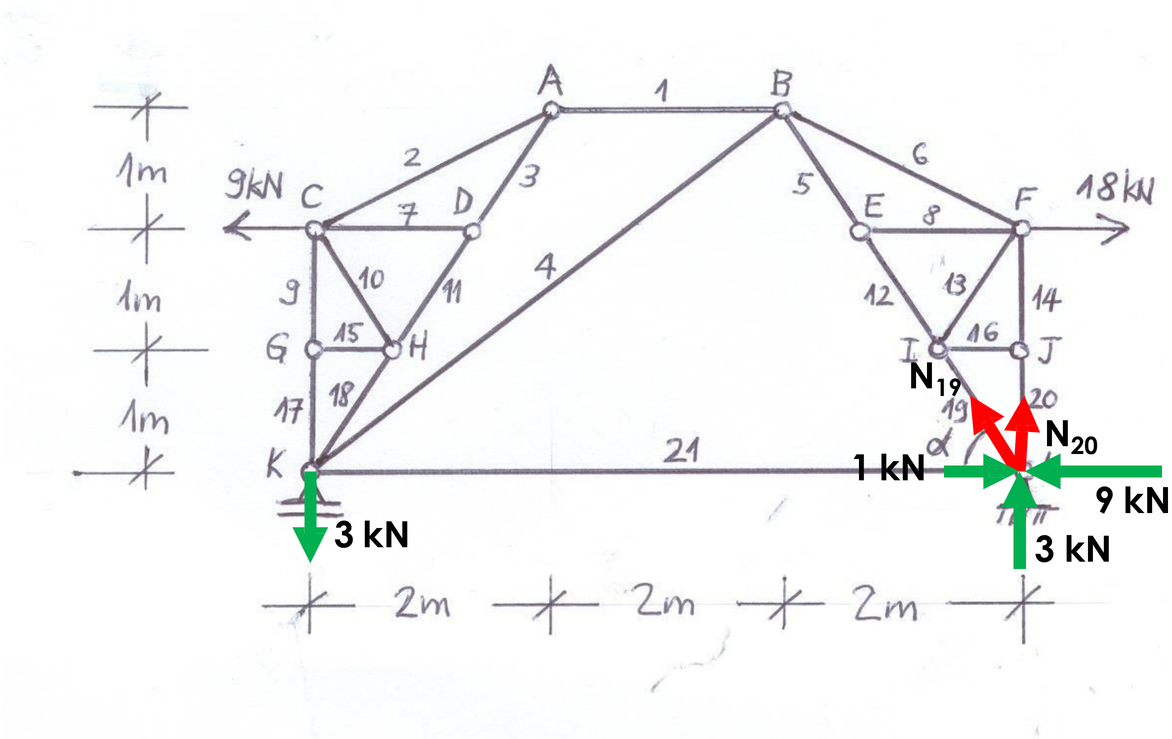
$N_1 = 6$ kN

$\Sigma F_X = 0$

$- 9 + N_1 + N_4 * 4/5 + N_{21} = 0$

$- 9 + 6 + 5 * 4/5 + N_{21} = 0$

$N_{21} = - 1$ kN



Equilíbrio do nó L

$\Sigma\, F_x = 0$

$- N_{19} * \cos\alpha + 1 - 9 = 0$

$- N_{19} * 0{,}555 - 8 = 0$

$N_{19} = - 14{,}4 \text{ kN}$

$\Sigma\, F_y = 0$

$3 + N_{19} * \text{sen}\alpha + N_{20} = 0$

$3 - 14{,}4 * 0{,}832 + N_{20} = 0$

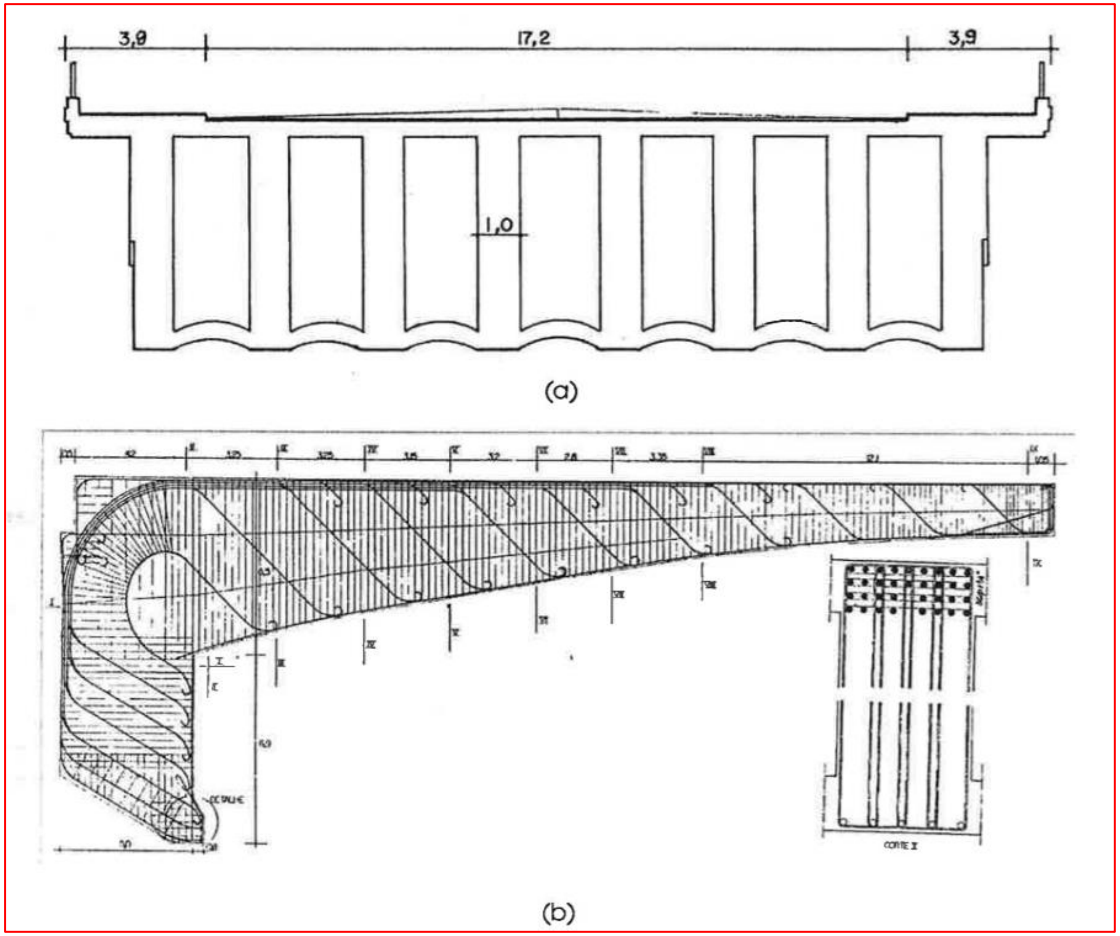
$N_{20} = 9 \text{ kN}$

PÓRTICOS TRIARTICULADOS.

VIADUTO DO CHÁ

VIADUTO DO CHÁ

APOSTILA
CAPÍTULO 7
PÁGINA 133

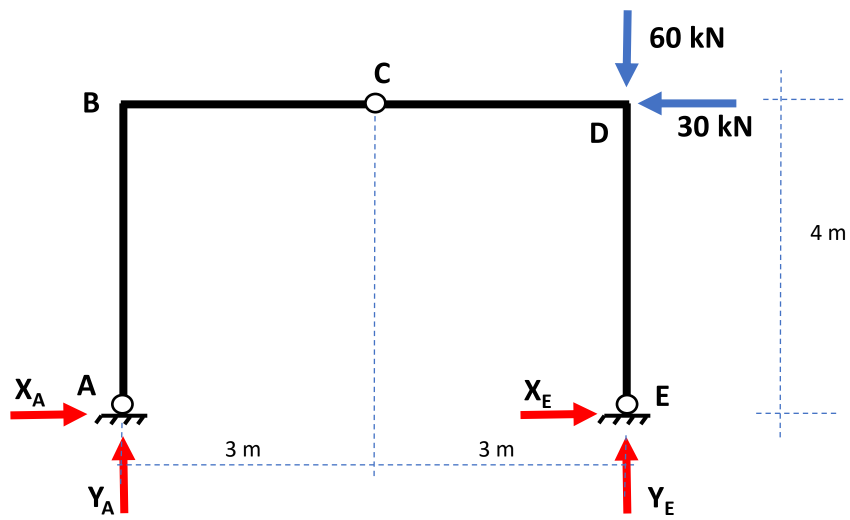


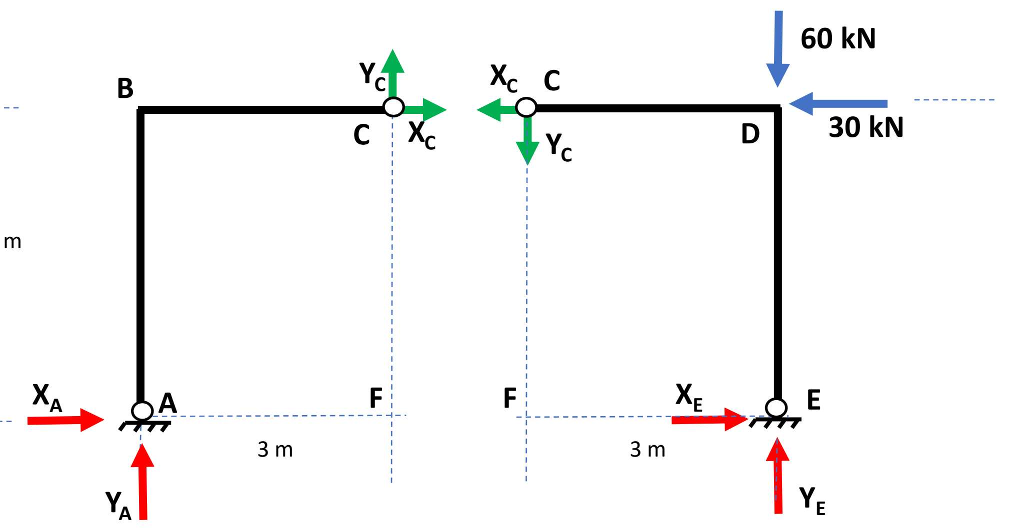
(a)

(b)

VIADUTO DO CHÁ

EXERCÍCIO: Traçar os diagramas dos esforços solicitantes do pórtico triarticulado





a) REAÇÕES DE APOIO

1. $\sum M_A = 0 = -60.6 + 30.4 + Y_E\,.6 \rightarrow Y_E = 40 \text{ kN}$

2. $\sum M_E = 0 = -Y_A.6 + 30.4 \rightarrow Y_A = 20 \text{ kN}$

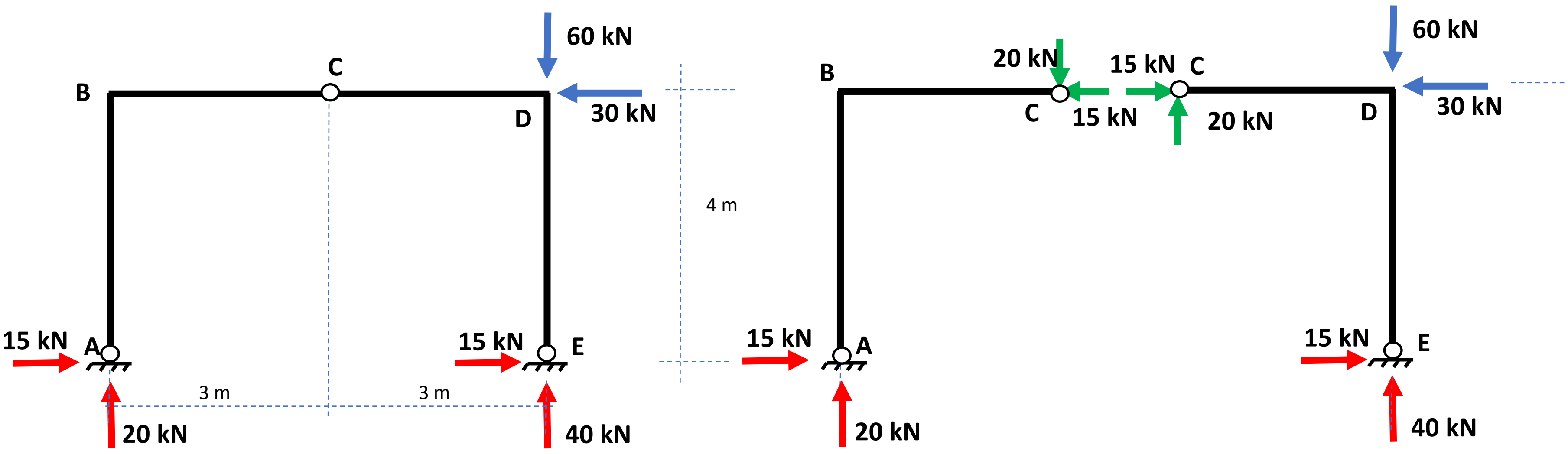
3. $\sum M_C = 0 = X_A.4 - Y_A.3 \;\; e \;\; Y_A = 20 \text{ kN} \rightarrow X_A = 15 \text{ kN}$

4. $\sum M_C = 0 = -60.3 + X_E.4 + Y_E.3 \;\; e \;\; Y_E = 40 \text{ kN} \rightarrow X_E = 15 \text{ kN}$

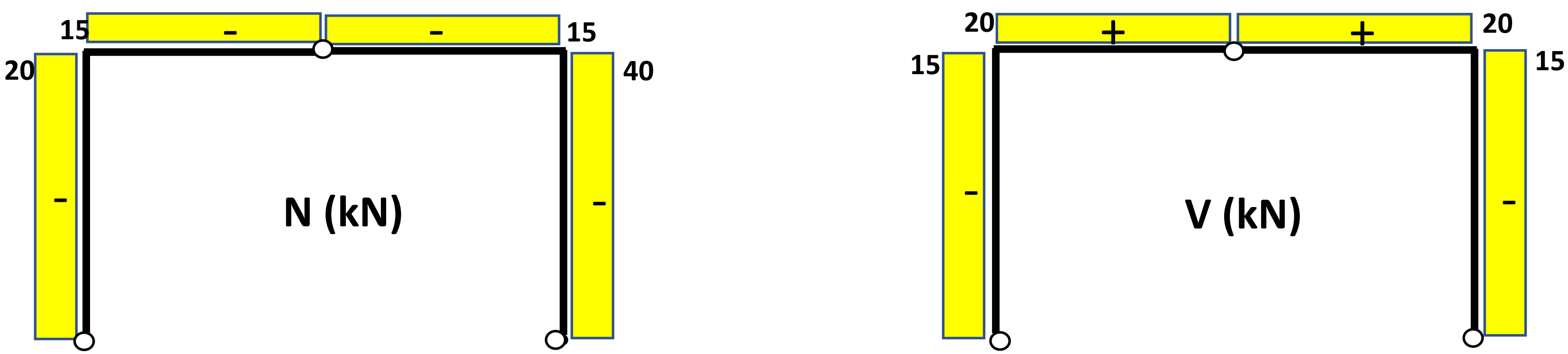
5. $\sum M_F = 0 = -Y_A.3 - X_C.4 \;\; e \;\; Y_A = 20 \text{ kN} \rightarrow X_C = -15 \text{ kN}$

6. $\sum Y = 0 = Y_A + Y_C \;\; e \;\; Y_A = 20 \text{ kN} \rightarrow Y_C = -20 \text{ kN}$

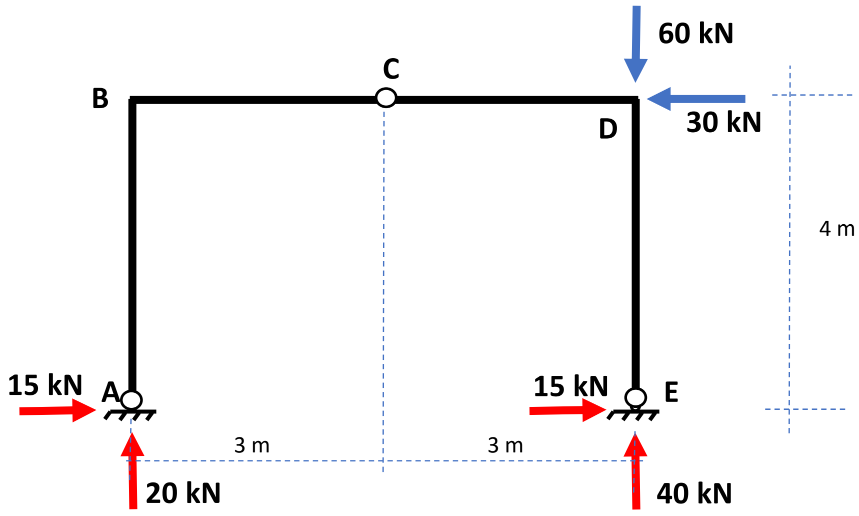
b) DIAGRAMA DO CORPO LIVRE

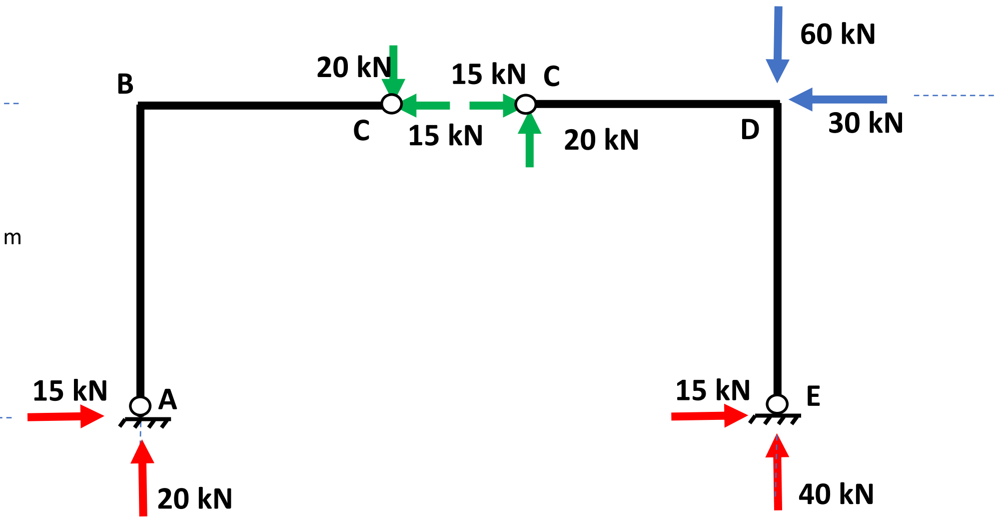


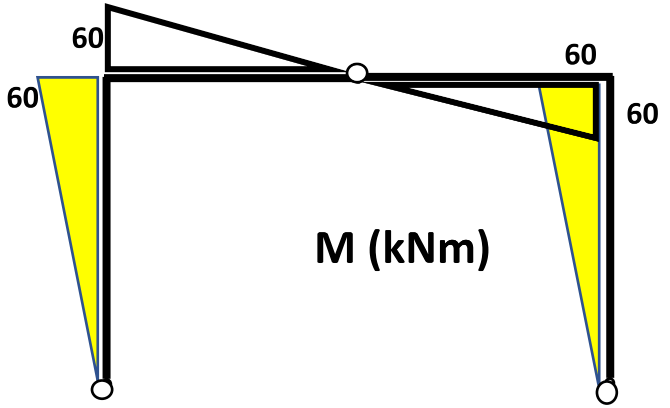
c) DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

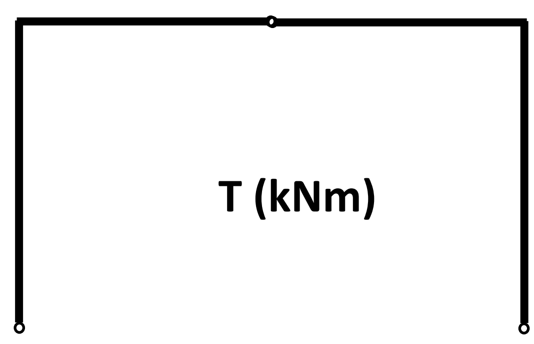


C) DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES





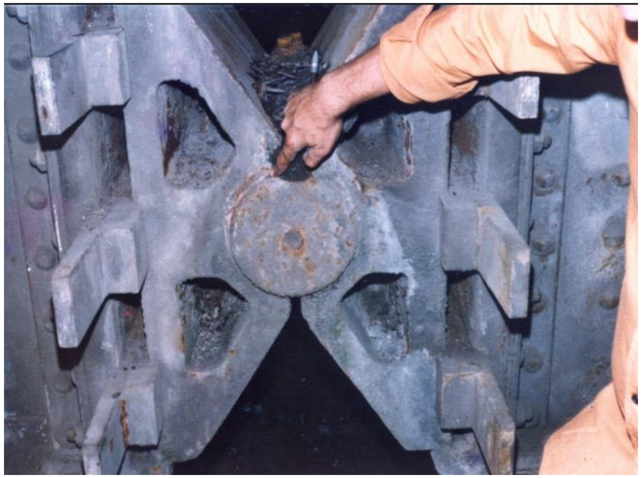


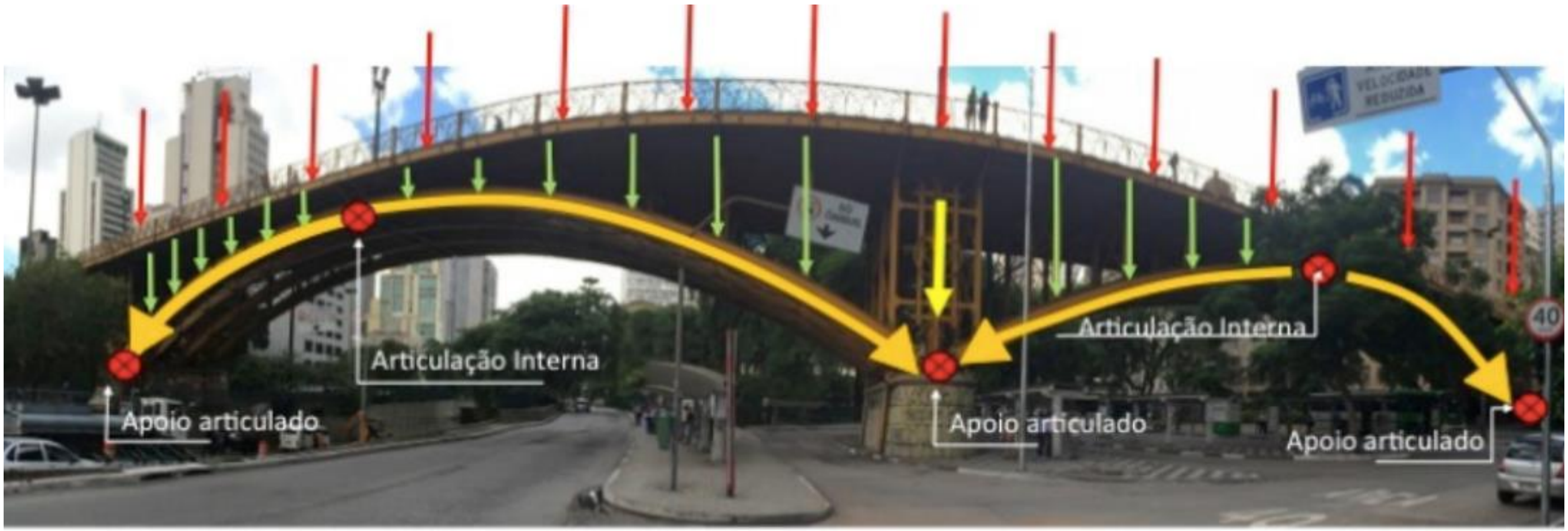


ARCOS TRIARTICULADOS

APOSTILA
CAPÍTULO 9
PÁGINAS 154 - 161


50m
30,00m
53,50m
53,50m
53,50m
30,00m

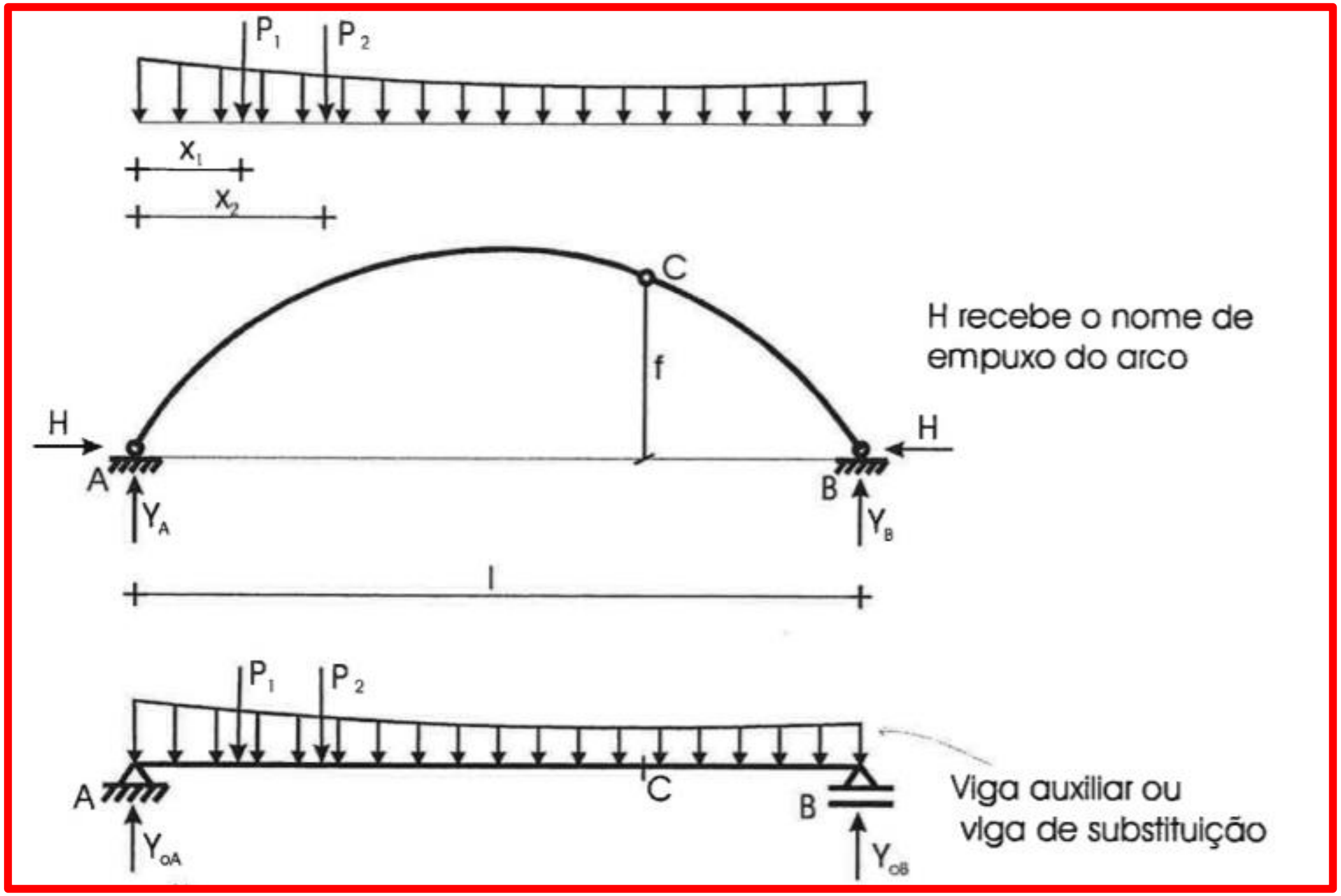


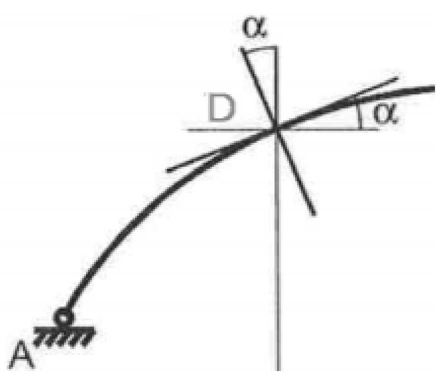


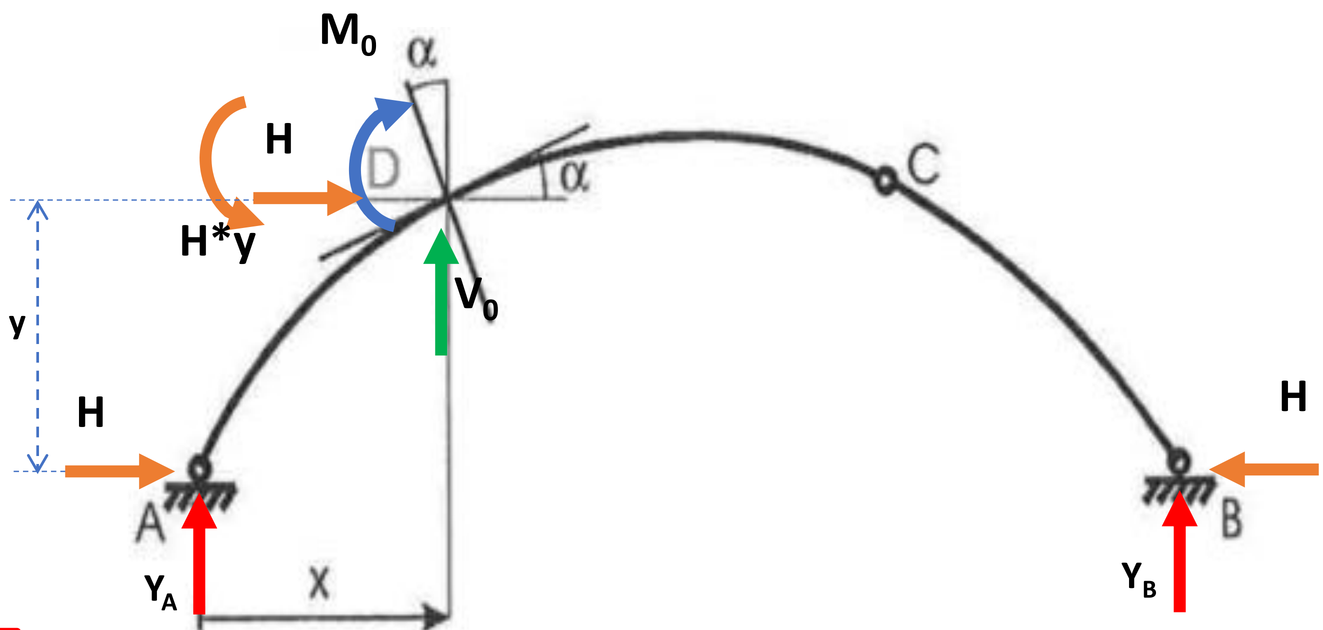
Estrutura Isostática

ARCOS TRIARTICULADOS

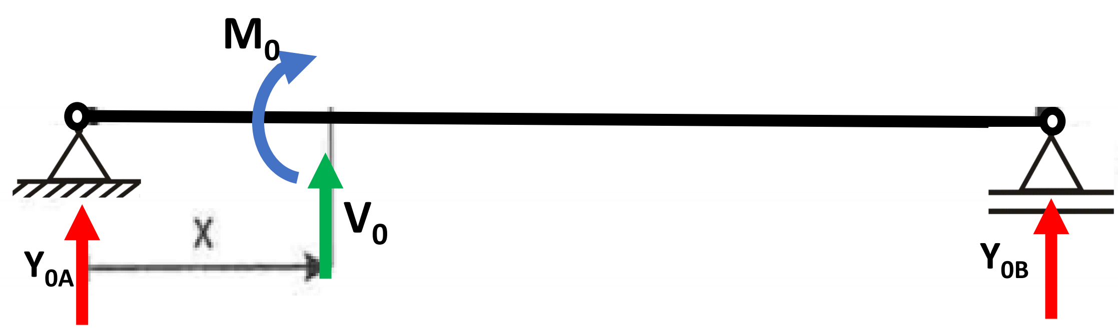
$Y_A = Y_{0A}$
$Y_B = Y_{0B}$

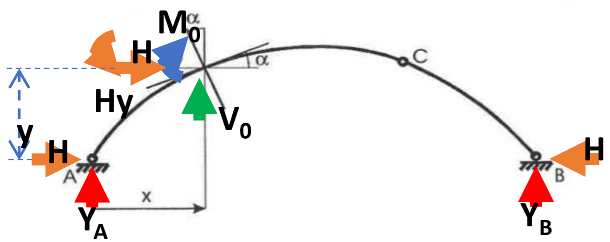


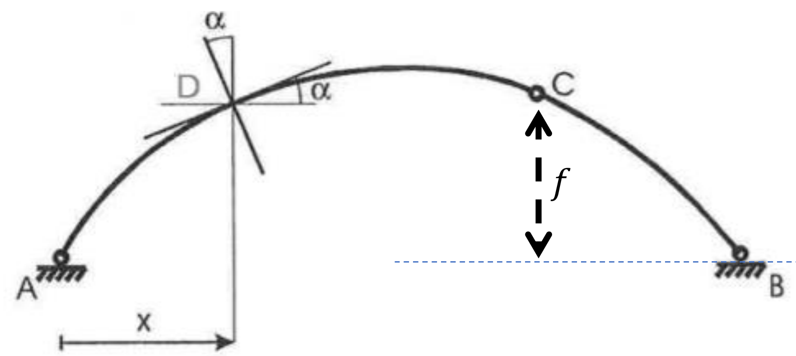


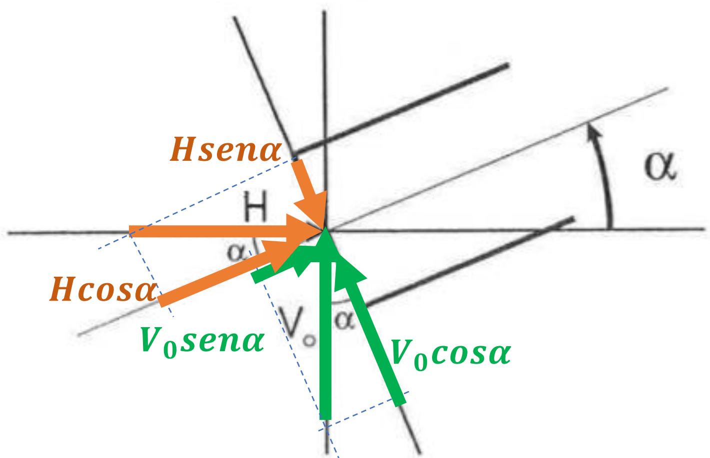


$$M = M_0 - Hy$$
$$V = -Hsen\alpha + V_0 cos\alpha$$
$$N = -Hcos\alpha - V_0 sen\alpha$$
$$Y_A = Y_{0A}$$
$$Y_B = Y_{0B}$$









$$M_C = 0 = M_{0C} - Hf$$

$$H = \frac{M_{0C}}{f}$$

$$M = M_0 - Hy$$

$$V = -Hsen\alpha + V_0 cos\alpha$$

$$N = -Hcos\alpha - V_0 sen\alpha$$

$$Y_A = Y_{0A}$$

$$Y_B = Y_{0B}$$

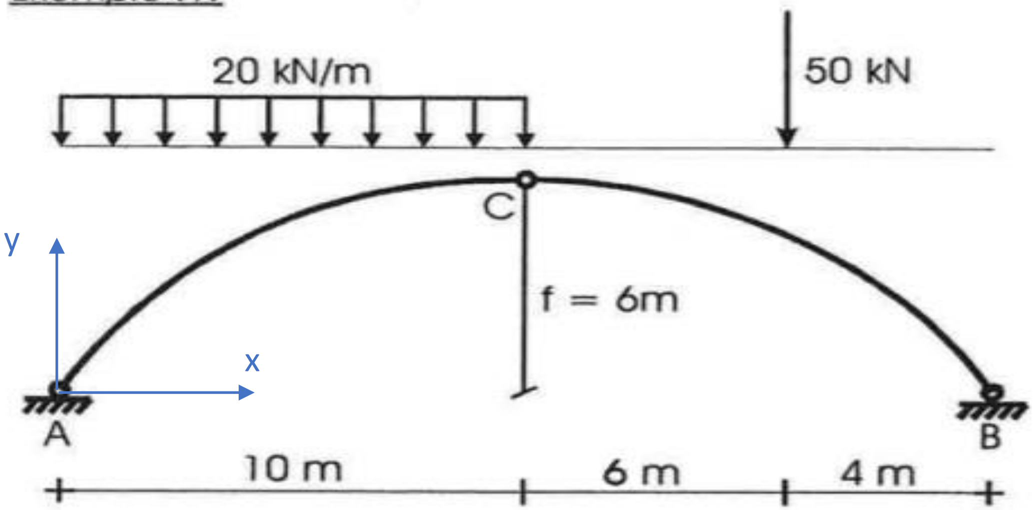
$$M_C = 0 = M_{0C} - Hf$$

$$H = \frac{M_{0C}}{f}$$

EXERCÍCIO

APOSTILA
CAPÍTULO 9

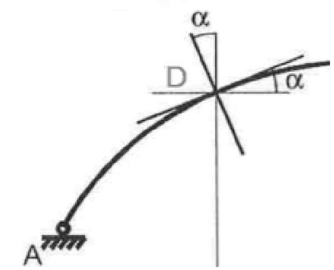
Exemplo 9.1



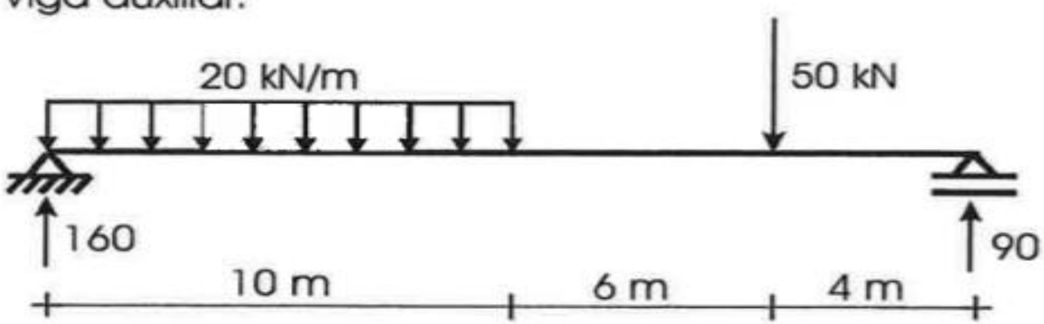
$y = 1{,}2x - 0{,}06x^2$

$tg\alpha = 1{,}2 - 0{,}12x$

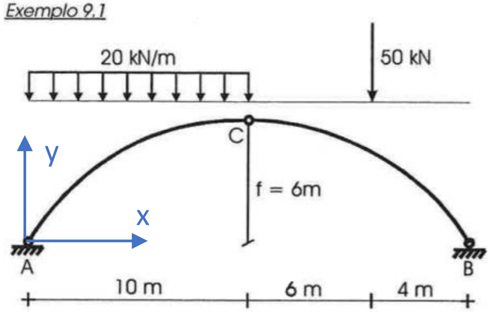
$\alpha = arctg\,(1{,}2 - 0{,}12x)$



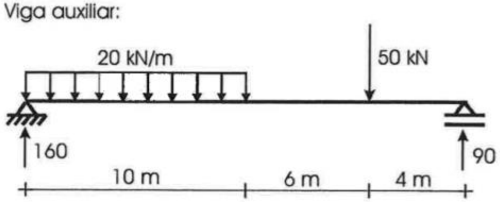
Viga auxiliar:



Exemplo 9.1



Viga auxiliar:

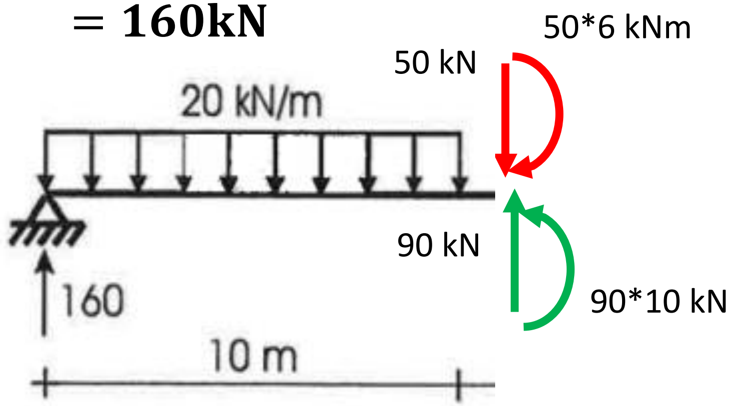


Determinar os esforços solicitantes (equações)

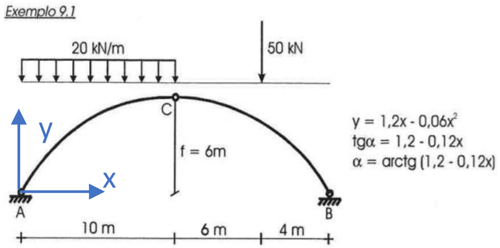
1. Na viga auxiliar

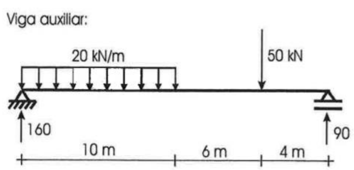
$$\sum M_{(A)} = 0 = -200 * 5 - 50 * 16 + Y_{0B} * 20 \rightarrow Y_{0B} = 90\text{kN}$$

$$\sum M_{(B)} = 0 = -Y_{0A} * 20 + 200 * 15 + 50 * 4 \rightarrow Y_{0A} = 160\text{kN}$$



$$\boxed{\begin{aligned} V_{0C} &= -40\ kN \\ M_{0C} &= +600\ kNm \end{aligned}}$$



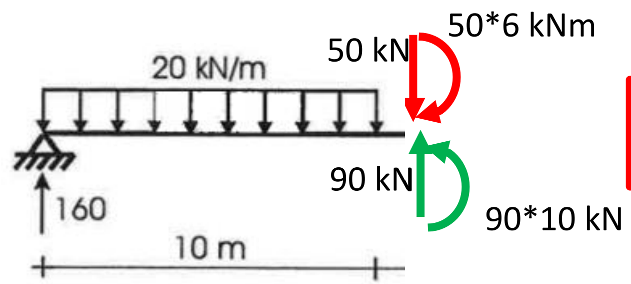


Determinar os esforços solicitantes (equações)

1. Na viga auxiliar

$$\sum M_{(A)} = 0 = -200 * 5 - 50 * 16 + Y_{0B} * 20 \rightarrow Y_{0B} = 90\text{kN}$$

$$\sum M_{(B)} = 0 = -Y_{0A} * 20 + 200 * 15 + 50 * 4 \rightarrow Y_{0A} = 160\text{kN}$$



$$\boxed{\begin{matrix} V_{0C} = -40\ kN \\ M_{0C} = +600\ kNm \end{matrix}}$$

2. No arco triarticulado

$$\boldsymbol{Y_A = Y_{0A} = 160\text{kN}}$$

$$\boldsymbol{Y_B = Y_{0B} = 90\text{kN}}$$

$$\boldsymbol{H = \frac{M_{0C}}{f} = \frac{600\ kNm}{6\ m} = 100\ kN}$$

$$\boldsymbol{M = M_0 - Hy \Longrightarrow M_C = 600 - 100 * 6 = 0}$$

$$\boldsymbol{V = -Hsen\alpha + V_0 cos\alpha \Longrightarrow V_C = -100sen0 + (-40)cos0 = -40\ kN}$$

$$\boldsymbol{N = -100cos\alpha - V_0 sen\alpha \Longrightarrow N_C = -100cos0 - (-40)sen0 = -100\ kN}$$

$$\boxed{\begin{matrix} V_C = -40\ kN \\ N_C = -100\ kN \\ M_C = 0\ kNm \end{matrix}}$$

APOSTILA
CAPÍTULO 9
PÁGINA 160

9.2 Linha das Pressões

Definição: dá-se o nome de linha das pressões associada a um determinado carregamento à forma da estrutura triarticulada que, solicitada por aquele carregamento, apresenta momentos fletores nulos e forças cortantes nulas em todas as seções transversais.

$$M = M_0 - H \cdot y = 0$$

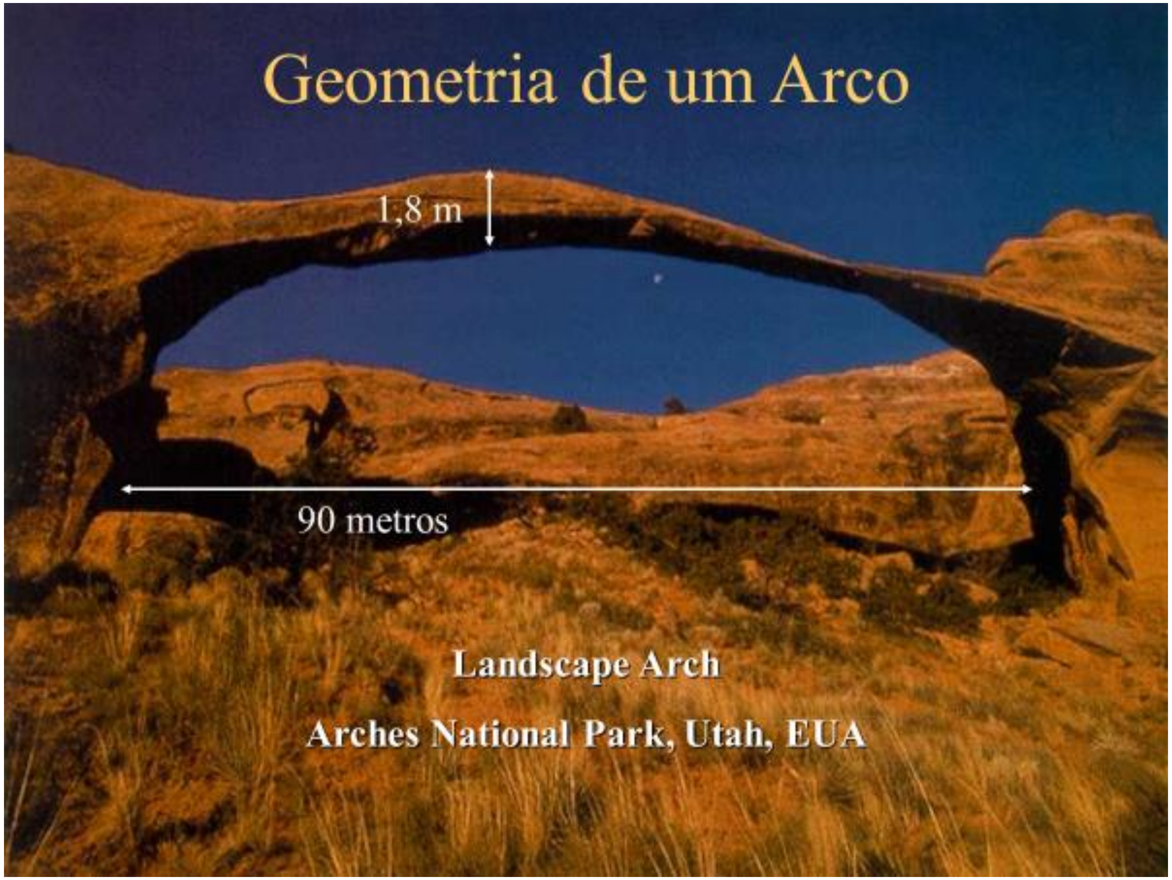
$y = \dfrac{M_0}{H}$ é a equação da linha das pressões.

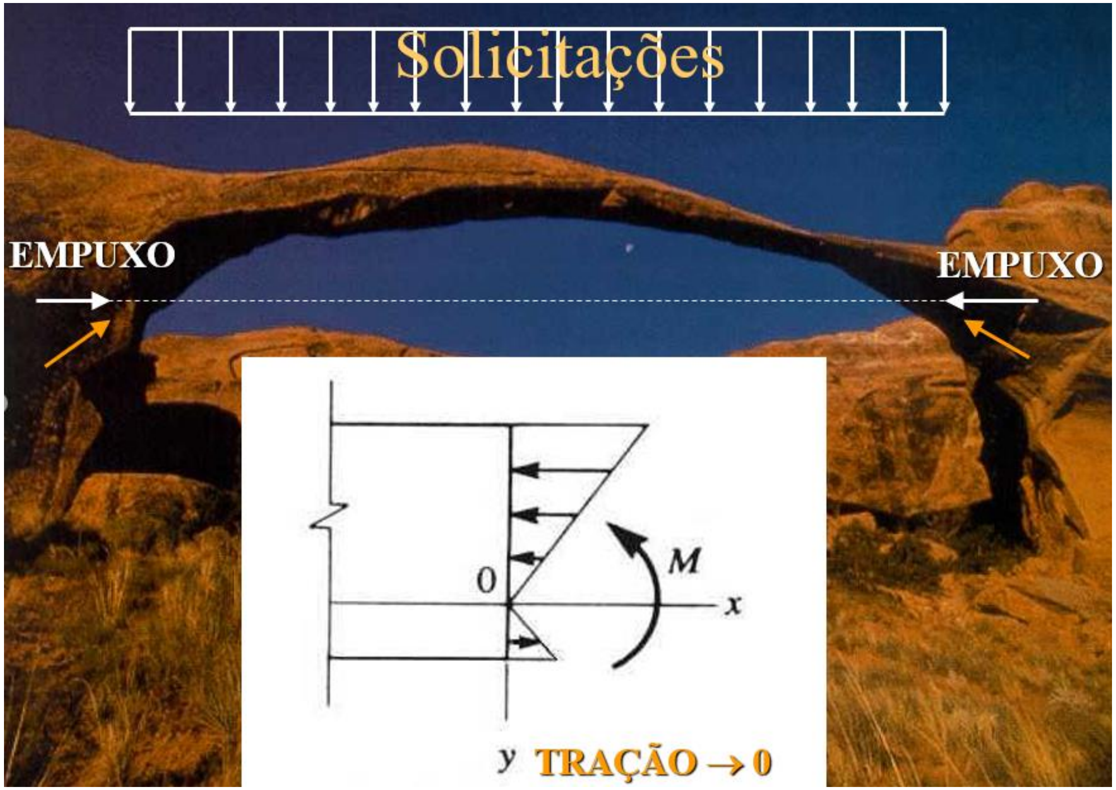
LINHA DAS PRESSÕES

Definição: FORMA DA ESTRUTURA TRIARTICULADA QUE APRESENTA MOMENTOS FLETORES NULOS E FORÇAS CORTANTES NULAS EM TODAS AS SEÇÕES TRANSVERSAIS.

$$M = M_0 - Hy = 0 \Longrightarrow y = \frac{M_0}{H}$$

$$\boxed{y = \frac{M_0}{H} \text{ é } a\ equação\ da\ linha\ de\ pressões}$$


Geometria de um Arco
1,8 m
90 metros
Landscape Arch
Arches National Park, Utah, EUA


Solicitações
EMPUXO
EMPUXO
0
M
x
y
TRAÇÃO → 0

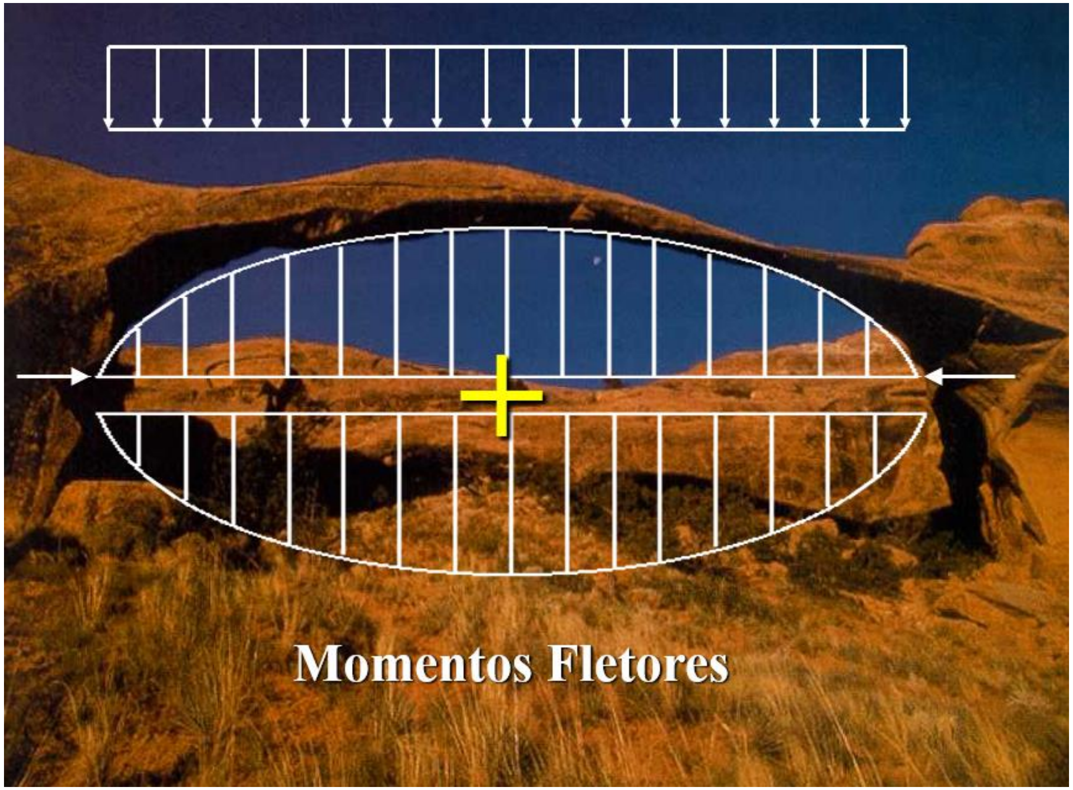
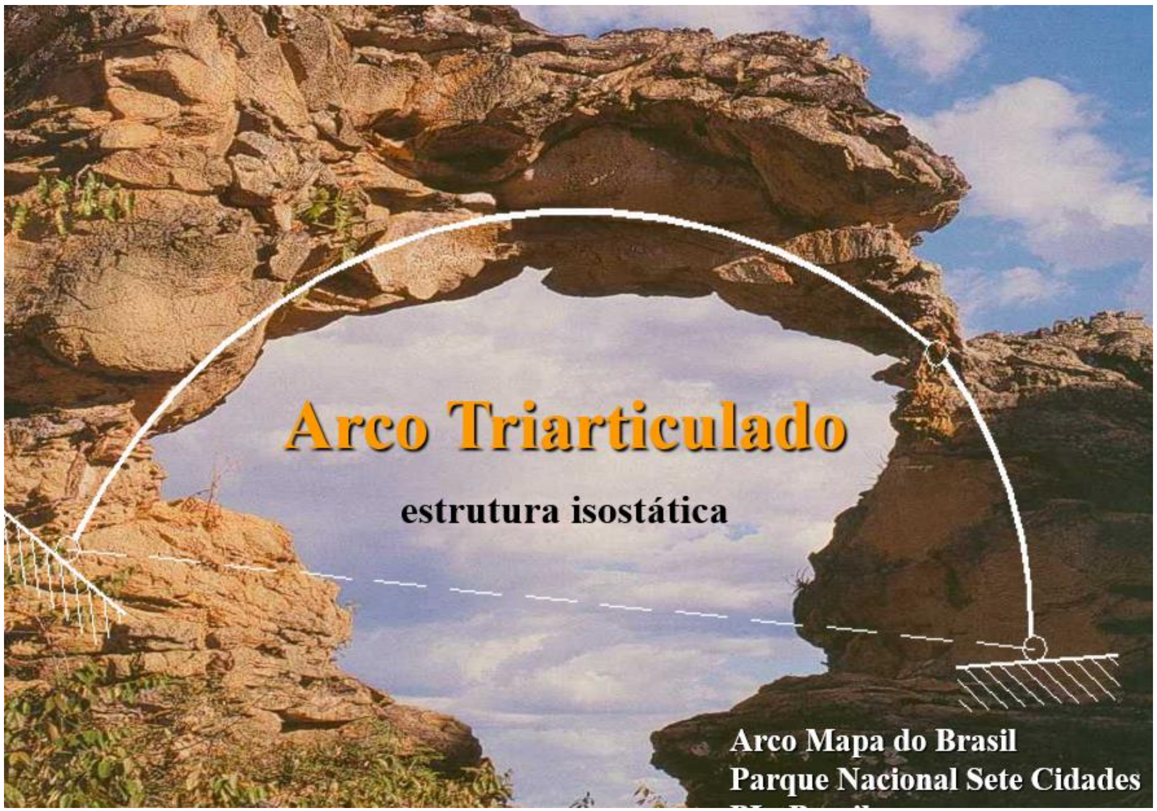
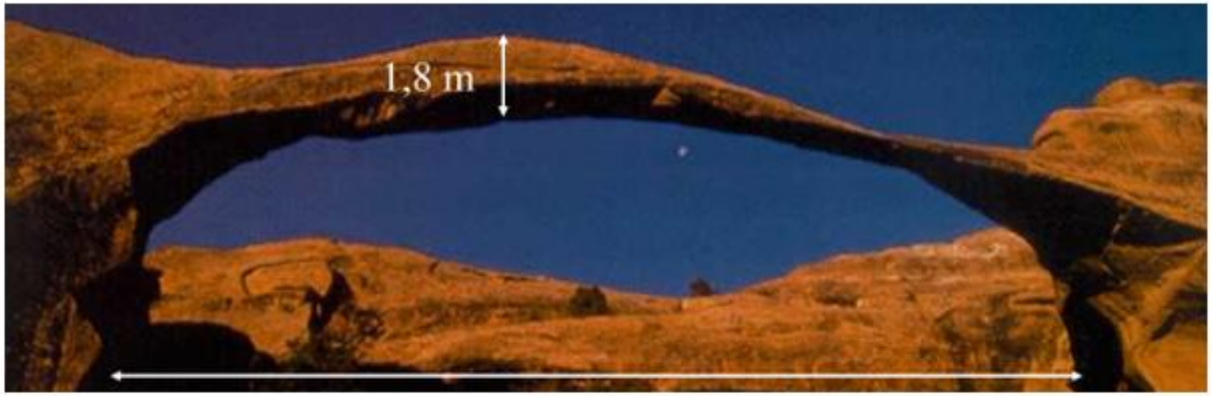

Momentos Fletores

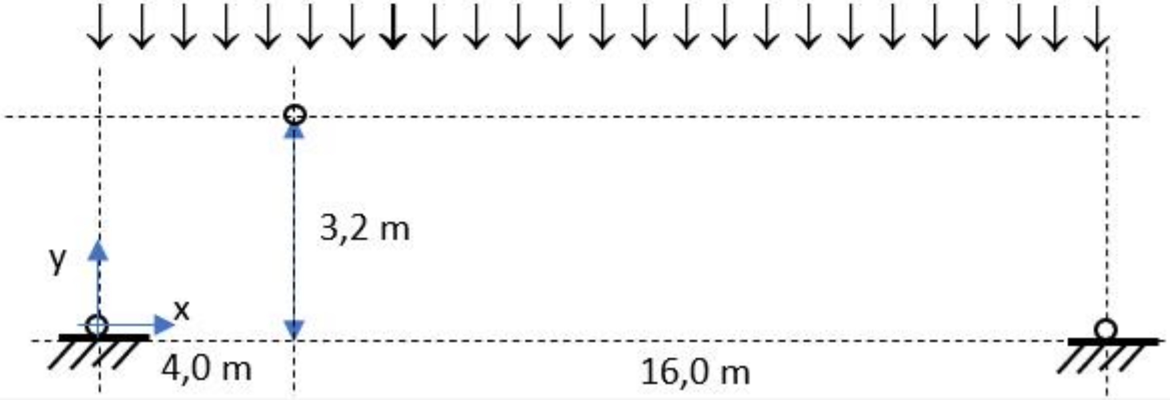

Diagrama do Momento Fletor → 0
Estrutura trabalhando à compressão
em todo o seu domínio


Arco Triarticulado
estrutura isostática
Arco Mapa do Brasil
Parque Nacional Sete Cidades

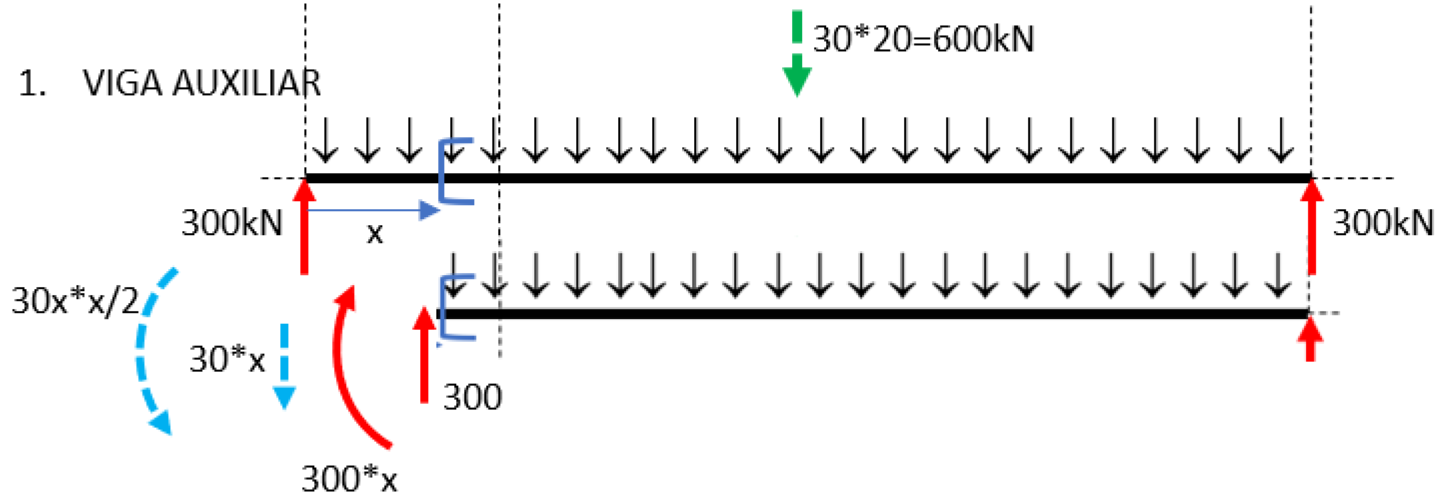
PSUB -2023



Algumas estruturas da natureza como a da figura se mantêm em equilíbrio mesmo não tendo resistência a tração. Supondo que ela se comporte como uma estrutura triarticulada, com dois apoios fixos e uma articulação, submetida a um carregamento uniformemente distribuída de 30 kN/m determine a sua forma (função y=f(x)) mediante o conceito da linha de pressões.

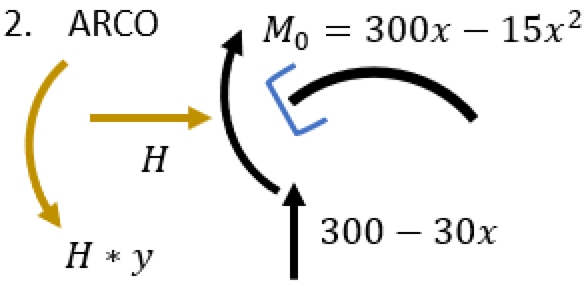


1. VIGA AUXILIAR



Momento na seção S da viga auxiliar é $M_0 = 300x - 15x^2$

2. ARCO



Momento na seção S do arco é $M = 300x - 15x^2 - Hy$

Momento na articulação do arco ($x = 4$ e $y = 3{,}2$) $= 0 = 300 * 4 - 15 * 4^2 - H * 3{,}2$
$\Longrightarrow H = 300$

A linha de pressões é definida pela função $y = \frac{300x - 15x^2}{300} = x - 0{,}05x^2$

Viga Gerber (em alemão: Gerberträger ou Gelenkträger)

Definição

Conjunto de vigas onde uma ou mais vigas têm estabilidade própria com as outras apoiadas sobre elas.

As vigas que compõem o conjunto são, exclusivamente, vigas engastadas, vigas biapoiadas e vigas biapoiadas com balanços.

Os vínculos entre as vigas são articulações que não impedem rotação relativa entre elas.


Ponte estaiada Octavio Frias de Oliveira


Ponte estaiada Octavio Frias de Oliveira


Ponte estaiada Octavio Frias de Oliveira

APOSTILA
CAPÍTULO 10
PÁGINA 162

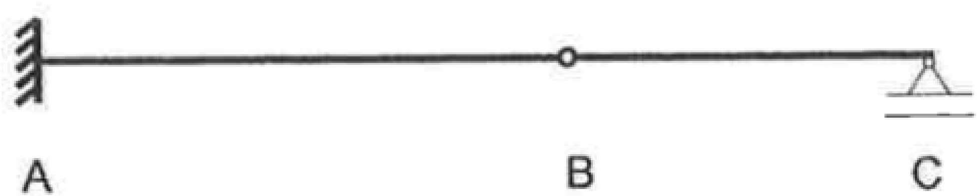
VIGA GERBER

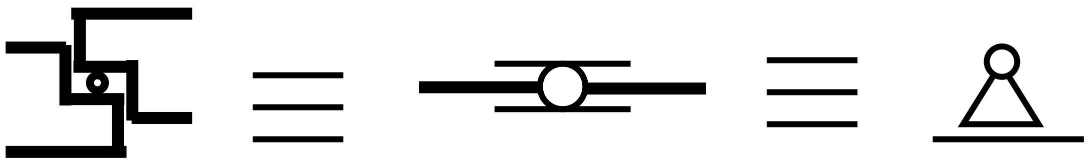
SISTEMA PATENTEADO POR GERBER EM 1866

COMO DECOMPOR?

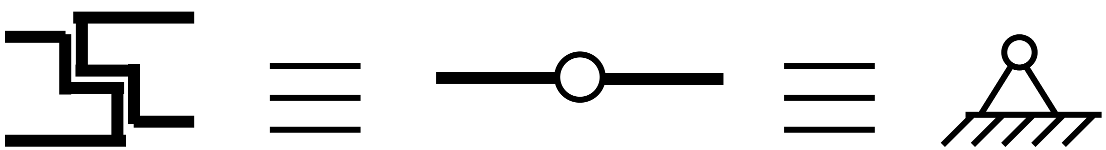
- **QUAL É A ESTRUTURA QUE SE APÓIA EM OUTRAS E NÃO DÁ APOIO A NENHUMA? COMEÇAR POR ELA.**

- **QUAL É A ESTRUTURA QUE NÃO SE APÓIA EM NENHUMA E DÁ APOIO ÀS OUTRAS? TERMINAR POR ELA.**

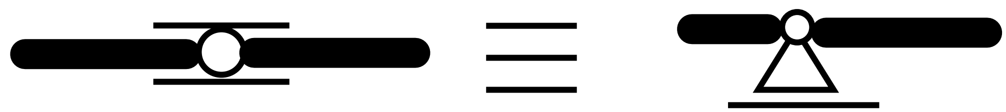




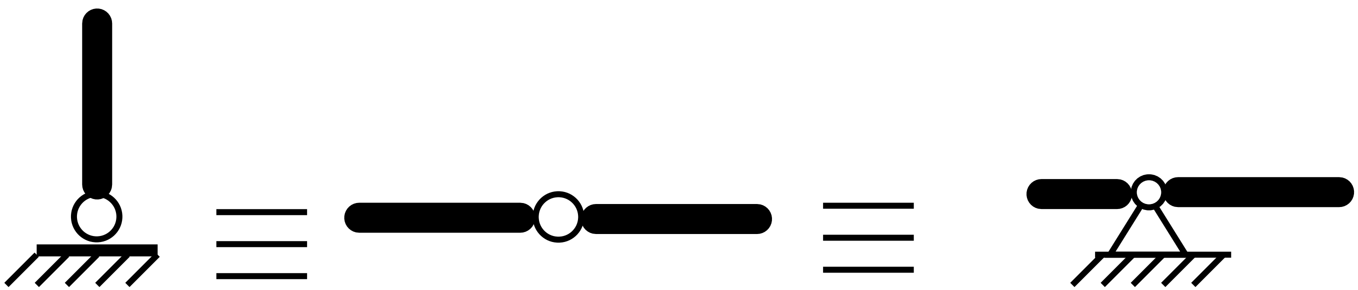
Articulação móvel



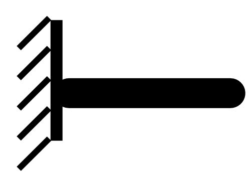
Articulação fixa



Articulação móvel



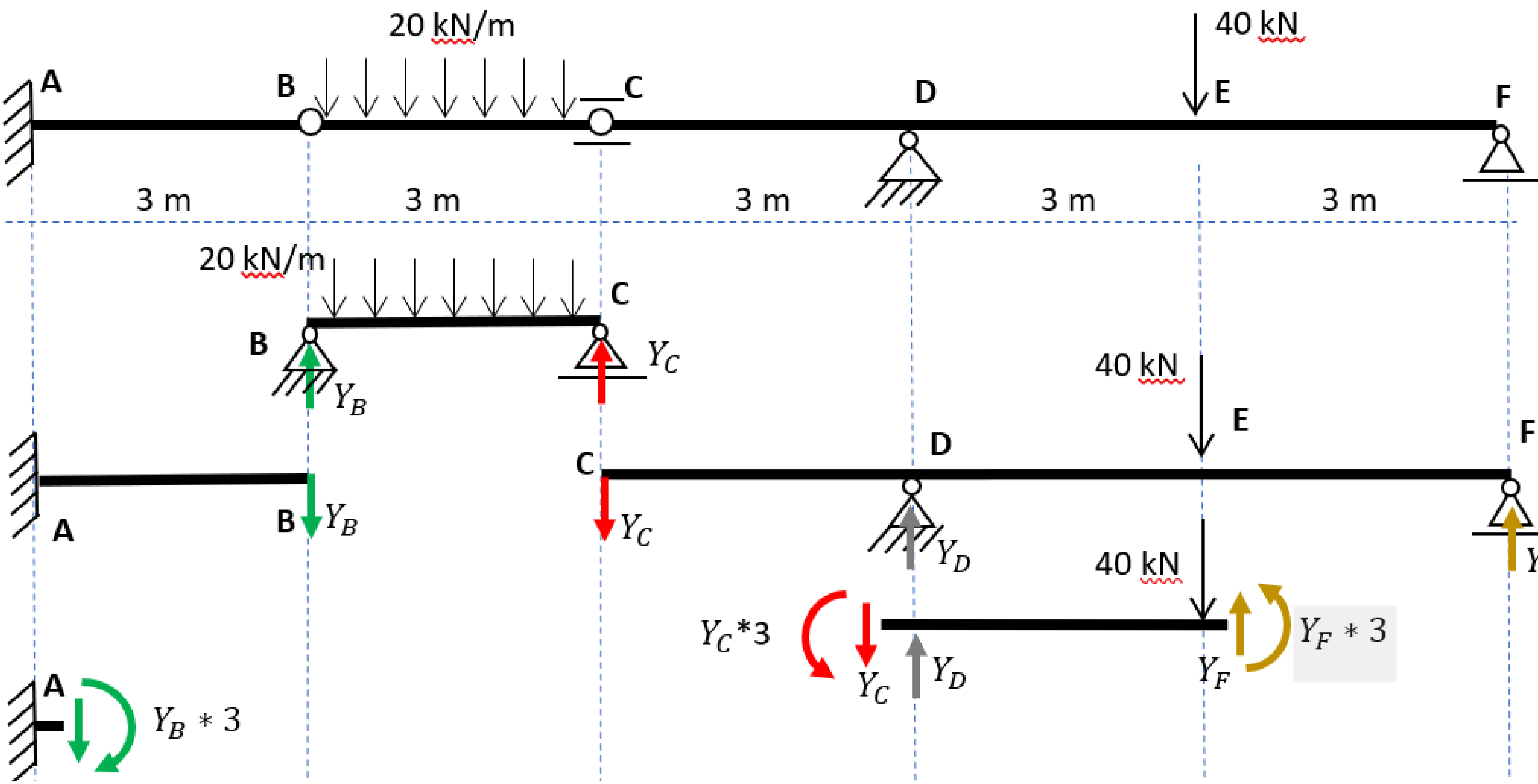
Articulação fixa

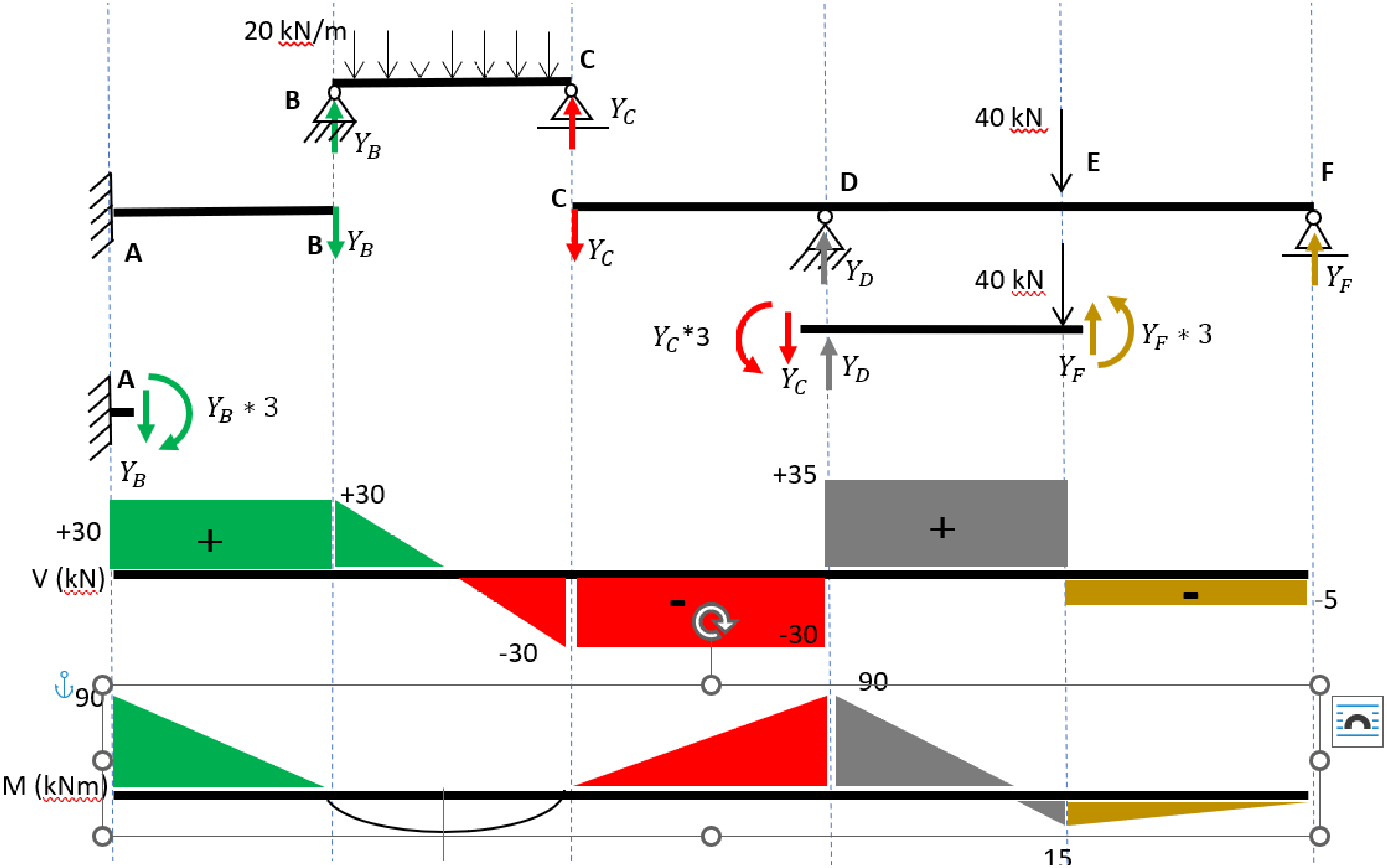


Engaste Engastamento

EXERCÍCIO
P3 2022

2ª. Questão (3,5 pontos): Para a viga Gerber da figura, esboce os diagramas dos momentos fletores e das forças cortantes.





1. VIGA BC

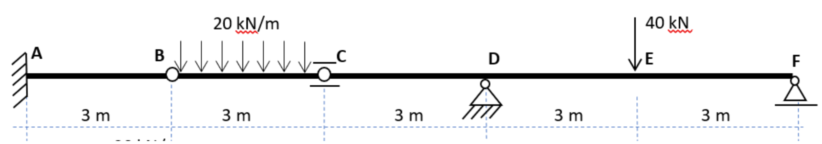
   Σ Y=0=Y_B+Y_C=20*3 e Y_B=Y_C ⟹ $Y_B = Y_C$ =+30kN; a cortante em B é +Y_B=+30kN e em C é - Y_C = - 30kN; os momentos em B e C são zero; o momento no meio do vão é $p*\frac{l^2}{8} = 20*\frac{3^2}{8} = 22{,}5\ kNm.$

2. VIGA AB

   Na seção à direita de A, a cortante é +Y_B = +30kN e o momento é Y_B*3 = 90kNm tracionando a fibra de cima; na seção B, a cortante é +Y_B=+30kN e o momento é zero.

3. VIGA CDEF

   Σ M(D) = 0 = Y_C*3 - 40*3 + Y_F*6 e Y_C = 30⟹ $Y_F = 5\ kN$;
   Σ Y = 0 = $-Y_C$ + Y_D - 40 + Y_F ⟹ Y_F = 65 kN; na seção C, a cortante é - Y_C= - 30 kN e o momento é zero; na seção à esquerda de D, a cortante é - Y_C= - 30 kN e o momento é Y_C*3 = 90 kNm tracionando a fibra de cima; na seção à direita de E, a cortante é - Y_F= - 5 kN e o momento é Y_F*3 = 15 kNm tracionando a fibra de baixo.



1. VIGA BC

   Σ Y=0=Y_B+Y_C=20*3 e Y_B=Y_C $\Longrightarrow$ Y_B = Y_C =+30kN; a cortante em B é +Y_B=+30kN e em C é - Y_C = - 30kN; os momentos em B e C são zero; o momento no meio do vão é $p * \frac{l^2}{8} = 20 * \frac{3^2}{8} = 22{,}5\ kNm$.

2. VIGA AB

   Na seção à direita de A, a cortante é +Y_B = +30kN e o momento é Y_B*3 = 90kNm tracionando a fibra de cima; na seção B, a cortante é +Y_B=+30kN e o momento é zero.

3. VIGA CDEF

   Σ M(D) = 0 = Y_C*3 - 40*3 + Y_F*6 e Y_C = 30$\Longrightarrow$ $Y_F = 5\ kN$;

   Σ Y = 0 = $-Y_C + Y_D$ - 40 + Y_F $\Longrightarrow$ Y_F = 65 kN; na seção C, a cortante é - Y_C= - 30 kN e o momento é zero; na seção à esquerda de D, a cortante é - Y_C= - 30 kN e o momento é Y_C*3 = 90 kNm tracionando a fibra de cima; na seção à direita de E, a cortante é - Y_F= - 5 kN e o momento é Y_F*3 = 15 kNm tracionando a fibra de baixo.

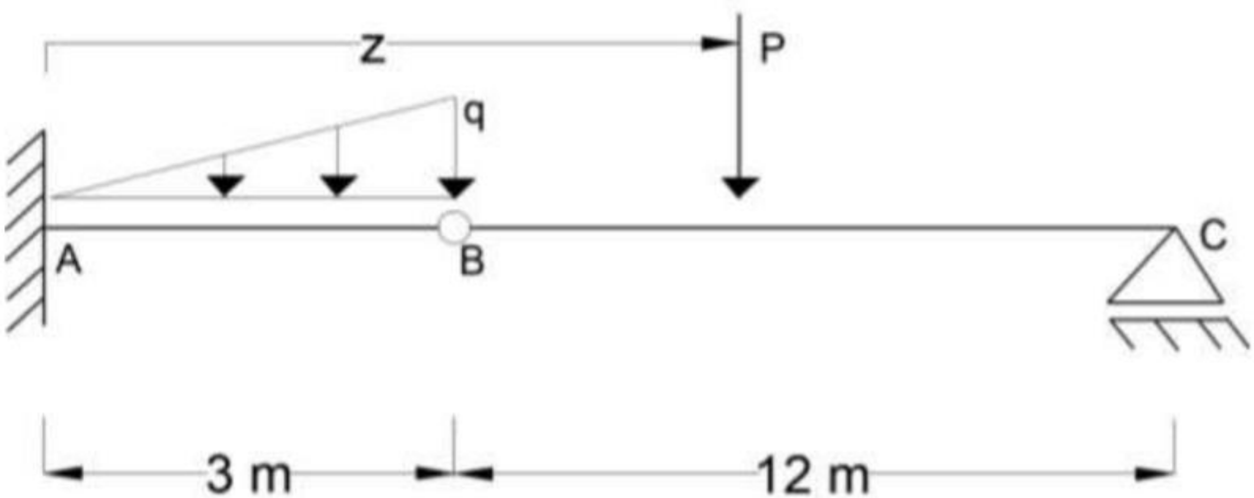
EXERCÍCIO

PEF 3200 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

Substitutiva 26/06/2019

Nº USP:____________________ Nome:____

2ª Questão (3 pontos) Na viga Gerber a seguir, obtenha a posição "**z**" de atuação da força P de modo que o máximo momento fletor no trecho AB seja, em módulo, igual ao máximo momento fletor no trecho BC e que esses sejam os menores valores possíveis. Com esse valor adotado de "z", **esboce o diagrama de momento fletor de toda a viga**, indicando os valores principais. Adote: q = 6 kN/m e P = 12 kN.

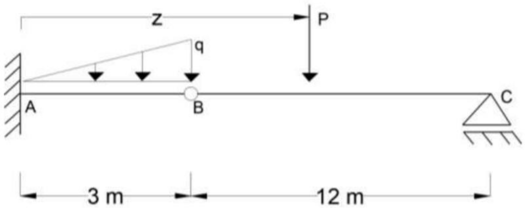


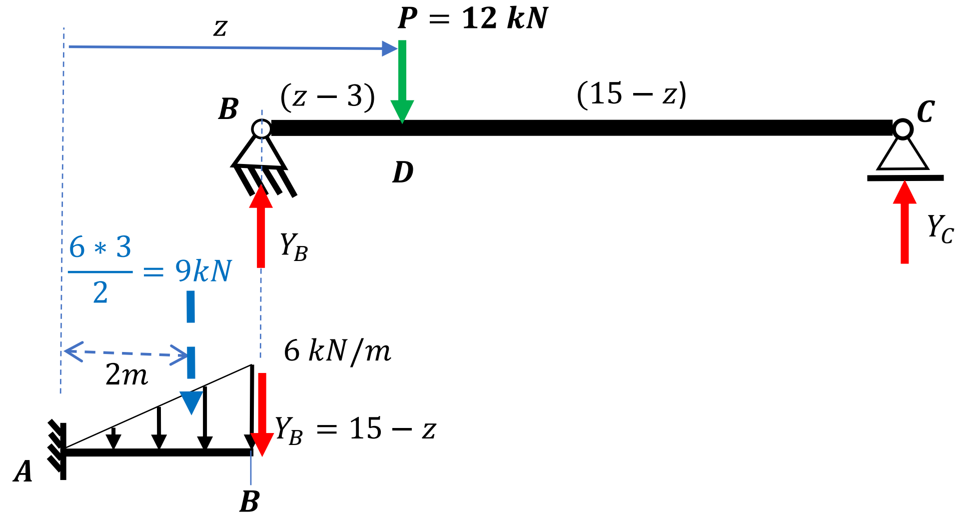
PEF 3200 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS

Substitutiva 26/06/2019

Nº USP:__________________Nome:____

2ª Questão (3 pontos**)** Na viga Gerber a seguir, obtenha a posição "z" de atuação da força P de modo que o máximo momento fletor no trecho AB seja, em módulo, igual ao máximo momento fletor no trecho BC e que esses sejam os menores valores possíveis. Com esse valor adotado de "z", **esboce o diagrama de momento fletor de toda a viga**, indicando os valores principais. Adote: q = 6 kN/m e P = 12 kN.





$$\sum M_{(C)} = 0 = -Y_B * 12 + 12 * (15 - z) \Longrightarrow Y_B = 15 - z$$

$$M_{D\_} = Y_B * (z-3) = (15 - z) * (z - 3) = -z^2 + 18z - 45$$

$$M_{A_+} = -9 * 2 - (15 - z) * 3 = 3z - 63$$

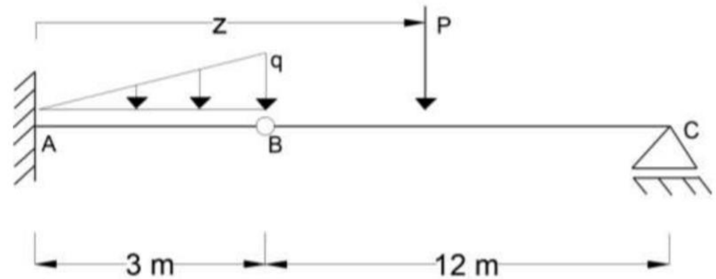
$$|M_{D\_}| = |M_{A_+}| \Longrightarrow |-z^2 + 18z - 45| = |3z - 63| \Longrightarrow \begin{cases} -z^2 + 18z - 45 = 3z - 63 \\ -z^2 + 18z - 45 = -3z + 63 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\text{(descartando valores de z<0 ou >15)} \Longrightarrow \begin{cases} z = 12 \Longrightarrow |M_{D\_}| = |M_{A_+}| = 27 \\ z = 9 \Longrightarrow |M_{D\_}| = |M_{A_+}| = 36 \end{cases}$$

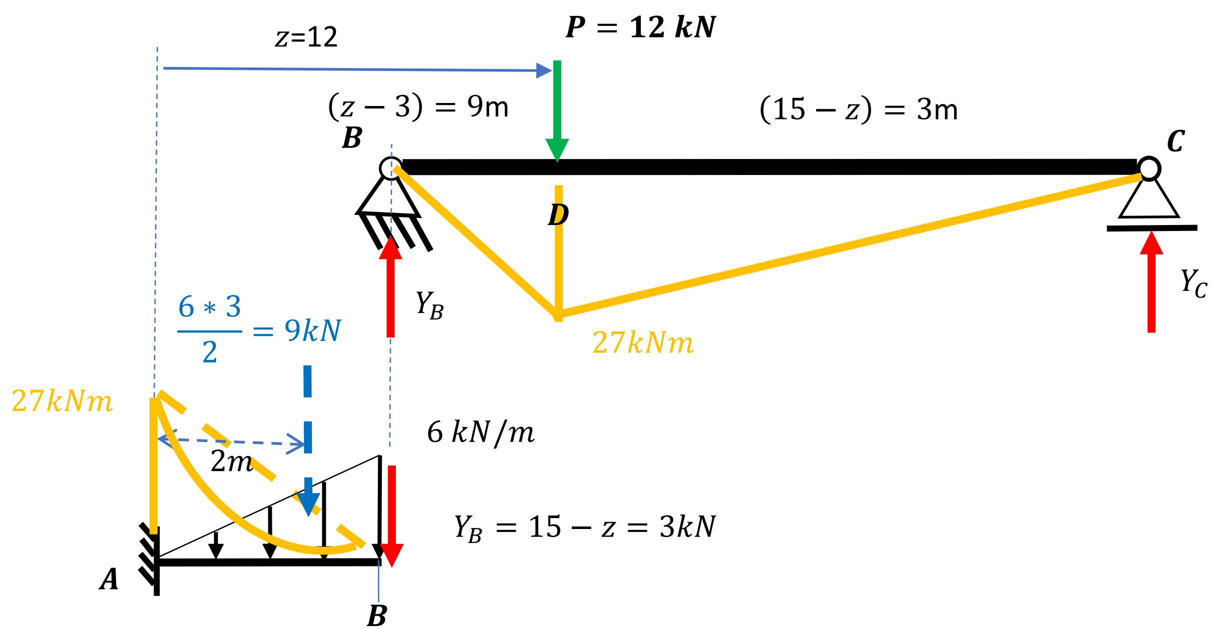
PEF 3200 INTRODUÇÃO À MECÂNICA DAS ESTRUTURAS
Substitutiva 26/06/2019

Nº USP:____________________ Nome:____

2ª Questão (3 pontos**)** Na viga Gerber a seguir, obtenha a posição "**z**" de atuação da força P de modo que o máximo momento fletor no trecho AB seja, em módulo, igual ao máximo momento fletor no trecho BC e que esses sejam os menores valores possíveis. Com esse valor adotado de "z", **esboce o diagrama de momento fletor de toda a viga**, indicando os valores principais. Adote: q = 6 kN/m e P = 12 kN.

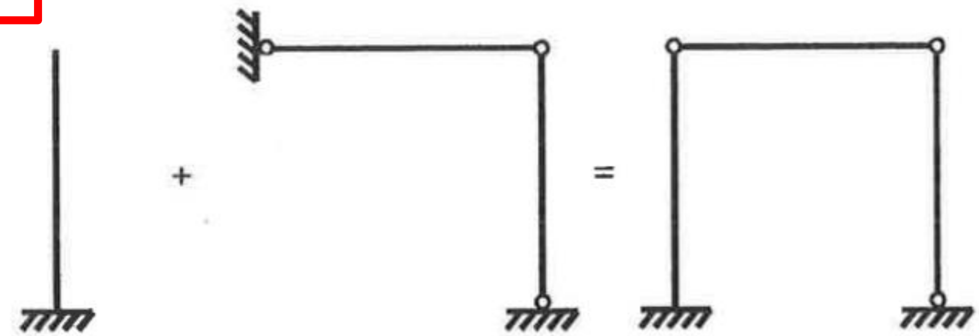


$$\begin{cases} z = 12 \Longrightarrow |M_{D_-}| = |M_{A_+}| = 27 \\ z = 9 \Longrightarrow |M_{D_-}| = |M_{A_+}| = 36 \end{cases} \Longrightarrow (pelo\ enunciado)\, z = 12$$

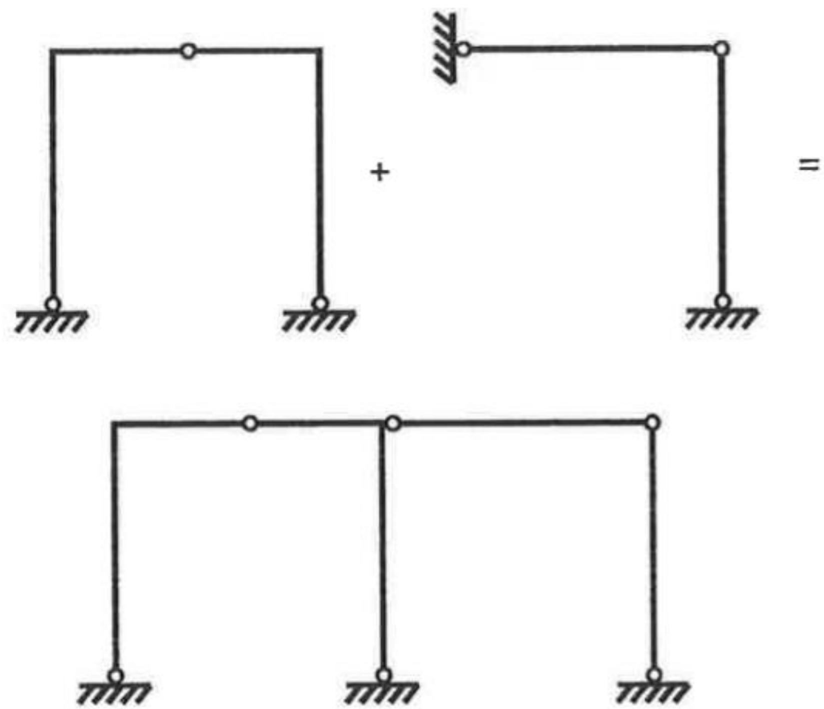


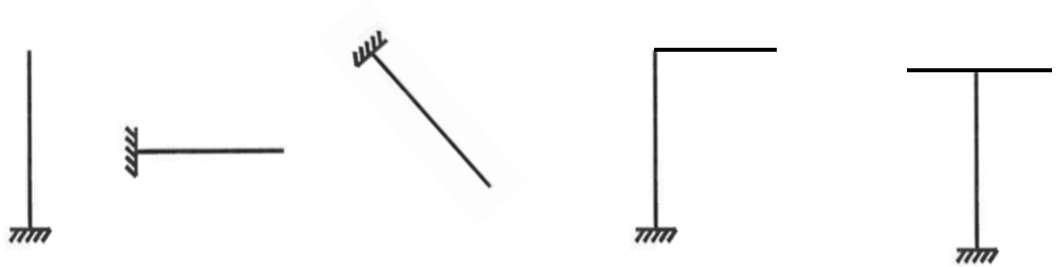
APOSTILA
ESTRUTURAS ASSOCIADAS
PÁGINA 168

a)



b)

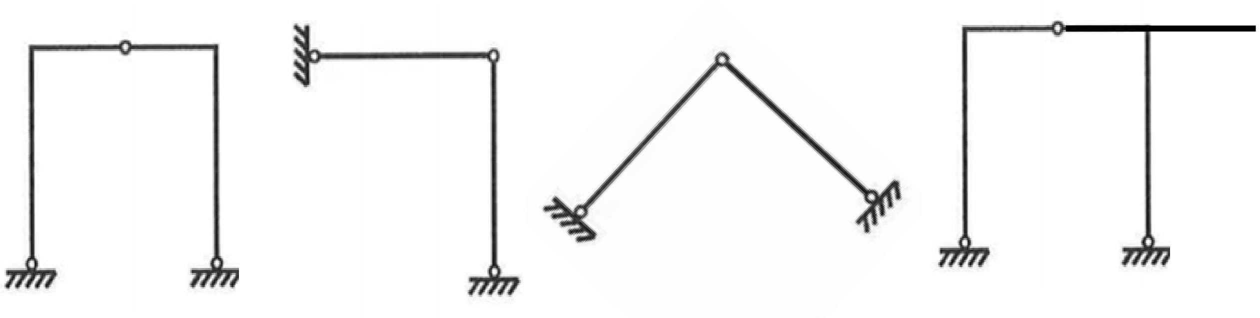




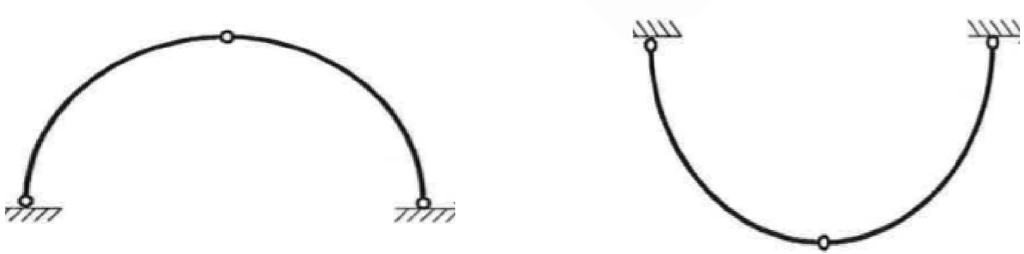
Viga em balanço ou
Viga engastada

Viga simplesmente apoiada ou
Viga biapoiada

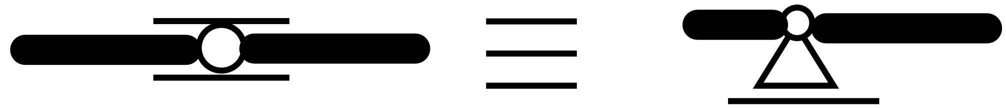
Viga simplesmente apoiada com balanço ou
Viga biapoiada com balanço



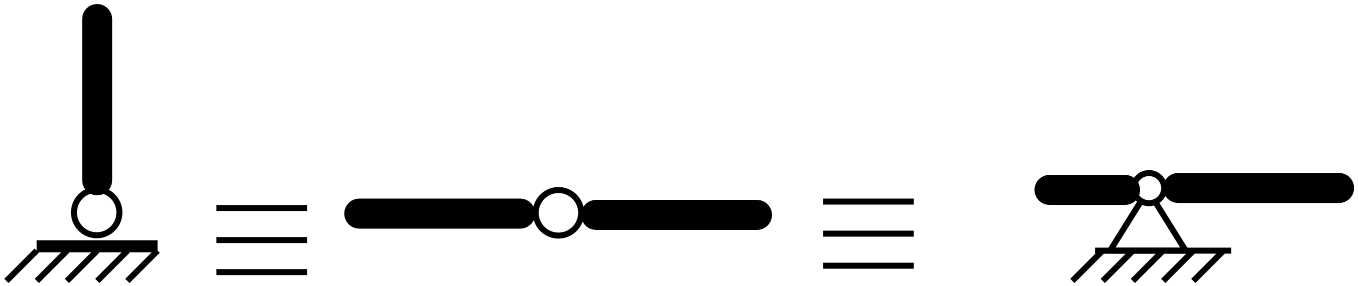
Pórtico triarticulado



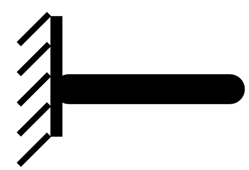
Arco triarticulado



Articulação móvel



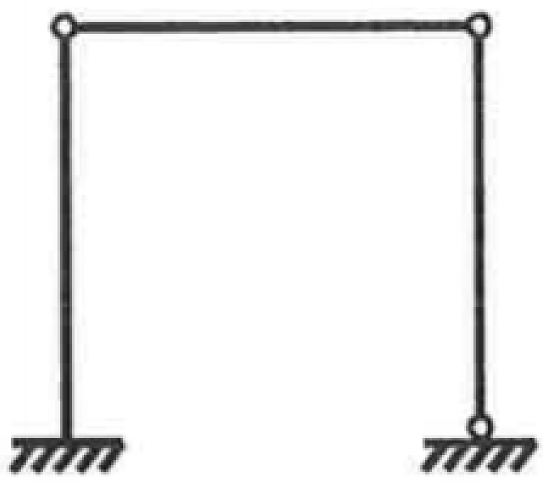
Articulação fixa



Engaste
Engastamento

EXERCÍCIO

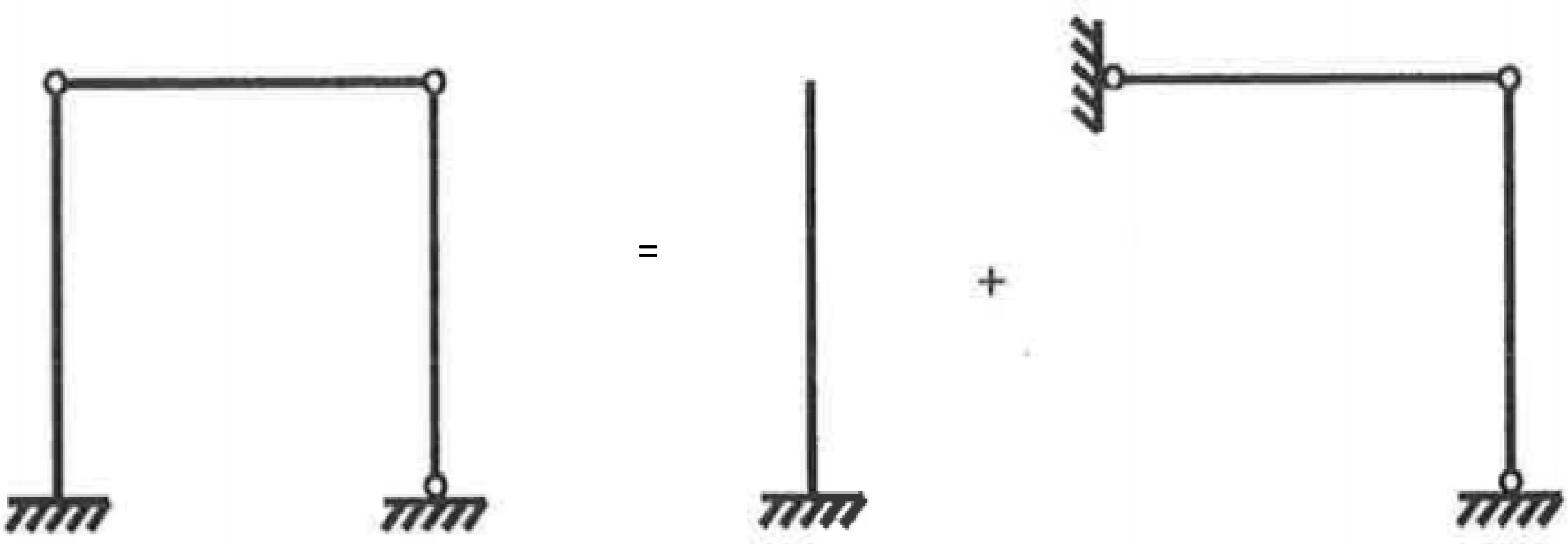
Decompor a estrutura e denominar as subestruturas



COMO DECOMPOR?

- **QUAL É A ESTRUTURA QUE SE APÓIA EM OUTRAS E NÃO DÁ APOIO A NENHUMA? COMEÇAR POR ELA.**

- **QUAL É A ESTRUTURA QUE NÃO SE APÓIA EM NENHUMA E DÁ APOIO ÀS OUTRAS? TERMINAR POR ELA.**

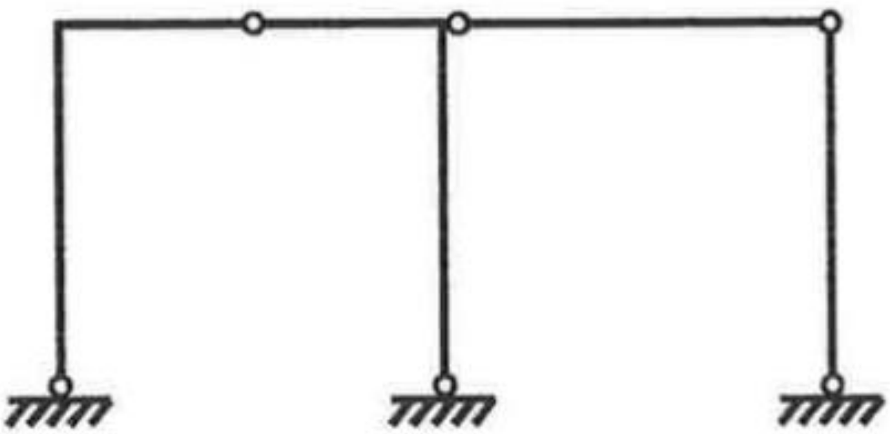


Viga em balanço ou
Viga engastada

Pórtico triarticulado

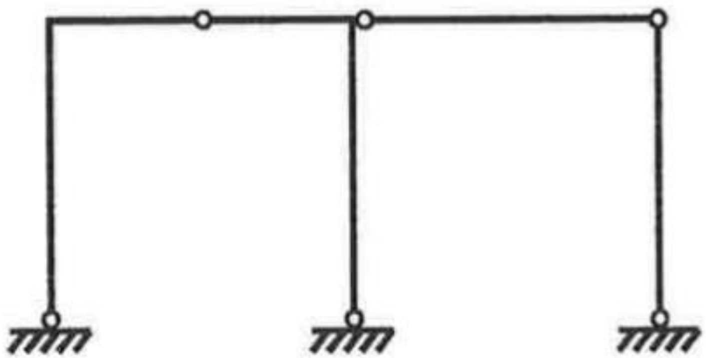
EXERCÍCIO

Decompor a estrutura e denominar as subestruturas



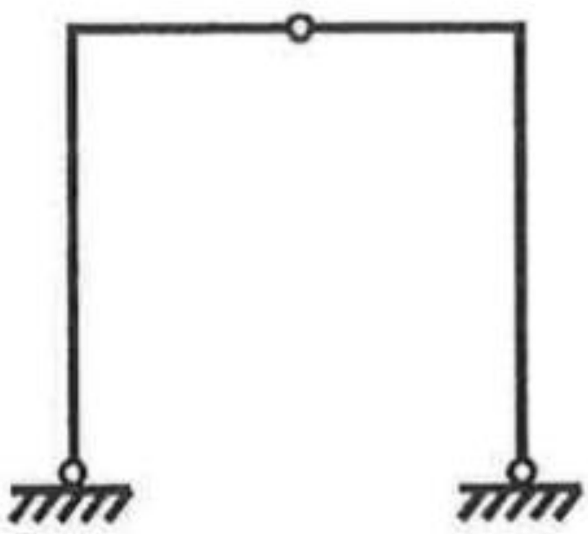
COMO DECOMPOR?

- QUAL É A ESTRUTURA QUE SE APÓIA EM OUTRAS E NÃO DÁ APOIO A NENHUMA? COMEÇAR POR ELA.
- QUAL É A ESTRUTURA QUE NÃO SE APÓIA EM NENHUMA E DÁ APOIO ÀS OUTRAS? TERMINAR POR ELA.



=

=



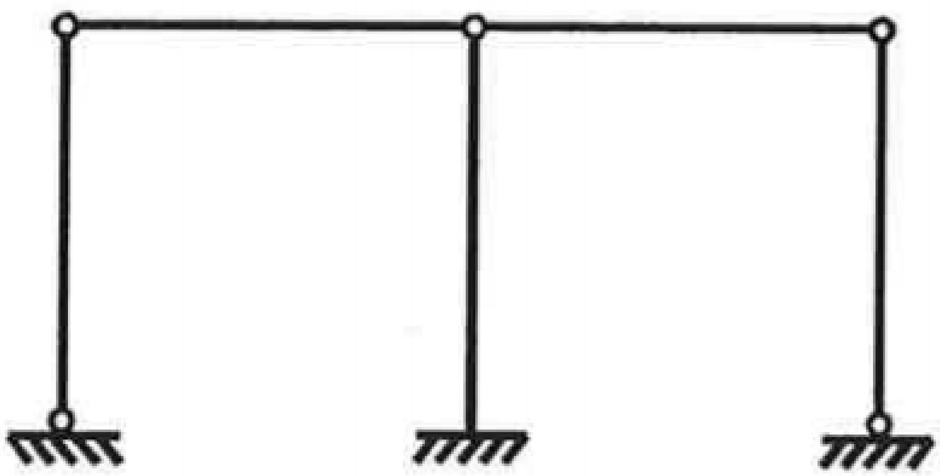
+

Pórtico triarticulado

Pórtico triarticulado

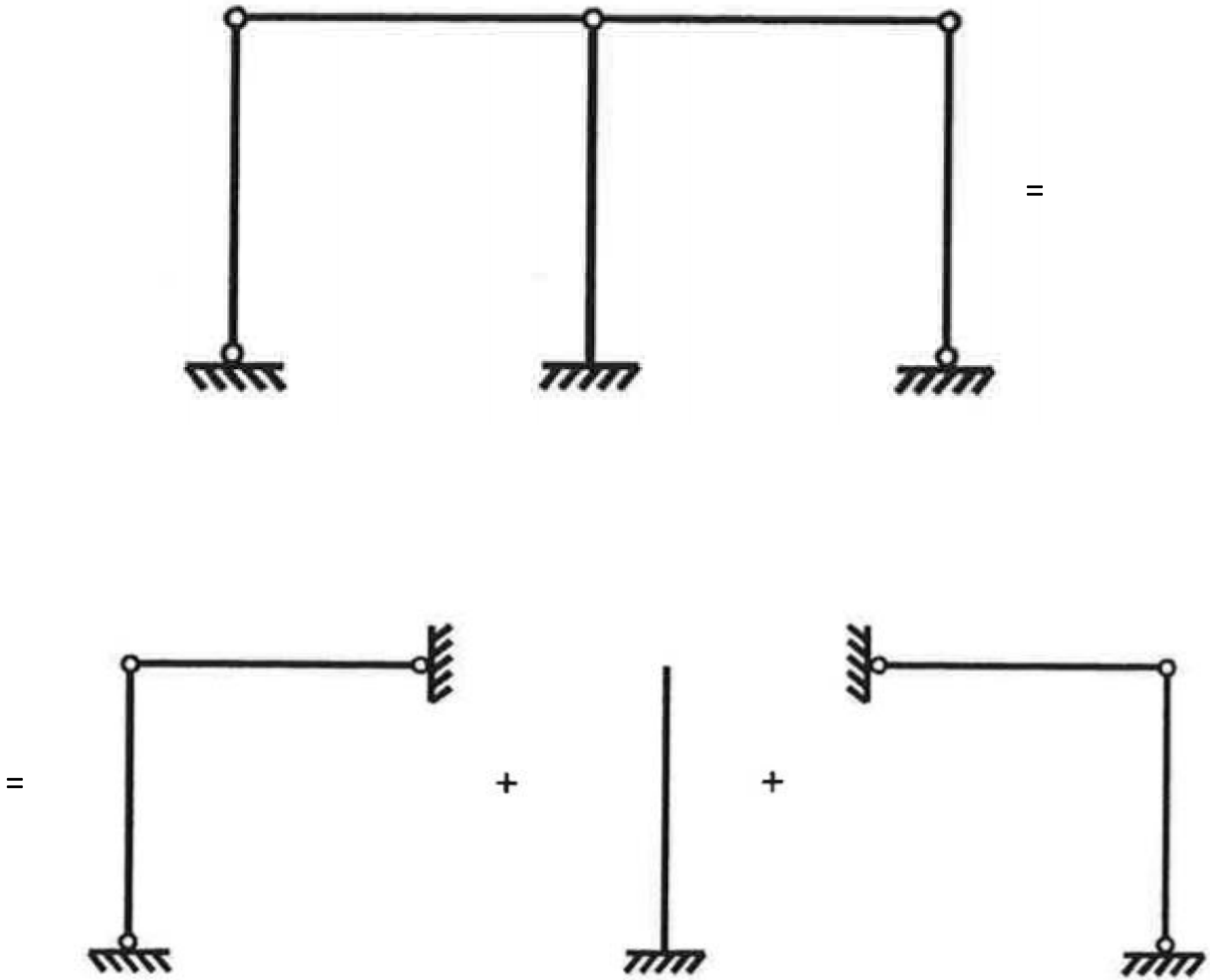
EXERCÍCIO

Decompor a estrutura e denominar as subestruturas



COMO DECOMPOR?

- QUAL É A ESTRUTURA QUE SE APÓIA EM OUTRAS E NÃO DÁ APOIO A NENHUMA? COMEÇAR POR ELA.
- QUAL É A ESTRUTURA QUE NÃO SE APÓIA EM NENHUMA E DÁ APOIO ÀS OUTRAS? TERMINAR POR ELA.



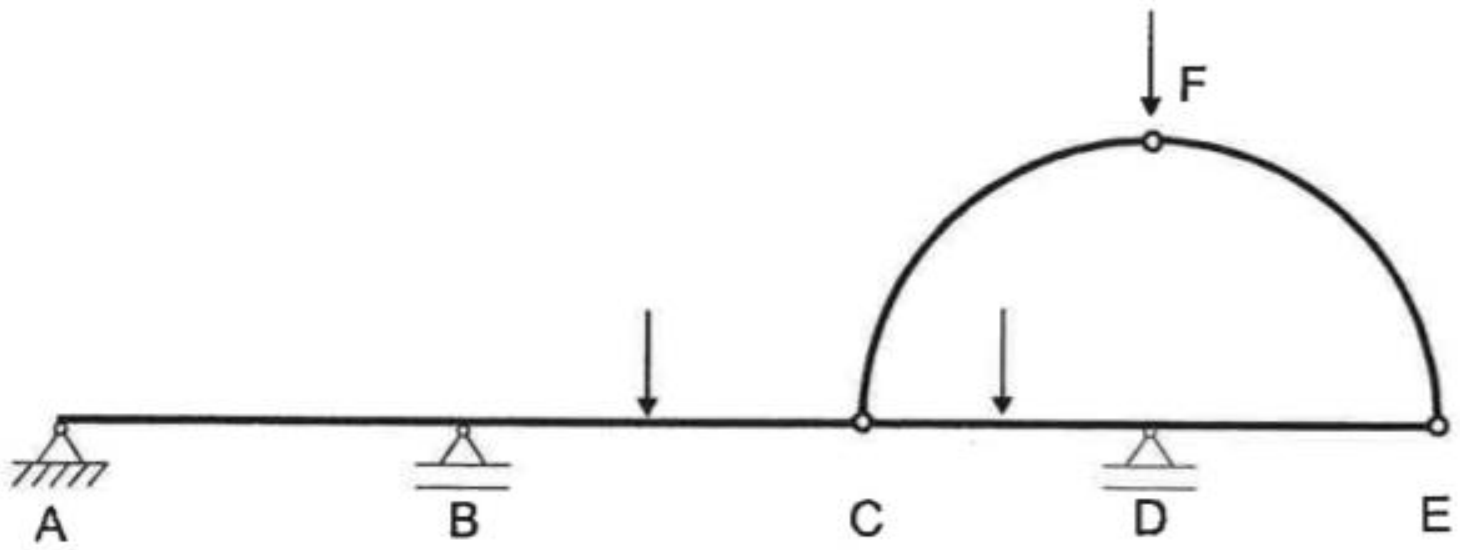
Pórtico triarticulado

Viga em balanço ou
Viga engastada

Pórtico triarticulado

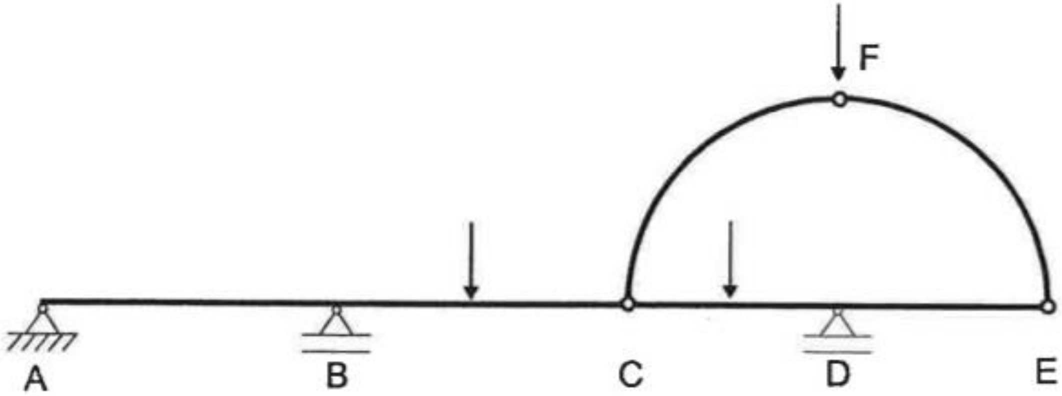
EXERCÍCIO

Decompor a estrutura e denominar as subestruturas

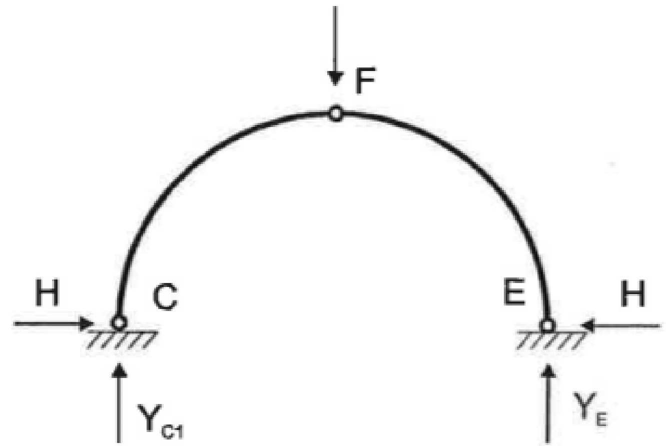


COMO DECOMPOR?

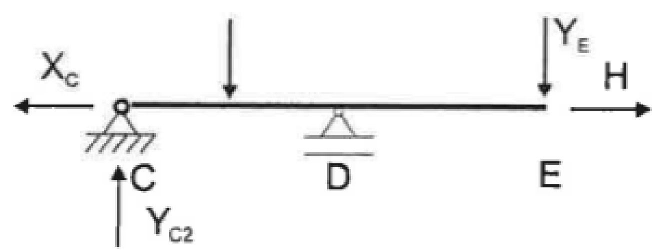
- QUAL É A ESTRUTURA QUE SE APÓIA EM OUTRAS E NÃO DÁ APOIO A NENHUMA? COMEÇAR POR ELA.
- QUAL É A ESTRUTURA QUE NÃO SE APÓIA EM NENHUMA E DÁ APOIO ÀS OUTRAS? TERMINAR POR ELA.

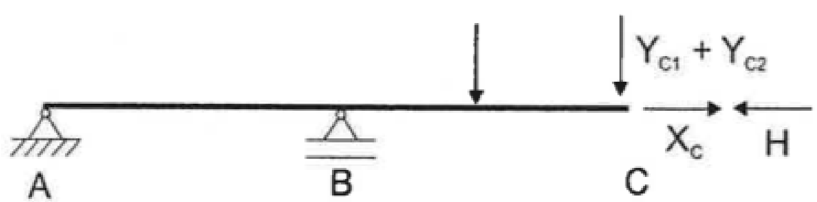


Arco triarticulado



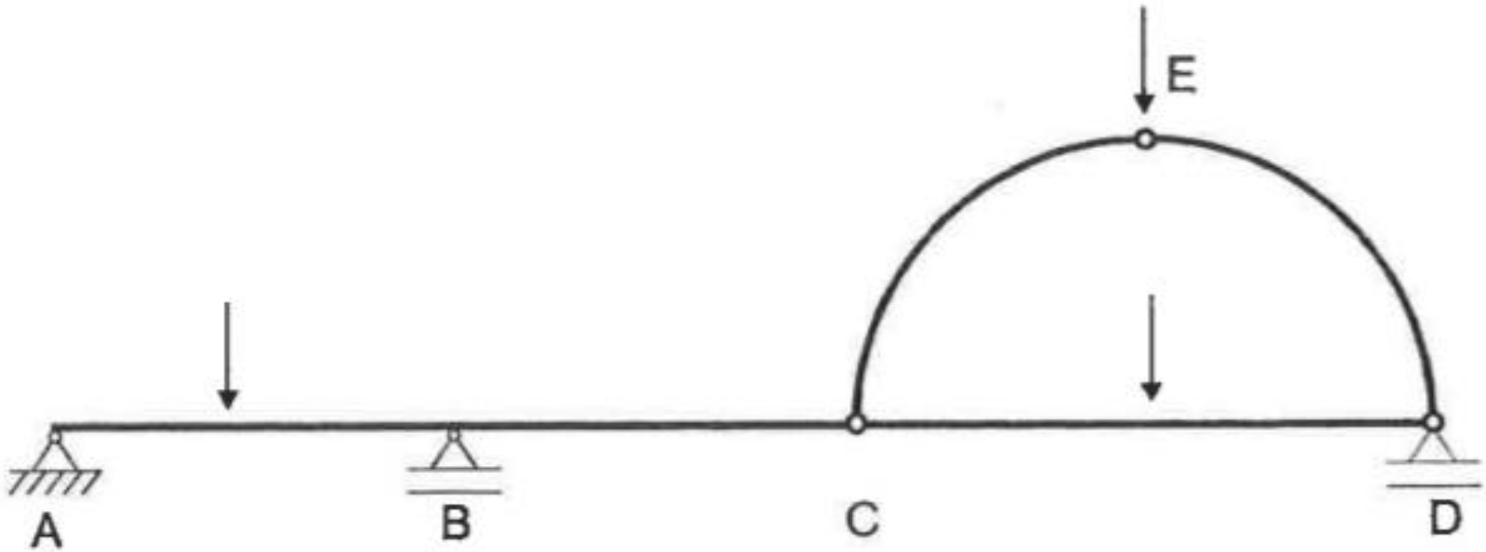
Viga simplesmente apoiada com balanço





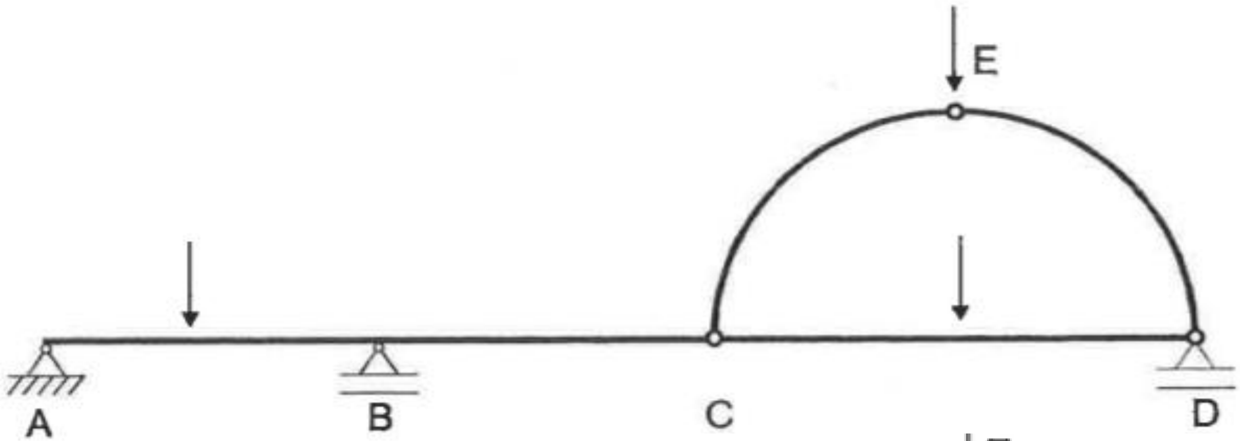
EXERCÍCIO

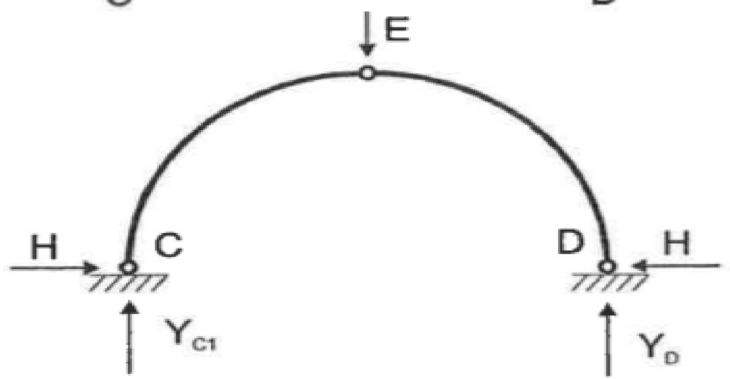
Decompor a estrutura e denominar as subestruturas



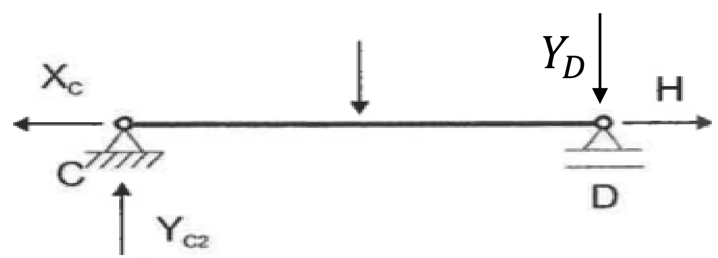
COMO DECOMPOR?

- **QUAL É A ESTRUTURA QUE SE APÓIA EM OUTRAS E NÃO DÁ APOIO A NENHUMA? COMEÇAR POR ELA.**
- **QUAL É A ESTRUTURA QUE NÃO SE APÓIA EM NENHUMA E DÁ APOIO ÀS OUTRAS? TERMINAR POR ELA.**

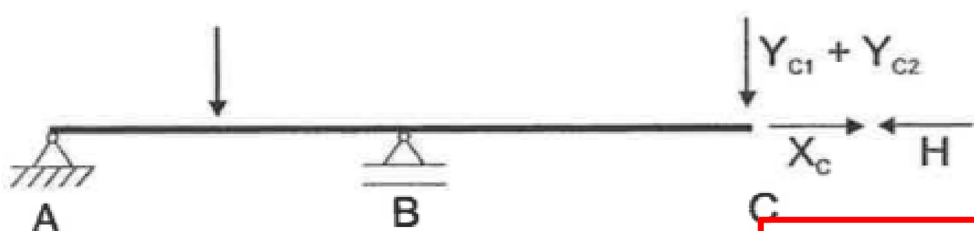




Arco triarticulado



Viga simplesmente apoiada
Viga biapoiada



Viga simplesmente apoiada com balanço

EXERCÍCIO

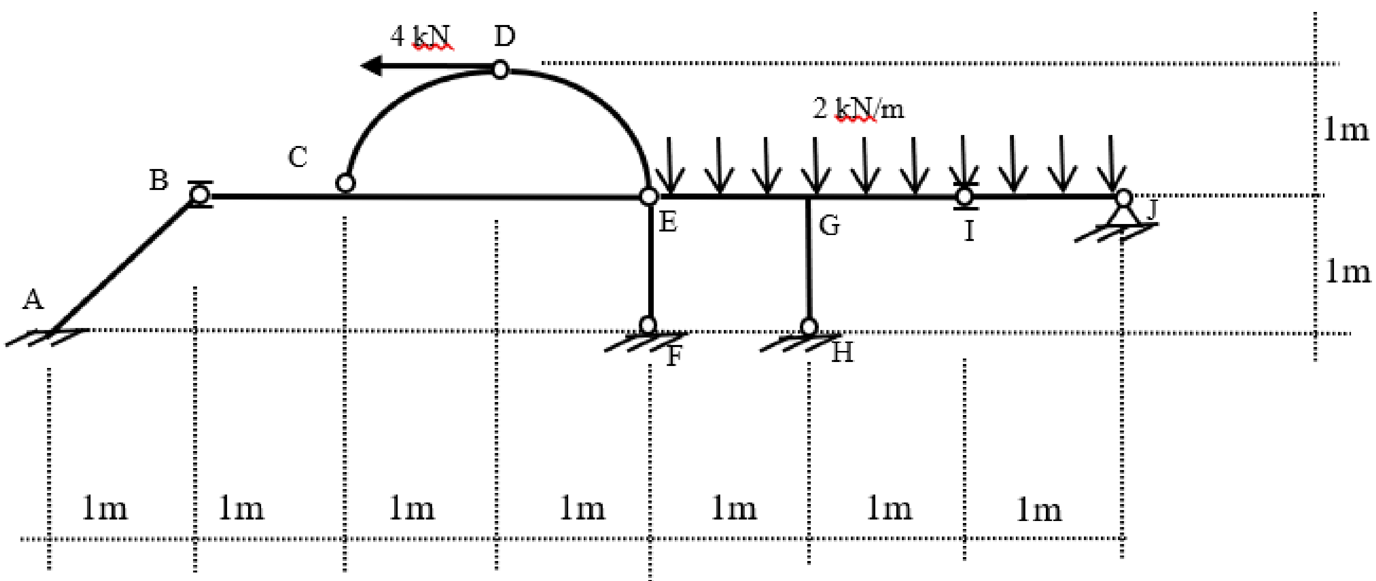
PEF-3200 Introdução à Mecânica das Estruturas **P3** **27/6/2018**

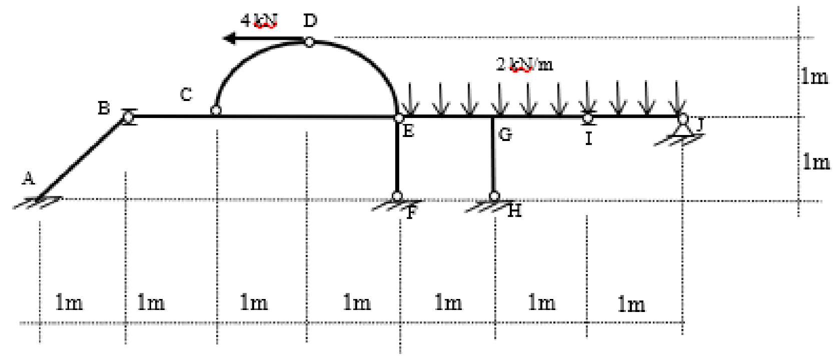
nome..no. USP....................................

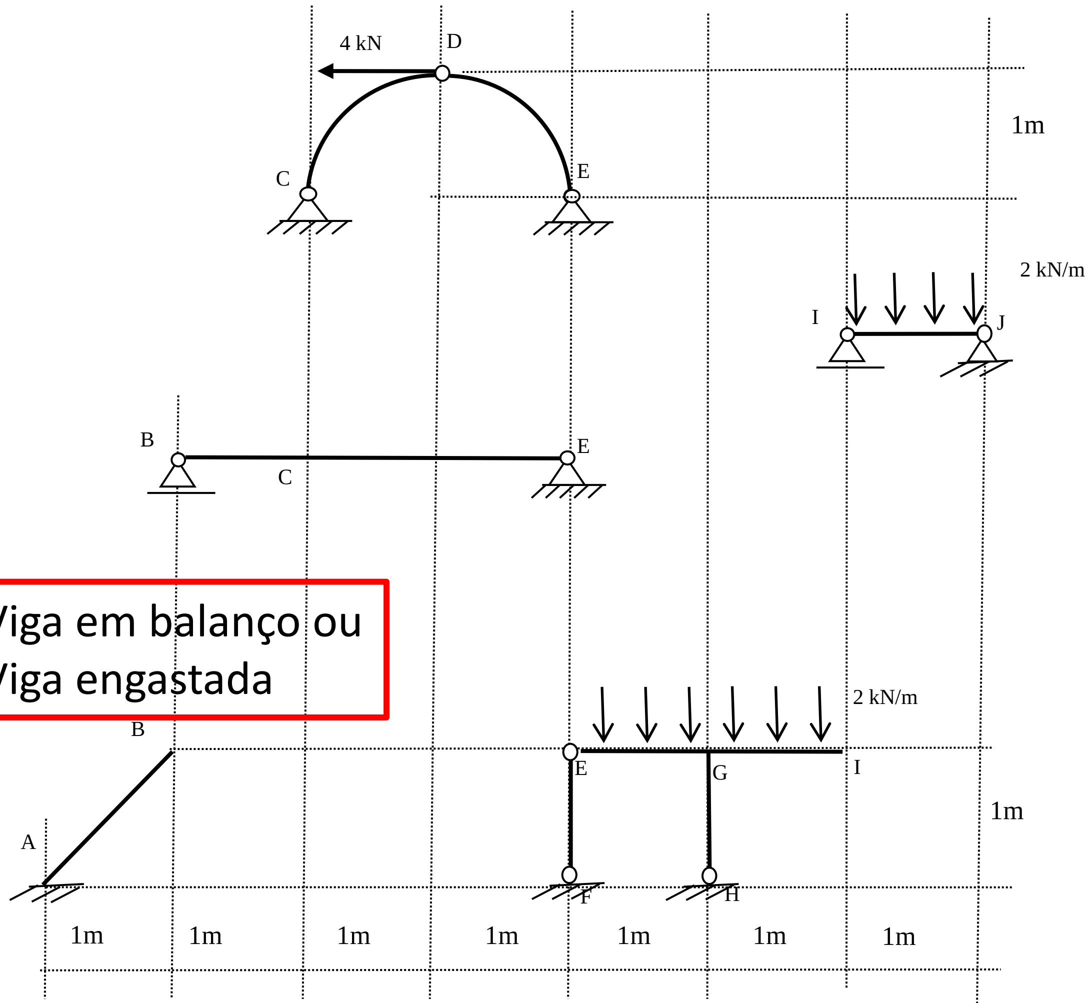
Questão 3 Na estrutura associada ABCDEFGHIJ representada na figura:

a) Identifique as subestruturas que a compõem (isolando e nomeando);

b) Determine as reações nos apoios F e H.







Arco triarticulado

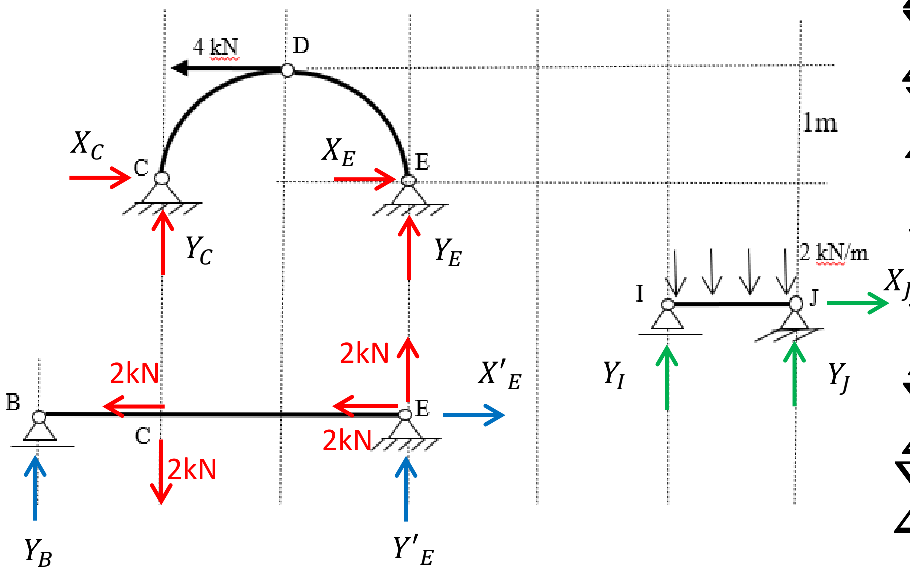
Viga simplesmente apoiada ou Viga biapoiada

Viga simplesmente apoiada ou Viga biapoiada

Viga em balanço ou Viga engastada

Pórtico triarticulado

1ª OPÇÃO



$$\sum M_{(C)} = 0 = 4 * 1 + Y_E * 2 \implies Y_E = -2\ kN$$

$$\sum Y = 0 = Y_C + Y_E \implies Y_C = 2\ kN$$

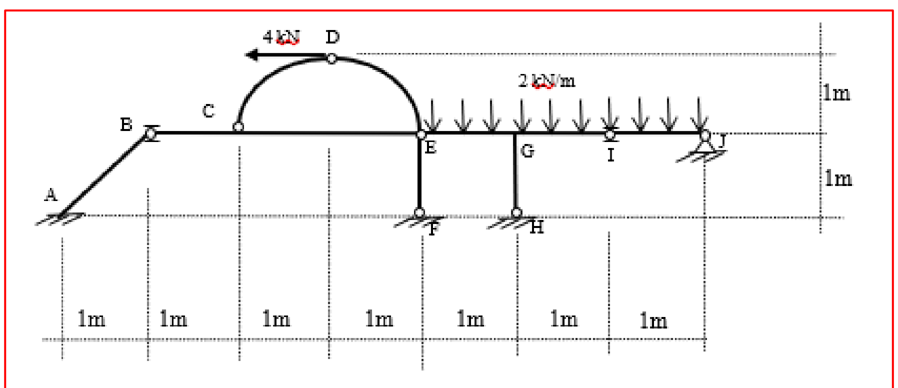
$$\sum M_{fletor}^{D,direita} = 0 = X_E * 1 + Y_E * 1 \implies X_E = 2\ kN$$

$$\sum X = 0 = X_C - 4 + X_E \implies X_C = 2\ kN$$

$$\sum X = 0 = X_J \implies X_J = 0\ kN$$

$$\sum M_{(I)} = 0 = -2 * 1 * 0{,}5 + Y_J * 1 \implies Y_J = 1\ kN$$

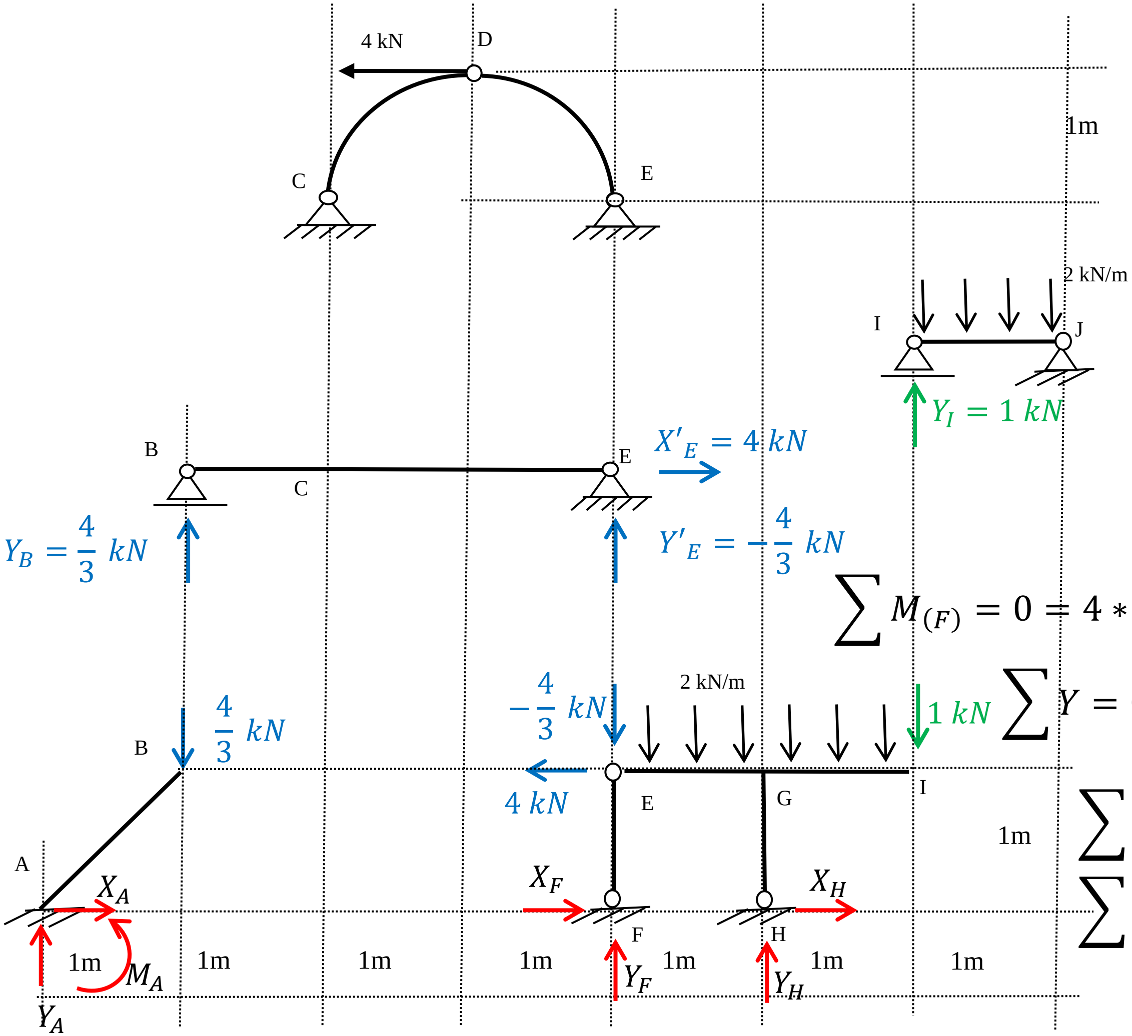
$$\sum Y = 0 = Y_I - 2 * 1 + Y_J \implies Y_I = 1\ kN$$



$$\sum X = 0 = -2 - 2 + X'_E \implies X'_E = 4\ kN$$

$$\sum M_{(B)} = 0 = -2 * 1 + 2 * 3 + Y'_E * 3 \implies Y'_E = -\frac{4}{3}\ kN$$

$$\sum Y = 0 = Y_B - 2 + 2 + Y'_E \implies Y_B = \frac{4}{3}\ kN$$



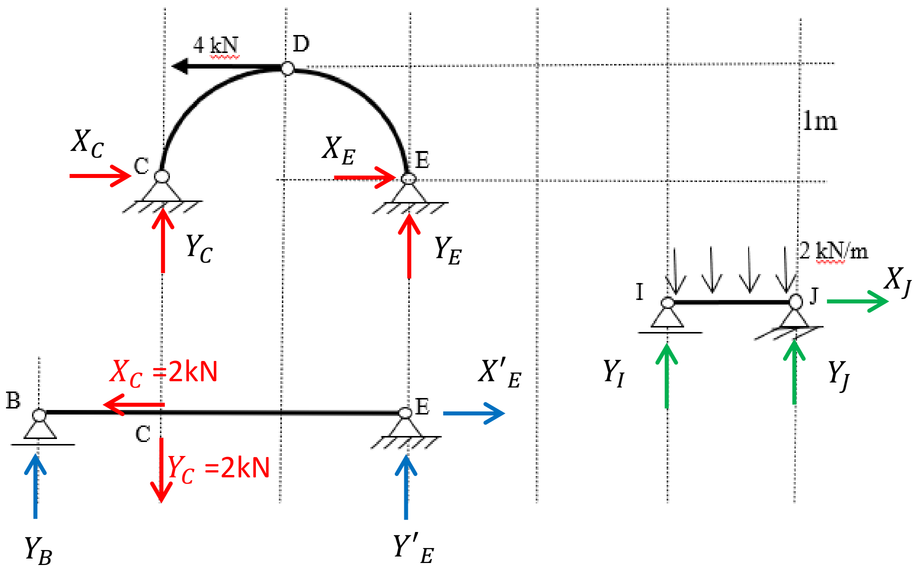
$$\sum M_{(F)} = 0 = 4 * 1 + Y_H * 1 - 2 * 2 * 1 - 1 * 2 \Longrightarrow Y_H = 2\,kN$$

$$\sum Y = 0 = Y_F - (-\frac{4}{3}) - 2 * 2 - 1 + Y_H \Longrightarrow Y_F = \frac{5}{3}\,kN$$

$$\sum M_{fletor}^{E,esquerda} = 0 = X_F * 1 \Longrightarrow X_F = 0\,kN$$

$$\sum X = 0 = X_F - 4 + X_H \Longrightarrow X_H = 4\,kN$$

2ª OPÇÃO



$$\sum M_{(C)} = 0 = 4 * 1 + Y_E * 2 \implies Y_E = -2\ kN$$

$$\sum Y = 0 = Y_C + Y_E \implies Y_C = 2\ kN$$

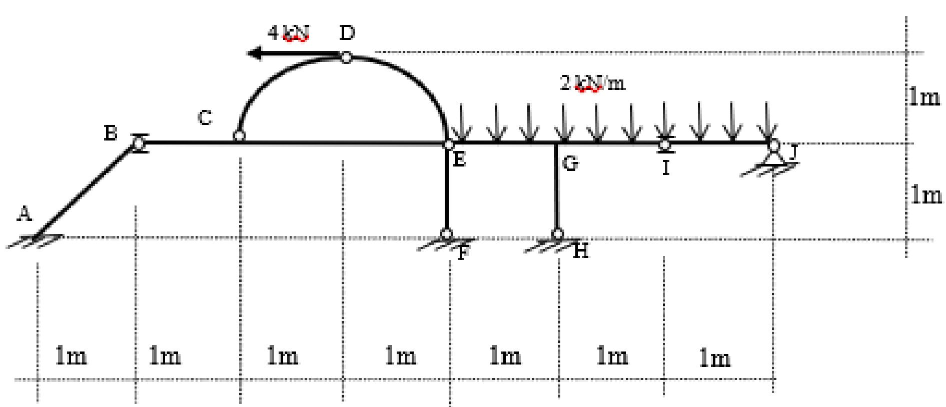
$$\sum M_{fletor}^{D,direita} = 0 = X_E * 1 + Y_E * 1 \implies X_E = 2\ kN$$

$$\sum X = 0 = X_C - 4 + X_E \implies X_C = 2\ kN$$

$$\sum X = 0 = X_J \implies X_J = 0\ kN$$

$$\sum M_{(I)} = 0 = -2 * 1 * 0{,}5 + Y_J * 1 \implies Y_J = 1\ kN$$

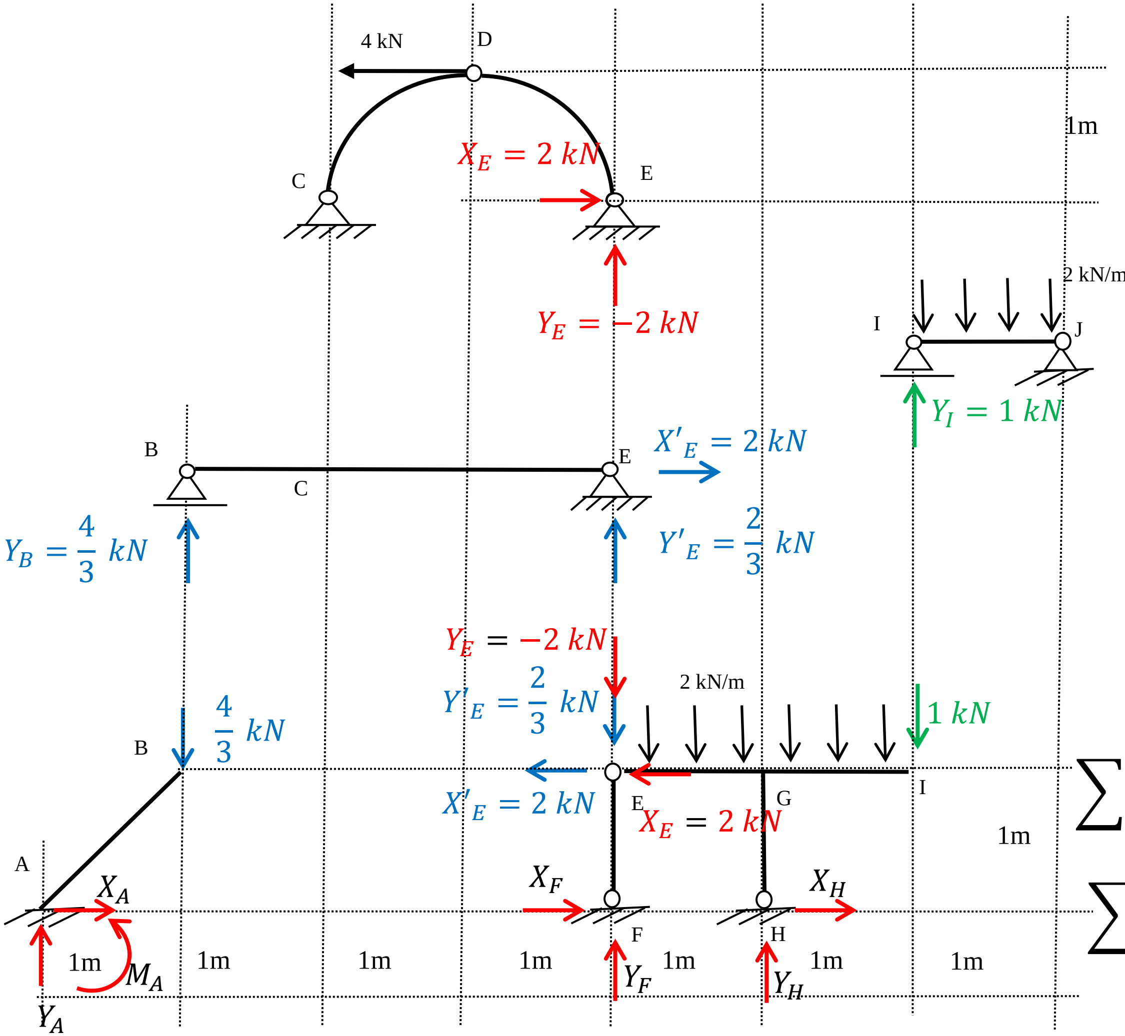
$$\sum Y = 0 = Y_I - 2 * 1 + Y_J \implies Y_I = 1\ kN$$



$$\sum X = 0 = -2 + X'_E \implies X'_E = 2\ kN$$

$$\sum M_{(B)} = 0 = -2 * 1 + Y'_E * 3 \implies Y'_E = \frac{2}{3}\ kN$$

$$\sum Y = 0 = Y_B - 2 + Y'_E \implies Y_B = \frac{4}{3}\ kN$$



$$\sum M_{fletor}^{E,esquerda} = 0 = X_F * 1 \Longrightarrow X_F = 0\ kN$$

$$\sum X = 0 = X_F - 2 - 2 + X_H \Longrightarrow X_H = 4\ kN$$

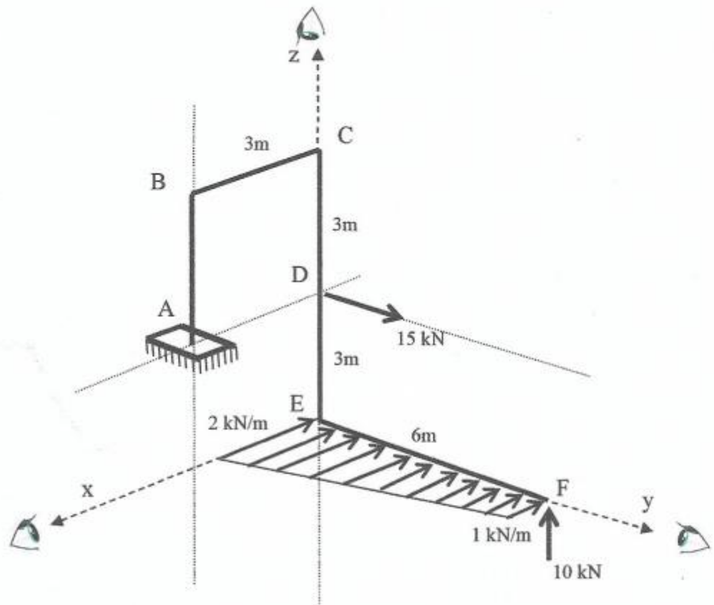
$$\sum M_{(F)} = 0 = 2*1 + 2*1 + Y_H*1 - 2*2*1 - 1*2 \Longrightarrow Y_H = 2\ kN$$

$$\sum Y = 0 = Y_F - \frac{2}{3} - (-2) - 2*2 - 1 + Y_H \Longrightarrow Y_F = \frac{5}{3}\ kN$$

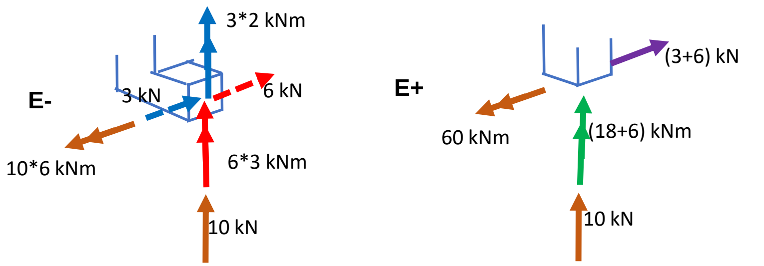
PEF-3200 – Prova de Recuperação – 19/8/2020

Nº USP:____________________Nome:____

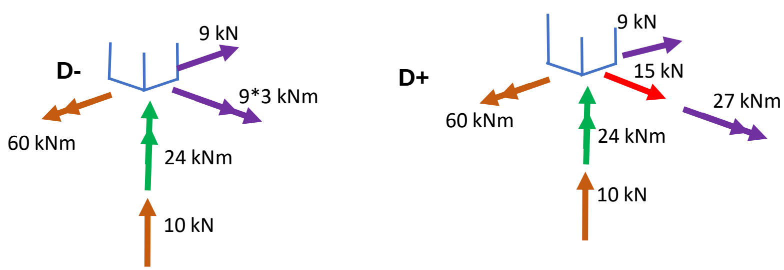
1ª Questão (3,5 pontos) A estrutura espacial ABCDEF da figura, engastada em A, está submetida a uma força de 10 kN (na direção z) na extremidade livre F, a uma força uniformemente variada (na direção x) de 1 kN/m (em F) a 2 kN/m (em E) e a uma força de 15 kN (na direção y) em D. Esboce os diagramas dos esforços solicitantes (N, V, M, T) no trecho CDEF. Os observadores estão situados defronte aos eixos.



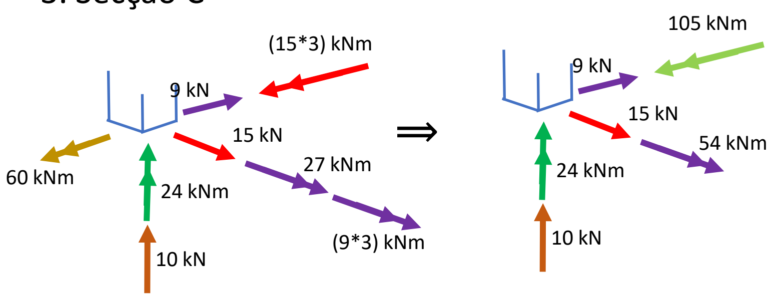
1. Secção E

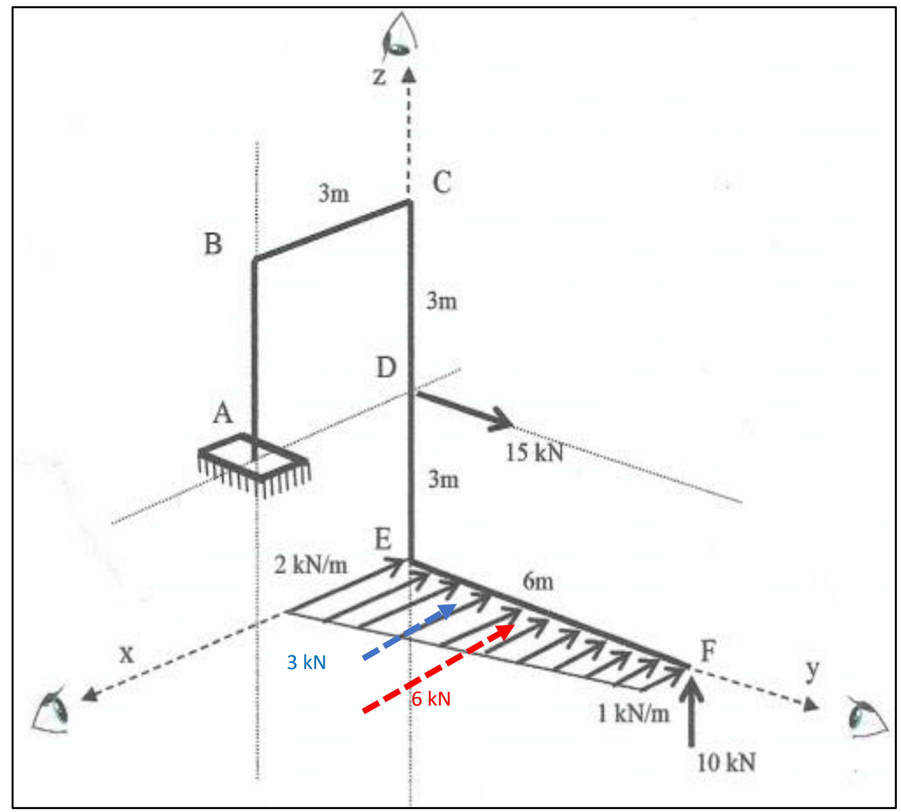


2. Secção D

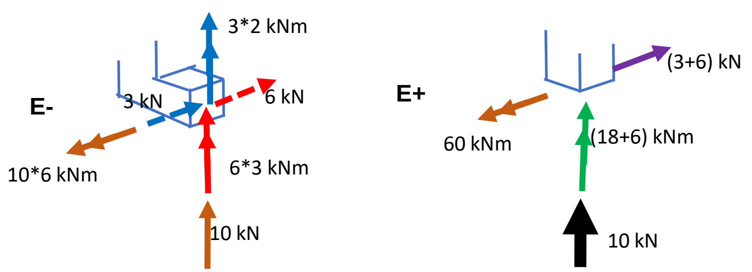


3. Secção C

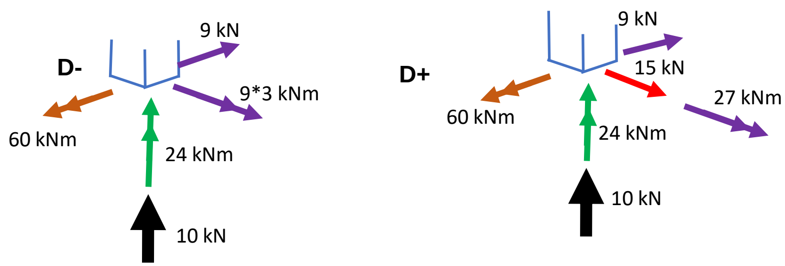




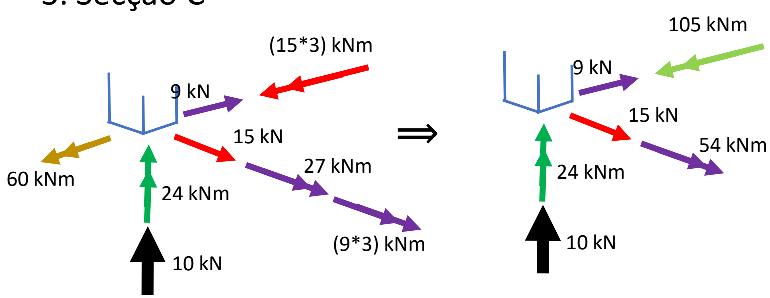
1. Secção E



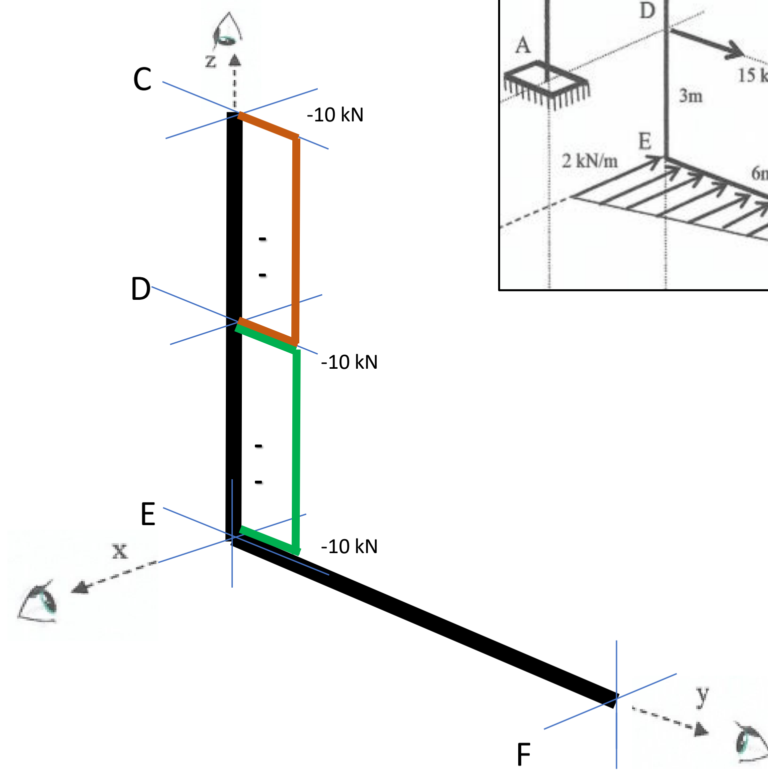
2. Secção D

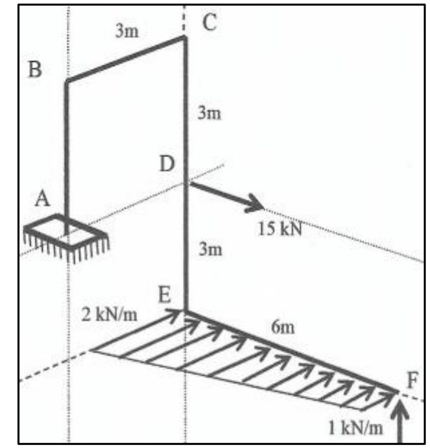


3. Secção C

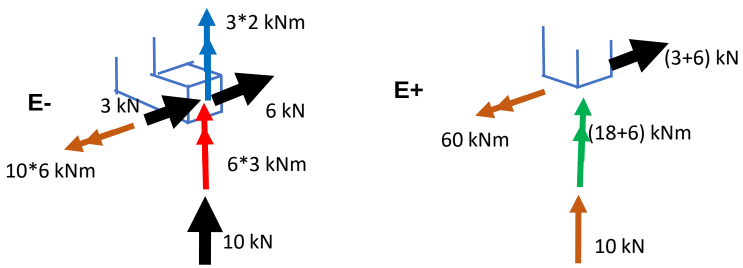


FORÇA NORMAL

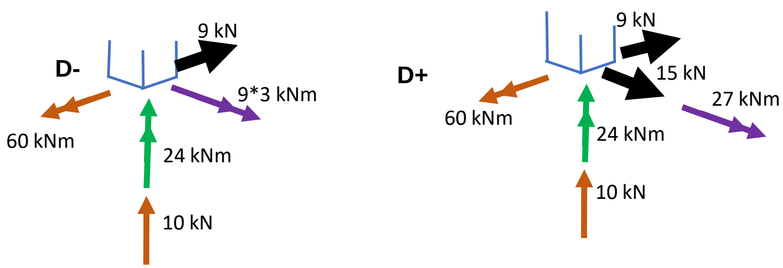




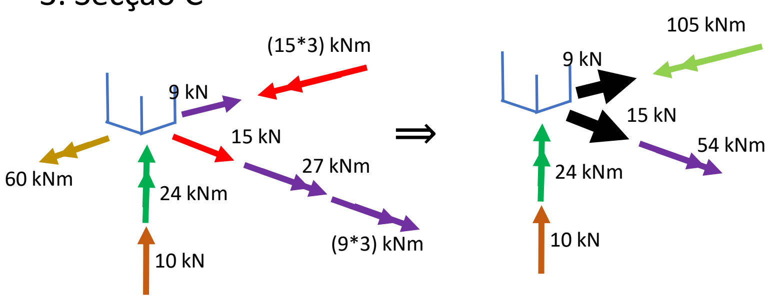
1. Secção E



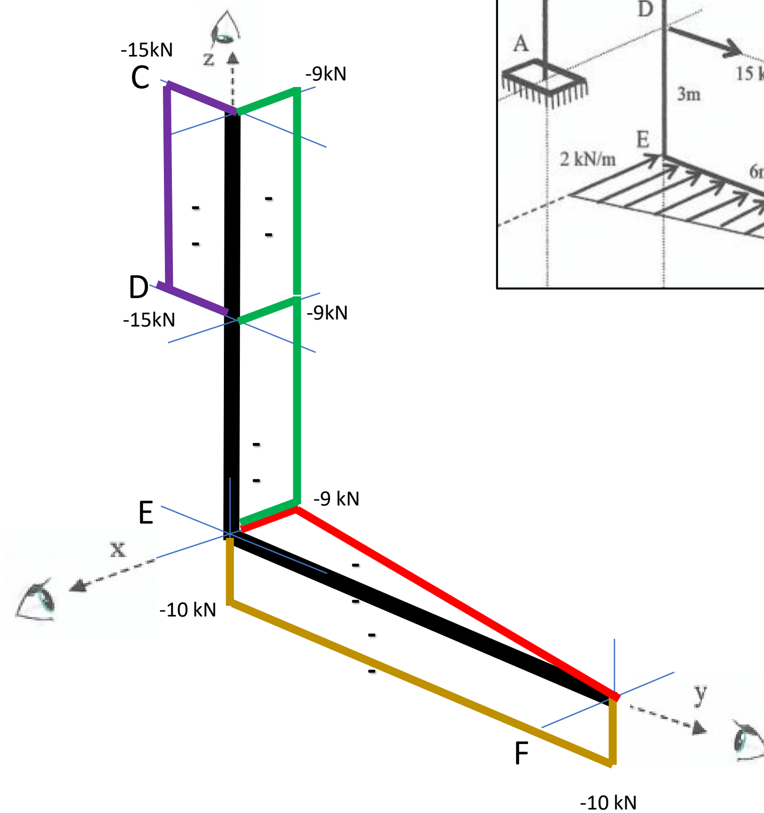
2. Secção D

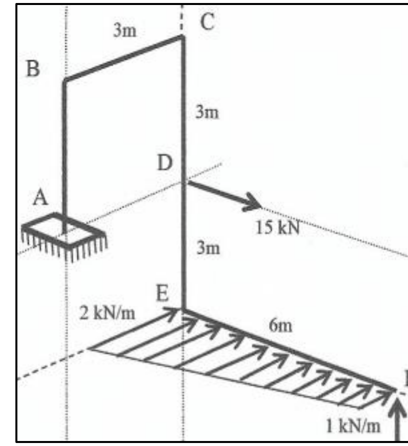


3. Secção C

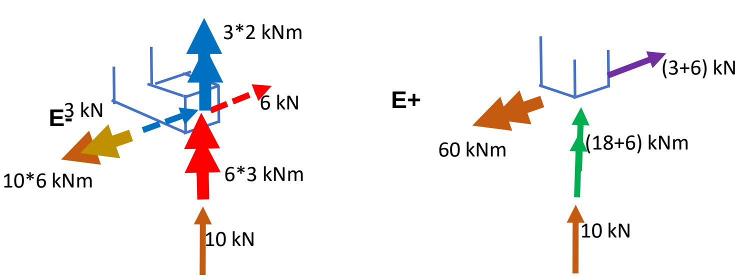


FORÇA CORTANTE

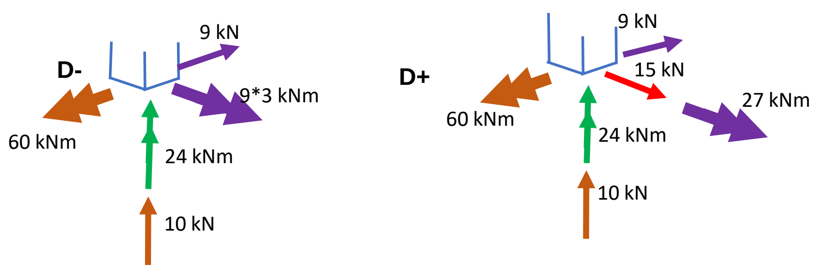




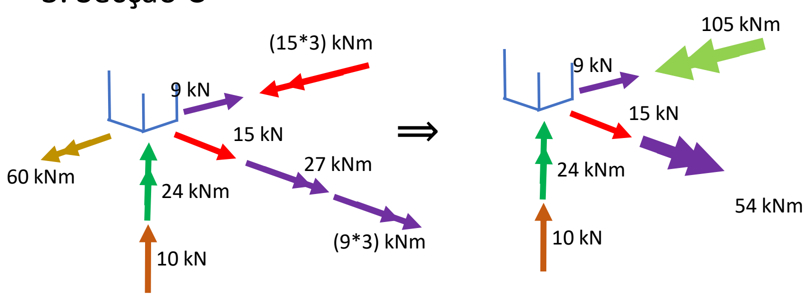
1. Secção E



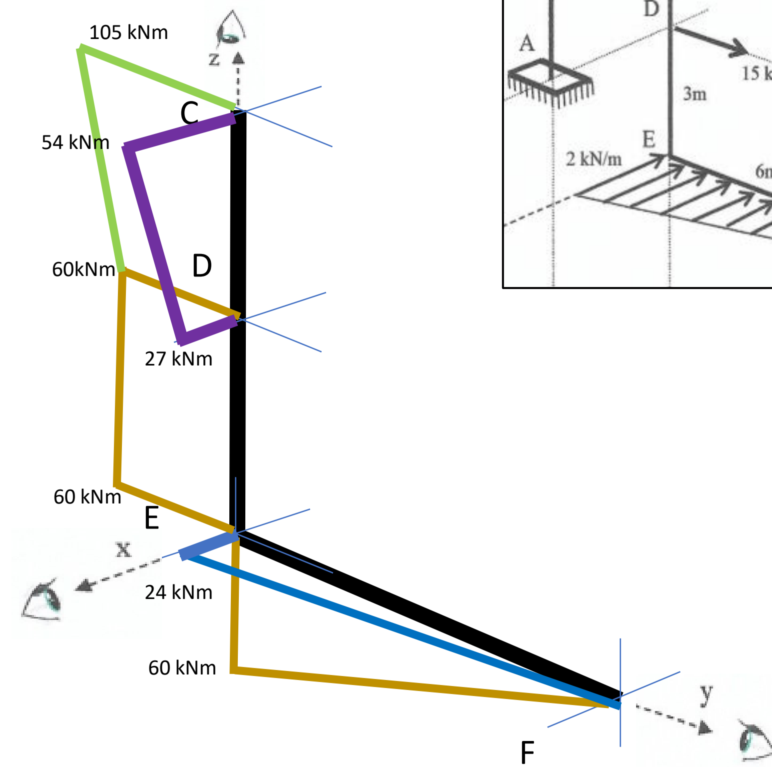
2. Secção D

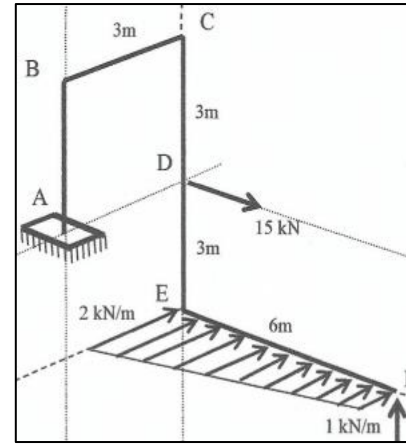


3. Secção C

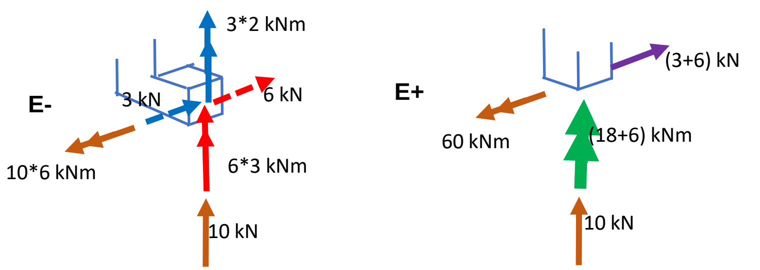


MOMENTO FLETOR

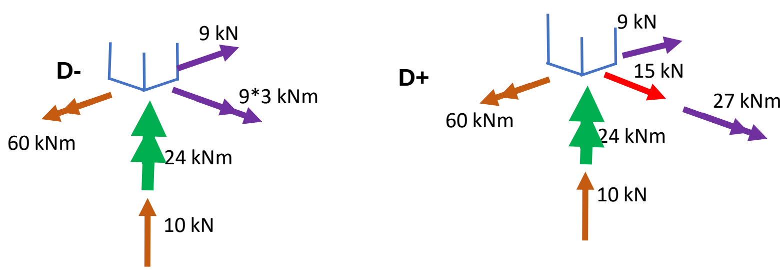




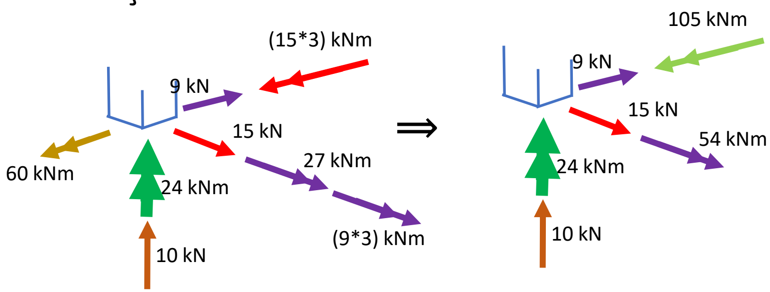
1. Secção E



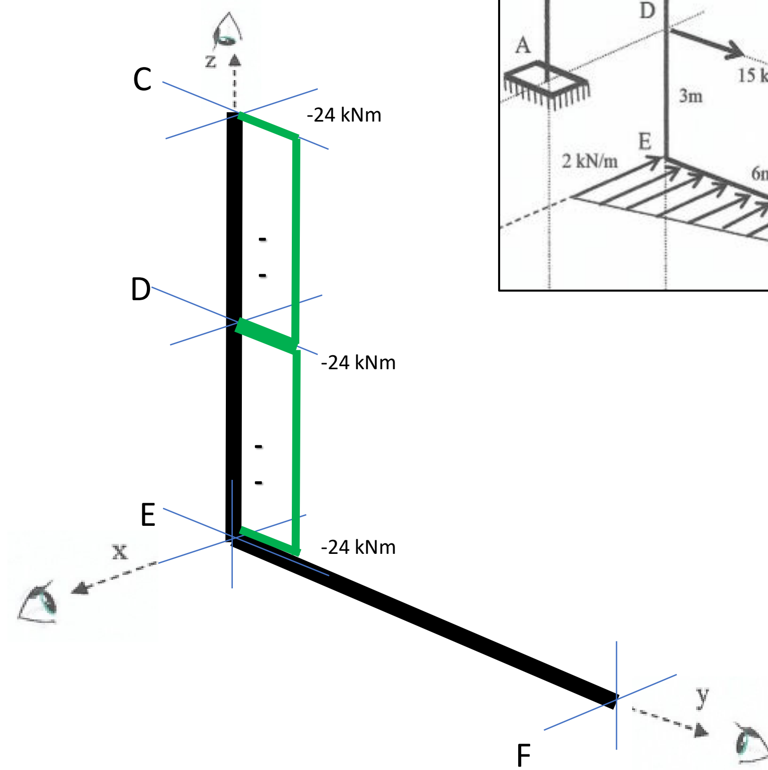
2. Secção D

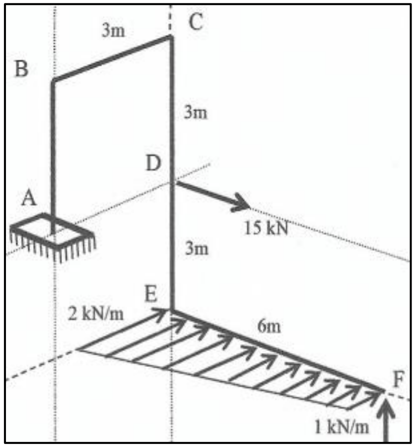


3. Secção C



MOMENTO DE TORÇÃO





PSUB -2023

1ª Questão (3,5 ptos) Para a estrutura espacial que está toda contida no plano *xy*, com forças concentradas na direção z e com os apoios indicados, conforme figura abaixo, calcule:

a) todas as reações;
b) diagrama de torção apenas no trecho AD;
c) todos os diagramas de esforço cortante e de momento fletor nos trechos AB e BCF.