MATEMÁTICA IV - $1^{\underline{o}}$ Semestre de 2023

$4^{\underline{a}}$ PROVA 1 10/07/2023

Para a nota, fazer uma questão de cada PARTE.

PARTE A - Polinômio de Taylor e Pontos Críticos

Questão 1 (2.0) Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0,0,0)$ e a matriz Hessiana de f em $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ é dada por $Hessf(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Decida se o ponto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbf{R}^3$ é um ponto de máximo local, de mínimo local ou de sela de f.

(b) Apresente o polinômio de Taylor de 2a. ordem de f ao redor de $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.

Questão 2 (2.0) Seja $f(x, y, z) = 5 - 3x^2 \cos y + 4 \sin^2 x + xz + 3yz + \lambda z^2 e^{xy}, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

(a) Mostre que o ponto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (0,0,0) \in \mathbf{R}^3$ é um ponto crítico de f.

(b) Tome $\lambda = 1$ e decida se o ponto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ é um ponto de máximo local, de mínimo local ou de sela de f. Justifique.

(c) Apresenteum valor de $\lambda \in \mathbf{R}$ de forma que o ponto crítico $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tenha classificação diferente daquela que ocorre quando $\lambda = 1$.

PARTE B - Integral de Linha

Questão 3 (1.5) Calcule o trabalho realizado para mover uma partícula da origem do plano xy até o ponto $A = (1, 1)$ ao longo da curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, sob a ação da força $F(x, y) = (xy, x^2y^3)$.

Questão 4 (1.5) Calcule o comprimento da curva em $\mathbf{R}^3$ parametrizada por $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 2\pi]$.

PARTE C - Integral Dupla e Integral Tripla

Questão 5 (1.5) Uma pirâmide está limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + 2y + 3z = 6$.

Calcule o volume desse sólido usando para isso integral múltipla (e não a fórmula dada em geometria).

Questão 6 (1.5) Seja $f : Q = [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o volume do sólido em $\mathbf{R}^3$ limitado "inferiormente" pelo plano xy, limitado "superiormente" pelo gráfico de f, cujas "faces laterais" são paralelas ao plano xz ou ao plano yz.

PARTE D - Integral de Superfície

Questão 7 (1.5) Calcule a massa da placa que se encontra no primeiro octante, determinada por $z^2 = 2xy$, entre os planos $x = 2$ e $y = 1$, com densidade superficial de massa $\rho(x,y,z) = z$.

Questão 8 (1.5) Considere a semi-esfera $S \subset \mathbf{R}^3$ de centro na origem e raio 2 com $z \geq 0$, orientada com normal unitária exterior á esfera.

Calcule o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = (2x+5z, 2y+5z, 7z)$ definido em $\mathbf{R}^3$, através de S.

PARTE E - Uso "Green", "Gauss" ou "Stokes"

Questão 9 (2.0) Calcule $\displaystyle\int_C (y + \tfrac{1}{4}y^4 \cos x)\, dx + y^3 \sin x\, dy$, onde C é a circunferência de centro na origem e raio 1 orientada no sentido anti-horário.

Questão 10 (2.0) Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x,y,z) = (y - x, yz, -xz)$ através da superfície formada pelas faces do cubo $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$ que não estão no plano xy, orientada com a normal exterior ao cubo.

Questão 11 (2.0) A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ é interceptada pelo plano $z = 3$, que a corta em 2 sólidos. Seja $\mathcal{V}$ o menor desses sólidos, e considere sua superfície S orientada pela normal exterior. Calcule $\int_S (xz, yz, 1).n dS$.

PARTE F - EDOs lineares homogêneas

Questão 12 (1.5) Ache a solução geral real da seguinte EDO:

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0.$$

Questão 13 (1.5) Ache a solução geral *real* de

$$\Big(\frac{d}{dt} - 2\frac{d^0}{dt^0}\Big)^2 \circ \Big(\frac{d}{dt} - 3i\frac{d^0}{dt^0}\Big)^3 \circ \Big(\frac{d}{dt} + 3i\frac{d^0}{dt^0}\Big)^3 [y] = 0,$$

isto é, da equação diferencial linear a coeficientes constantes cujo polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3i)^3(\lambda + 3i)^3$.