Funções de Classe $\mathcal{C}^1$

MAP 0217 MAT 0311

IME USP - 1° Semestre 2023

Resumo

Um resumo dos principais resultados sobre funções de classe $\mathcal{C}^1$ em abertos de $\mathbb{R}^p$ e algumas aplicações.

Supõe-se conhecidos os conceitos sobre derivadas direcionais e derivadas parciais de funções de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$.

As demonstrações que estão omitidas no texto foram vistas em classe e também podem ser encontradas no livro texto da disciplina.

1 Prolegômenos

Nestas notas, a menos de menção explícita em contrário, considera-se $\mathbb{R}^p$ com a estrutura euclidiana habitual proveniente do produto interno pitagórico, $(x_1, \ldots, x_p) \cdot (y_1, \ldots, y_p) = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j y_j$, a base canônica desse espaço é $\{e_1, \ldots, e_p\}$ e Ω denotará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^p$.

O conjunto das transformações lineares de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$ será denotado por $\mathsf{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, no caso em que $p = q$ será usada a notação $\mathsf{L}(\mathbb{R}^p)$ em vez de $\mathsf{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ as funções coordenadas de f são definidas, para $j \in \{1, \ldots, q\}$, como $f_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ f_j(x) = f(x) \cdot e_j$. Claro que então $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{q} f_j(x) e_j$

Considere $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, se $x \in \Omega$ e $u \in \mathbb{R}^p$ tem norma 1, a derivada direcional de f em x na direção u, se existir, será denotada por $D_u f(x)$, lembre que, por definição, $D_u f(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$. Se $u = e_j$ vai-se denotar esta derivada direcional apenas por $D_j f(x)$.

1.1 Funções Diferenciáveis

Definição 1 *Sejam $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e $c \in \Omega$. Diz-se que f é diferenciável em c se, por defimnição, existe uma transformação linear $T \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ tal que*

$$\lim_{h \to O} \frac{f(c+h) - f(c) - Th}{\|h\|} = O \quad (\dagger).$$

O limite na definição 1 é equivalente a $\lim_{h \to O} \dfrac{\|f(c+h) - f(c) - Th\|}{\|h\|} = 0$ e serão usados tanto este como aquele conforme for mais cômodo, sem menção a isto.

Fato 1 *Sejam $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e $c \in \Omega$. Se $T \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ satisfaz $(\dagger)$ então, para todo $u \in \mathbb{R}^p$ de norma 1, tem-se que existe a derivada direcional $D_u f(c)$ e $Tu = D_u f(c)$.*

Demonstração: Imediata, o leitor fica convidado a fazer os detalhes. ∎

Daqui segue-se de pronto o seguinte resultado, importante demais para ser chamado "corolário"(que seria o apropriado).

Fato 2 *Suponha que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e $c \in \Omega$. Existe no máximo uma transformação linear $T \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ que satisfaz $(\dagger)$ e, nesse caso, a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ é $[D_j f_i(c)]_{1 \le i \le q,\, 1 \le j \le p}$.*

Exercício 1 *Demonstre o fato 2.*

Notação: Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ é diferenciável em $c \in \Omega$ a única transformação linear que satisfaz $(\dagger)$ sera denotada por $Df(c)$ e será chamada diferencial de f em c. Nesse caso, a matriz de $Df(c)$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ é chamada jacobiana de f em c e será representada por $Jf(c)$ (pelo fato 2, $Jf(c) = [D_j f_i(c)]_{1 \le i \le q,\, 1 \le j \le p} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)\right]_{1 \le i \le q,\, 1 \le j \le p}$).

Fato 3 *Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ é diferenciável em $c \in \Omega$ então f é contínua em c.*

Demonstração: Segue de modo direto de $(\dagger)$, pois toda transformação linear de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$ é contínua. ∎

Exercício 2 *Suponha que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ são diferenciáveis em $c \in \Omega$ e mostre que então:*

(i) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a fun
cc ao $h = f + \lambda g$ é diferenciável em c e $Dh(c) = Df(c) + \lambda Dg(c)$.

(ii) A função $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = f(x) \cdot g(x)$, é diferenciável em c e $Dw(c)e_j = D_j f(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot D_j g(c)$.

Exemplo 1 O fato 1 mostra que se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ é diferenciável no ponto c então existe a derivada direcional de f em c, $D_u f(c)$, para todo u de norma 1 em $\mathbb{R}^p$. A recíproca não vale, considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = 1$ se $x^2 < y < 2x^2$ e $f(x, y) = 0$ caso contrário (i.e. f é 1 no interior da região que fica entre as parábolas de equação $y = x^2$ e $y = 2x^2$, e é zero fora dessa região). Claro que se u éum vetor de norma 1 de $\mathbb{R}^2$ então $D_u f(O) = 0$. Mas f não é diferenciável na origem, pois f nem mesmo é contínua nesse ponto.

Os exercícios 39.A a 39.H do livro de Bartle, fornecem mais exemplos ligados ao tema abordado no exemplo 1 acima.

A questão de existência da diferencial de uma função em um ponto c do seu domínio em que existam as derivadas parciais $D_j f_i(c)$ é delicada, o resultado a seguir fornece uma condição suficiente para isso acontecer.

Fato 4 *Suponha que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e $c \in \Omega$. Se existem as derivadas parciais $D_j f_i(x)$, para todo x em uma vizinhança de c e essas derivadas parciais são contínuas em c, então f é diferenciável em c.*

A demonstração deste resultado é uma notável aplicação do teorema do valor médio (para funções reais de variável real) e está feita no livro de Bartle (vide teorema 39.9), não será apresentada aqui.

Exercício 3 *Sejam $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e $c \in \Omega$, então f é diferenciável em c se, e só todas as funções coordenadas f_i, $1 \leq i \leq q$, forem diferenciáveis em c.*

1.2 Regra da Cadeia e uma aplicação

A regra da cadeia vale para funções diferenciáveis entre $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$.

Fato 5 [**Regra da Cadeia**] *Considere Ω e Ω_1 subconjunto abertos respectivamente de $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$. Sejam $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$, com $f(\Omega) \subset \Omega_1$ e $g : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^s$. Se f é diferenciável em $c \in \Omega$ e g é diferenciável em $f(c)$ então a função composta $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^s$ é diferenciável em c e $D(g \circ f)(c) = Dg(f(c)) \circ Df(c)$.*

Demonstração: Veja a prova do teorema 40.1 no texto de Bartle. ∎

O exemplo a seguir mostra que nem tudo que vale para funções reais de uma variável real vale em no caso de funções de várias variáveis.

O velho e bom teorema de Rolle não vale em geral, portanto o teorema do valor médio...

Exemplo 2 Seja $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(t) = (\cos t, \sin t)$.

Claro que f é contínua em $[0, 2\pi]$, é diferenciável no intervalo aberto $(0, 2\pi)$ (porque?) e $f(0) = f(2\pi) = (1, 0)$.

Mas a diferencial de f em $t \in (0, 2\pi)$ tem matriz jacobiana $\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ que nunca é nula!

Isso mostra que o teorema do valor médio com o enunciado conhecido para funções reais de variável real não vale, há algo nessa direção, mas antes de continuar um resultado para mostrar que há uma situação em que o teorema do valor médio ainda vale.

Fato 6 *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e suponha que a e b são pontos de Ω tais que o segmento de reta S_{ab} que une a e b esteja contido em Ω. Se f é diferenciável em todo ponto de S_{ab} então existe c no interior do segmento S_{ab} tal que $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$.*

Demonstração: Considere a parametrização de S_{ab} definida por $\sigma(t) = a + t(b - a),\ t \in [0, 1]$, e a função $g = f \circ \sigma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Claro que σ é diferenciável em $(0, 1)$ e $J\sigma(t) = [b - a]$, para todo $t \in (0, 1)$ (portanto $D\sigma(t)(\lambda) = \lambda(b - a)$, para todos os $t \in (0, 1)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$).

Assim pela regra da cadeia, g é diferenciável e $Dg(t) = Df(\sigma(t)) \circ D\sigma(t)$.

Como g é contínua em $[0, 1]$ e é derivável em $(0, 1)$, o teorema do valor médio garante que existe $\widetilde{t} \in (0, 1)$ tal que $g(1) - g(0) = Dg(\widetilde{t})(1) = b - a$.

Portanto $g(1) - g(0) = f(b) - f(a) = Df(\sigma(\widetilde{t}))(b - a)$, e $c = \sigma(\widetilde{t})$ prova o resultado. ∎

E o caso geral, para funções de contradomínio $\mathbb{R}^q$?

O exemplo 2 mostra que o teorema do valor médio, com o enunciado do fato 6 não vale, mas podem obter-se alguns resultados que *lembram* esse teorema do valor médio, por exemplo:

Fato 7 [**Desigualdade do Valor médio**] *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e suponha que a e b são pontos de Ω tais que o segmento de reta S_{ab} que une a e b esteja contido em Ω. Se f é diferenciável em todo ponto de S_{ab} então existe c no interior de S_{ab} tal que*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|Df(c)(b - a)\|. \tag{1}$$

Demonstração: Se $f(b) = f(a)$ o resultado é óvio, caso contrário considere $w = \frac{f(b)-f(a)}{\|f(b)-f(a)\|}$, claro que $\|w\| = 1$ e defina $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) \cdot w$.

Pelo item (ii) do exercício 2 g é diferenciável em S_{ab} e, para todos os $x \in S_{ab}$ e $u \in \mathbb{R}^p$, tem–se $Dg(x)(u) = Df(x)(u) \cdot w$.

Agora aplique o fato 6 para g e conclua que existe c no interior de S_{ab} tal que $g(b) - g(a) = Dg(c)(b-a) = Df(c)(b-a) \cdot w$.

Note que $g(b) - g(a) = (f(b) - f(a)) \cdot w = (f(b) - f(a)) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{\|f(b)-f(a)\|} = \|f(b) - f(a)\|$, assim a igualdade anterior mostra que

$$\|f(b) - f(a)\| = Df(c)(b-a) \cdot w.$$

Para concluir, basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwartz e lembrar que $\|w\| = 1$, para obter

$$\|f(b) - f(a)\| = Df(c)(b-a) \cdot w \leq \|Df(c)(b-a)\|. \qquad \blacksquare$$

2 Funções $\mathcal{C}^1$

A grosso modo, pode-se dizer que o "objetivo" básico do cálculo diferencial é usar propriedades da diferencial de f num ponto c para concluir coisas sobre a função f numa vizinhança de c.

Para esse tipo de "conclusões" obtidas serem fortes é muito útil admitir que f seja diferenciável não apenas no ponto c, mas ao menos numa vizinhança desse ponto, e que a diferencial de f varie continuamente, o exemplo a seguir ilustra a situaçã.

Exemplo 3 Suponha que é conhecido que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(0) = 0$, tem derivada em zero e $f'(0) = 1$. O que se pode concluir sobre f "perto" de zero?

É possível concluir que em existe $\varepsilon > 0$ tal que, no intervalo aberto $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tem-se $f(x) > 0$ para $0 < x < \varepsilon$ e $f(x) < 0$ em $(-\varepsilon, 0)$, caso você queira uma conclusão mais "quantitativa", pode concluir que, dados $\alpha < 1 < \beta$, existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta) > 0$ tal que, se $0 < |x| < \varepsilon$, então $\alpha x < f(x) < \beta x$.

Mas não é possível concluir que f seja *localmente crescente*, isto é, a informação que $f'(0) = 1 > 0$ é insuficiente para garantir que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ seja crescente. Para ver isso considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(0) = 0$ e $f(x) = x + 10x^2 \sin \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$.

Veja que f é até derivável em toda a reta, $f'(0) = 1$, mas em nenhum intervalo aberto que contenha zero a função f é crescente (veja o exercício 4 a seguir).

Exercício 4 *Considere* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $f(0) = 0$ *e* $f(x) = x + 10x^2 \sin \frac{1}{x}$*, se* $x \neq 0$.

(i) Mostre que f *é derivável em* $\mathbb{R}$*, e que* $f'(0) = 1$.

(ii) Mostre que $f'(x)$ *é contínua em todos os pontos* $x \neq 0$.

(iii) Mostre que se $a < 0 < b$ *existem pontos* $c \in (a, b)$ *tais que* $f'(c) < 0$,

(iv) Mostre que não existe $\varepsilon > 0$ *tal que* $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ *seja crescente.*

A situação muda se f tiver derivada contínua e $f'(0) = 1$. Então, se $\varepsilon > 0$ for pequeno o suficiente, tem-se $f'(x) > 0$ em todo intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e uma aplicação imediata do teorema do valor médio (para funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$) garante que $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ é crescente.

Esta pequena discussão mostra a importância neste contexto de que a diferencial $Df(x)$ varie "continuamente"com x.

De modo mais preciso o que faz é definir uma norma em $\mathsf{L}(R^p, R^q)$ e supor que em relação à distância introduzida por essa norma nesse espaço vetorial, a função $x \mapsto Df(x)$ seja contínua.

2.1 Uma norma em $\mathsf{L}(R^p, R^q)$

O conjunto $\mathsf{L}(R^p, R^q)$ tem uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com a soma habitual de funções $((T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x))$ e a multiplicação por escalares reais também usual $((\lambda T)(x) = \lambda T(x))$.

Exercício 5 *Mostre que se* $\{u_1, \ldots, u_p\}$ *e* $\{w_1, \ldots, w_q\}$ *são bases de* $\mathbb{R}^p$ *e* $\mathbb{R}^q$ *respectivamente, e se, para* $i \in \{1 \ldots, p\}$ *e* $j \in \{1, \ldots, q\}$*,* T_{ij} *é a transformação linear definida por* $T_{ij}(u_i) = w_j$ *e* $T_{ij}(u_k) = O$*, se* $k \neq i$*, então o conjunto* $\{T_{ij},\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$ *é uma base de* $\mathsf{L}(R^p, R^q)$*. (portanto* $\dim \mathsf{L}(R^p, R^q) = pq$*).*

Fato 8 *A função* $\|\cdot\|_{pq} : \mathsf{L}(R^p, R^q) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$\|T\|_{pq} = \sup\{\|T(x)\| \colon \|x\| = 1\}$$

é uma norma em $\mathsf{L}(R^p, R^q)$*, além disso, se* T *é uma transformaçãlinear de* $\mathbb{R}^p$ *em* $\mathbb{R}^q$ *então, para todo* $x \in \mathbb{R}^p$*, tem–se* $\|T(x)\| \leq \|T\|_{pq}\|x\|$.

Demonstração: A prova de que $\|\cdot\|_{pq}$ é uma norma é deixada como exercício.

Para ver que $\|T(x)\| \leq \|T\|_{pq}\|x\|$, observe que isto é imediato se $x = O$ e, para $x \neq O$, use que $x = \|x\|\frac{x}{\|x\|}$, a linearidade de T e a definição de $\|T\|_{pq}$ para obter

$$\|T(x)\| = \|x\|\|T(\tfrac{x}{\|x\|})\| \leq \|x\|\|T\|_{pq}. \qquad \blacksquare$$

Exercício 6 *Demonstre que se* $T \in \mathsf{L}(R^p, R^q)$ *e* $S \in \mathsf{L}(R^q, R^s)$ *então* $\|ST\|_{ps} \leq \|S\|_{qs}\|T\|_{pq}$

A partir de agora vai-se considerar em $\mathsf{L}(R^p, R^q)$ essa norma e assim, possui a estrutura de espaço métrico com a distância induzida por $\|\cdot\|_{pq}$.

Com essa estrutura de espaço métrico, muitas propriedades interessantes aparecem, por exemplo, o subconjunto de $\mathsf{L}(R^p, R^q)$ formado pelas transformações lineares de posto máximo é um aberto denso desse espaço. Em particular o subconjunto $\mathsf{GL}(R^p)$ de $\mathsf{L}(R^p)$, formado pelas transformações lineares inversíveis é aberto e denso.

Além disso, a função $Inv : \mathsf{GL}(R^p) \longrightarrow \mathsf{GL}(R^p)$, $Inv(T) = T^{-1}$, é contínua.

2.2 A classe $\mathcal{C}^1$

Definição 2 *Uma função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *é de classe* $\mathcal{C}^1$ *se, por definição, é diferenciável em todo* Ω *e a função* $x \in \Omega \mapsto Df(x) \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ *é contínua.*

Como foi comentado na seção 1.1 a questão de descobrir se f é ou não diferenciável apresenta dificuldades técnicas consideráveis, mas reconhecer se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ é de classe $\mathcal{C}^1$ é algo relativamente simples, graças ao resultado apresentado a seguir.

Fato 9 *A função* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *é de classe* $\mathcal{C}^1$ *se, e só se, todas as suas derivadas parciais* $D_j f_i(x)$ *existem e são contínuas em todo ponto* $x \in \Omega$.

Exercício 7 *Demonstre o fato 9.*

Os dois resultados a seguir são as peças chave dos grandes teoremas de cálculo diferencial.

O primeiro é mais uma das generalizações do teorema do valor médio para funções de várias variáveis.

Fato 10 [**Segunda Desigualdade do Valor médio**] *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ diferenciável em todo Ω e suponha que a e b são pontos desse conjunto tais que o segmento de reta S_{ab} que une a e b esteja contido em Ω. Se $x_\circ \in \Omega$ então f é diferenciável em todo ponto de S_{ab} então existe c no interior de S_{ab} tal que*

$$\|f(b) - f(a) - Df(x_\circ)(b-a)\| \leq \|b-a\| \sup_{x \in S_{ab}} \|Df(x) - Df(x_\circ)\|_{pq}. \quad (2)$$

Os detalhes da demonstração deste resultado (lema 41.3 do Bartle) não são feitos aqui, o resultado segue-se de uma aplicação da primeira desigualdade do valor médio (fato 7) à função $g(x) = f(x) - Df(x_\circ)(x),\ x \in \Omega$.

Como consequência direta deste resultado obtém-se o chamado "lema de aproximação".

Fato 11 [**Lema de aproximação**] *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$. Se $x_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ então existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que, para todos os pontos x_1 e x_2 na bola fechada de centro x_0 e raio δ, tem-se*

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|. \quad (3)$$

A demonstração é muito simples, basta usar a continuidade da função $x \mapsto Df(x)$ e (2). Os detalhes podem ser feitos como um instrutivo (e fácil) exercício.

2.3 Funções localmente injetoras

Lembre que uma transformação linear é injetora se, e apenas se, seu núcleo é o conjunto unitário $\{O\}$. Assim, se $T \in \mathsf{L}(R^p, R^q)$ é injetora, então $p \leq q$.

Fato 12 *Sejam $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$, $c \in \Omega$ e suponha que $Df(c)$ é injetora. Então existe uma vizinhança aberta de c, $U \subset \Omega$, tal que $f|_U$ é injetora e, além disso, se $f(U) = V$ a inversa de $f|_U$ é uma função contínua de V em U.*

Pode parecer "estranho"que o resultado apenas garanta a continuidade da inversa, nada mencione sobre essa função ser diferenciável, mas a explicação para isso é simples.

Funcções diferenciáveis estão definidas em abertos e na situação em que $p < q$ o conjunto V não é um aberto!

Este resultado é simples se $p = 1$ (prove como exercício que se $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^q$ é contínua, injetora sua imagem é um aberto de $\mathbb{R}^q$ e sua inversa é contínua, então $q = 1$), se $p \geq 2$ a afirmação feita acima está longe de ter demonstração simples... e de fato não tem, mas, simples ou não, é verdade.

Então, com a definição dada de diferenciabilidade, não se pode querer que $(f|_U)^{-1}$ seja diferenciável no caso $p < q$.

Um exemplo fácil de se entender que exemplifica isso é $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Claro que, para todos os t e λ reais, tem–se $Df(t)(\lambda) = \lambda(-\sin t, \cos t)$, portanto $Df(t)$ é injetora, para todo t. Isso mostra que, localmente, f é inversível e sua inversa (local) é contínua, mas como a imagem de f é uma circunferência do plano, não faz sentido querer que as inversas locais sejam diferenciáveis.

Na verdade, esse problema com o domínio da inversa é a única "falha"dessas inversas locais, pode-se mostrar que, nas hipóteses do fato 12, se U for escolhido com cuidado, existem um aberto W do contra domínio e uma função $G : W \longrightarrow U$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $G|_V = (f|_U)^{-1}$. Não se fará uso nesta disciplina deste resultado, mas ele merece ser mencionado.

Outro ponto interessante que o exemplo discutido antes mostra é que o fato de $Df(x)$ ser injetora em todos os pontos $x \in \Omega$ não garante que f seja injetora (globalmente), de fato nesse exemplo f é periódica, apesar de $Df(t)$ ser injetora, para todo $t \in \mathbb{R}$.

2.4 Funções localmente sobrejetoras

Aqui se analisa a situação se $Df(c)$ é sobrejetora.

Note que se T é uma transformação linear entre os espaços vetoriais E e F, a imagem de T é o subespaço de F gerado por $T(\mathcal{B})$, em que $\mathcal{B}$ é uma base de E. Portanto, se $T \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ é sobrejetora, então $p \geq q$.

Fato 13 *Sejam $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$, $c \in \Omega$ e suponha que $Df(c)$ é sobrejetora. Então existem reais estritamente positivos m e α tais que, para todo $\|y - f(c)\| \leq \frac{\alpha}{2m}$ a equação $f(x) = y$ tem uma solução na bola fechada de centro c e raio α.*

Em outras palavras, para todo $y \in \mathbb{R}^q$ com $\|y - f(c)\| \leq \frac{\alpha}{2m}$, existe $x_y \in \Omega$ tal que $\|x_y - c\| \leq \alpha$ e $f(x_y) = y$. Ou, de outra forma mais geométrica, a imagem da bola fechada de centro c e raio α contém a bola fechada de centro $f(c)$ e raio $\frac{\alpha}{2m}$.

Uma questão interessante aqui é analisar uma "dependência contínua"na escolha dos x_y, em termos precisos, suponha que (y_n) é uma sequência na bola fechada de centro $f(c)$ e raio $\frac{\alpha}{2m}$ que converge para $\overline{y}$. Primeiro use o fato 13 e tome um ponto $x_n \in \Omega$ tal que $\|x_n - c\| \leq \alpha$ e $f(x_n) = y_n$. Agora note que $\|\overline{y} - f(c)\| \leq \frac{\alpha}{2m}$, portanto a equaçã $f(x) = \overline{y}$ tem também *alguma* solução na bola fechada de centro c e raio α.

Será que pode-se garantir que a sequência x_n vai convergir para uma dessas soluções de $f(x) = \overline{y}$?

A resposta é negativa, não é possível garantir algo tão forte, mas..., a bola fechada de centro c e raio α é sequencialmente compacto, certo? Então (x_n) tem alguma subsequência (x_{n_k}) que converge, e seu limite $\overline{x}$ sem dúvida está na bola fechada de centro c e raio α, e por f ser contínua e $x_{n_k} \to \overline{x}$, resulta que $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(\overline{x})$. Como, pela cosntrução feita, $y_n \to \overline{y}$ segue-se de pronto que $f(\overline{x}) = \overline{y}$.

Ou seja, se (y_n) é uma sequência na bola fechada de centro $f(c)$ e raio $\frac{\alpha}{2m}$ que converge para $\overline{y}$ e $x_n \in \Omega$ satisfaz $\|x_n - c\| \leq \alpha$ e $f(x_n) = y_n$ então (x_n) tem subsequências convergentes e, além disso, se (x_{n_k}) é uma dessas subsequências convergentes, seu limite resolve $f(x) = \overline{y}$.

Apesar disso não é possível garantir a convergência de (x_n), esta sequência pode não ser convergente.

Um corolário do fato 13 é o chamado teorema da aplicação aberta:

Fato 14 *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que, para todo $x \in \Omega$, tem–se $Df(x)$ sobrejetora. Então, se $U \subset \Omega$ é aberto tem-se que $f(U)$ é aberto.*

3 Teorema da Função Inversa

Fato 15 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^p$, com $c \in \Omega$, e considere $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $Df(c)$ é bijetora.*

Então existem abertos U e V de $\mathbb{R}^p$ tais que $c \in U \subset \Omega$, $f(c) \in V$ e:

(i) $f|_U$ é injetora, $f(U) = V$ e sua inversa, $g = (f|_U)^{-1}$ é contínua.

(ii) A função $g : V \longrightarrow U$ é diferenciável em V.

(iii) Se $x \in U$ então $Df(x)$ é inversível e $Dg(y) = [Df(x)]^{-1}$.

(iv) g é de classe $\mathcal{C}^1$.

Observe-se antes de mais nada que, se for provado o item (ii) o resto deste teorema é de demonstração trivial.

De fato:

[i] A existência de um aberto $U \subset \Omega$, com $c \in U$, tal que $f|_U$ é injetora, é garantida pelo fato 12, que também garante a continuidade de $g = (f|_U)^{-1}$. Resta provar que $V = f(U)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^p$, para isso basta

ver que como $Df(c)$ é bijetora, então $\det[Df(c)] \neq 0$, então por f ser de classe $\mathcal{C}^1$ pode-se escolher o aberto U de forma a ter-se $\det[Df(x)] \neq 0$, para todo $x \in U$, assim $Df(x)$ é bijetora em todos os pontos de U e o fato 14 aplicado a $f|_U$ mostra de pronto que $V = f(U)$ é aberto.

[iii] Pela definição de inversa $g \circ f$ é a função identidade em U, portanto, *caso (ii) esteja provado*, pode-se aplicar a regra da cadeia e, como a diferencial da função identidade é ela mesmo, segue-se $Dg(f(x)) \circ Df(x) = Id$, assim $Dg(f(x)) = Df(x)^{-1}$.

[iv] Como observado na subseção anterior a função $L \in GL(\mathbb{R}^p) \mapsto L^{-1}$ é contínua, ademais, também são contínuas, g (já provado em (i)) e a função $x \in U \mapsto Df(x) \in GL(\mathbb{R}^p)$ (por f ser $\mathcal{C}^1$), então, *caso (ii) esteja provado*, basta notar que $Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$ e usar que a composta de funções contínuas é contínua para concluir qie $y \in V \mapsto Dg(y)$ é contínua.

A demonstração do item (ii) foi vista na classe, não será repetida aqui.

Observe agora o caráter *local* do resultado, o exemplo a seguir mostra que *mesmo se for admitido que $Df(x)$ é inversível* **para todo** *$x \in \Omega$* ***não*** *é possível concluir, em geral, que f é injetora, com inversa $\mathcal{C}^1$*. Isso só vale para $p = 1$, o caso das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (veja o exercício 8 a seguir), para o caso de dimensões maiores veja o fato 16.

Exemplo 4 CONSIDERE $f(x,y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y)),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

A matriz jacobiana de f em (x,y) é $\begin{bmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\cos(y) \\ e^x\sin(y) & e^x\cos(y) \end{bmatrix}$, cujo determinante é $e^{2x} \neq 0$, portanto $Df(x,y)$ é bijetora, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Apesar disso f não é uma função inversível com inversa $\mathcal{C}^1$, pois f não é injetora, de fato ela é periódica na segunda variável, $f(x,y) = f(x, y + 2\pi)$, para todos os (x,y) do plano.

Exercício 8 *Mostre que se Ω é um aberto de $\mathbb{R}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ com $f'(x) \neq 0$ para todos os $x \in \Omega$ então f é injetora, e sua inversa é uma função de classe $\mathcal{C}^1$.*

Como já observado, o problema na situação em dimensões maiores, $p \geq 2$ é que f pode ser $\mathcal{C}^1$, com $Df(x)$ bijetora em todos os pontos de seu domínio, sem ser injetora. Se isto for garantido, *a priori*, tem-se o resultado seguinte, que é uma aplicação imediata do teorema da função inversa.

Fato 16 *Suponha que f é uma função injetora que satisfaz todas as hipóteses do teorema da função inversa e, além disso, $Df(x)$ é bijetora, para todos os x de seu domínio. Então sua inversa é uma função de classe $\mathcal{C}^1$.*

Exercício 9 *Demonstre o fato 16.*

Outro aspecto a ser destacado é a importância vital da hipótese de f ser de classe $\mathcal{C}^1$, o exemplo a seguir esclarece isso.

Exemplo 5 Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(0) = 0$ e $f(x) = x + 10x^2 \sin \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$.

> É imediato ver que $f'(0) = 1$ e $f'(x) = 1 + 20x \sin \frac{1}{x} - 10 \cos \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$.
>
> Isso mostra que $f'(x)$ tem uma descontinuidade em zero, e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Agora note que se $x_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, então $f'(x_n) < 0$ e se $t_n = \frac{1}{2(n+1)}$, $n \in \mathbb{Z}$, tem–se $f'(t_n) > 0$.
>
> Resulta destas observações que não existe $\varepsilon > 0$ tal que $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ é injetora, assim as conclusões do teorema da função inversa não se aplicam a f.

4 Teorema da Função Implícita

Antes de enunciar o teorema que batiza esta seção, vão ser feitas algumas observações sobre transformações lineares.

Considere uma transtormação linear $T : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$, claro que, se $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ então $T(x, y) = T(x, O) + T(O, y)$. Assim se $T_1 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ e $T_2 : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ são definidas como $T_1(x) = T(x, O)$ e $T_2(y) = T(O, y)$, tem-se $T(x, y) = T_1(x) + T_2(y)$.

Em termos de matrizes, fixadas as bases canônicas dos domínios e dos contradomínios dessas transformações, se $[T]$ é a matriz de ordem $(p+q) \times q$ que representa T, então a matriz de T_1 é a matriz $p \times q$ formada pelas p primeiras linhas de $[T]$ e a matriz de T_2 é a matriz $q \times q$ formada pelas q últimas linhas de $[T]$ em termos gráficos tem–se

$$[T] = [\quad \underbrace{[T_1]}_{p \text{ colunas}} \quad | \quad \underbrace{[T_2]}_{q \text{ colunas}} \quad].$$

Agora note que, se T_2 é bijetora então T é sobrejetora (prove como exercício), portanto, nesse caso, para todo $w \in \mathbb{R}^q$, a equação $T(x, y) = w$ tem solução e, como T_2 é inversível, tem–se que T_2^{-1} é linear e

$$T(x,y)=w \Longleftrightarrow T_1(x)+T_2(y)=w \Longleftrightarrow y=T_2^{-1}(w)-T_2^{-1}(T_1(x)).$$

Assim, se T_2 é bijetora e $w \in \mathbb{R}^q$, a equação linear

$$T(x,y)=w$$

que representa uma relação *implícita* entre as variáveis x e y, é equivalente a

$$y=T_2^{-1}(w)-T_2^{-1}(T_1(x))$$

que apresenta uma relação *explícita* entre x e y (para cada $x \in \mathbb{R}^p$ dado determina-se o único $y \in \mathbb{R}^q$ tal que $T(x,y)=w$).

O que o teorema da função inplícita faz é mostrar que, sob certas condições, se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ então, dado $w \in \mathbb{R}^q$ e um ponto $c=(a,b)$ que satisfaz $f(c)=w$, estabelecer condições para que, *localmente*, i.e. num aberto $U \subset \Omega$ ao qual c pertence, a equação não linear $f(x,y)=w$ (que determina uma relação implícita entre x e y), em uma relação explícita $y=\varphi(x)$ para uma certa função "conveniente"φ de um aberto de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$.

Note que, como f é diferenciável em c e $f(c)=w$, tem–se que

$$f(c+h)=f(c)+Df(c)(h)+r(h)=w+Df(c)(h)+r(h)$$

como $\lim\limits_{h\to O}\frac{r(h)}{\|h\|}=O$, "perto"de c, tem–se $f(c+h)\sim w+Df(c)(h)$, e assim a equação $f(c+h)=w$ fica "aproximada"por $Df(c)(h)=0$ para h próximo de O.

Uma vez que $Df(c)$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ em $\mathbb{R}^q$, as observações anteriores desta seção para a equação $T(x,y)=0$ aplicam–se com $T=Df(c)$. Assim não deve surpreender que, além de supor que f seja de classe $\mathcal{C}^1$, irá admitir–se que a transformação linear $D_2f(c):\mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ definida como $D_2f(c)(y)=Df(c)(O,y)$ seja bijetora. Em conformidade com as notações apresentadas antes, também será considerada a transformação linear $D_1f(c):\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ definida como $D_1f(c)(x)=Df(c)(x,O)$.

Em razão dos pontos de Ω serem em geral denotados (x,y) é usual denotar-se $D_1f(c)$ por $D_xf(c)$ e $D_2f(c)$ por $D_yf(c)$, como será feito no resto da seção.

Fato 17 *Considere um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, com $c=(a,b)\in\Omega$, e seja $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $f(c)=O$ e $D_yf(c)$ é bijetora.*

Então existem abertos $W \subset \mathbb{R}^p$ e $U \subset \Omega$, com $a \in W$ e $c=(a,b)\in U$, e existe uma função $\varphi: W \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$ tais que o gráfico de φ, $G_\varphi=\{(x,\varphi(x)),\ x\in W\}$, é um subconjunto de U e, além disso,

$$f^{-1}\{O\} \cap U = \{(x, y) \in U \colon f(x, y) = O\} = G_\varphi.$$

Em geral a igualdade da última linha do teorema da função implícita vem expressa em duas condições que nada mais são do que a afirmação da igualdade de conjuntos, costuma–se afirmar que

(a) Se $(x, y) \in U$ e $f(x, y) = O$ então $y = \varphi(x)$ (i.e.$\{(x, y) \in U \colon f(x, y) = O\} \subset G_\varphi$).

(b) Se $x \in W$ então $(x, \varphi(x)) \in U$ e $f(x, \varphi(x)) = O$ (i.e. $G_\varphi \subset \{(x, y) \in U \colon f(x, y) = O\}$).

Sobre a função φ em geral sabe-se pouco, mas claro que $\varphi(a) = b$ e uma aplicação simples da regra da cadeia mostra que, para todo $x \in W$, tem–se

$$D\varphi(x) = -\left[D_y f(x, \varphi(x))\right]^{-1} \left[D_x f(x, \varphi(x))\right]$$