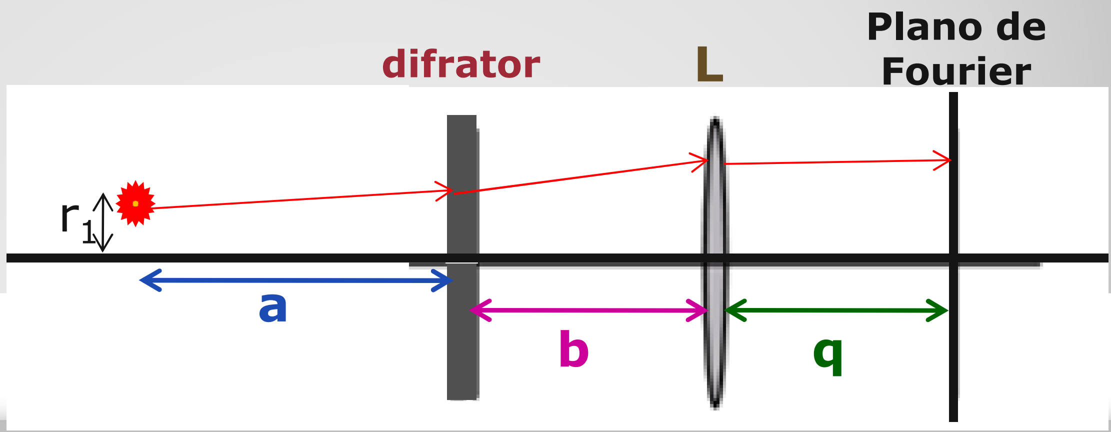
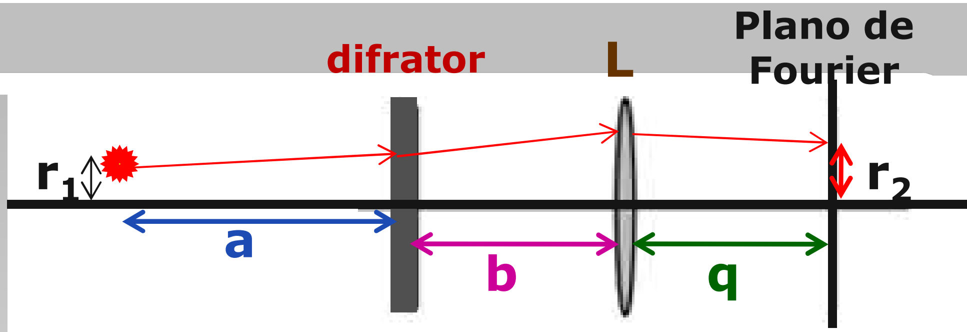
Caso geral

- A fonte pontual está numa distância qualquer da lente:
  - ela dista **a** do difrator e está $\mathbf{r_1}$ acima do eixo de simetria da lente
- A matriz de transferência desse sistema:

  É a matriz do espaço livre "**a**" da fonte ao difrator X a matriz do difrator X a matriz do espaço livre "**b**" do difrator à lente X a matriz da lente X a matriz do espaço livre "**q**" da lente ao plano da transformada.



O resultado:



- Dessa matriz (que vocês estão convidados a calcular, vejam a seguir como), podemos obter algumas resultados interessantes:

- as expressões para r_2 e φ_2:

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right) r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

- que o padrão de difração (que é a transformada de Fourier) deve depender do espaçamento **d** da rede (ou de uma fenda), mas não da direção dos raios que são emitidos pela fonte, portanto ele deve ser independente de $\boldsymbol{\varphi_1}$.

O cálculo da matriz de transferência do slide anterior

- Primeira matriz espaço livre **a**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad r_2 = r_1 + a\varphi_1 \quad e \quad \varphi_2 = \varphi_1$$

  - esses sao $\mathbf{r_1}$ e $\boldsymbol{\varphi_1}$ para o elemento difrator

- No elemento difrator **D**:

$$r_2 = r_1 + a\varphi_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{m\lambda}{d}$$

O raio sai na mesmo ponto que entrou ($\mathbf{r_2 = r_2}$ acima) e o ângulo é alterado pq o elemento difrata

O cálculo da matriz de transferëncia

- A matriz do espaço livre **b**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 \\ \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

- A matriz da lente **L**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ -\dfrac{r_1}{f} - \dfrac{a}{f}\varphi_1 - \dfrac{b}{f}\varphi_1 - \dfrac{b}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

O cálculo da matriz de transferência

- A matriz do espaço livre **q**:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} \\ -\dfrac{r_1}{f} - \dfrac{a\varphi_1}{f} - \dfrac{b\varphi_1}{f} - \dfrac{b}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a\varphi_1 + b\varphi_1 + \dfrac{bm\lambda}{d} - \dfrac{r_1 q}{f} - a\dfrac{q\varphi_1}{f} - b\dfrac{q\varphi_1}{f} - \dfrac{bq}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 q + \dfrac{m\lambda}{d} q \\ -\dfrac{r_1}{f} - \dfrac{a\varphi_1}{f} - \dfrac{b\varphi_1}{f} - \dfrac{b}{f}\dfrac{m\lambda}{d} + \varphi_1 + \dfrac{m\lambda}{d} \end{pmatrix}$$

O calculo da matriz de transferëncia

- Continuando o cálculo da matriz do espaço livre **q**:

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right) r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

o padrão de difração (que é a transformada de Fourier) deve depender do período **d** da rede, ou do elemento difrator, mas não da direção dos raios que saem da fonte.

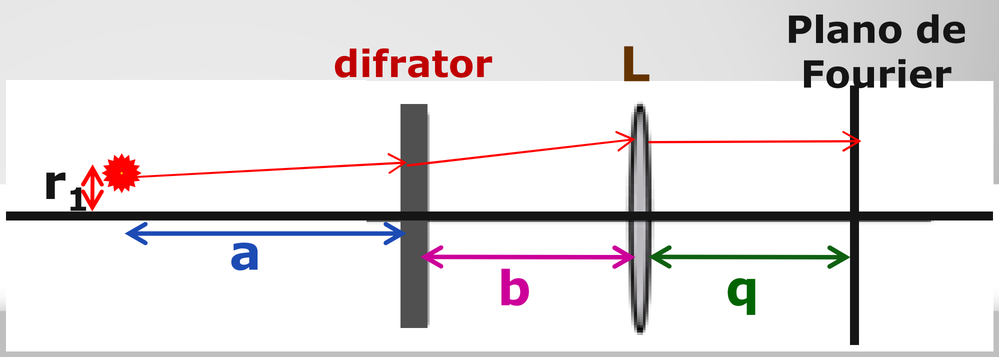
A posição do plano da transformada:

- Portanto, se o padrão de difração é independente de $\boldsymbol{\varphi_1}$, o coeficiente de $\boldsymbol{\varphi_1}$ na equação de $\mathbf{r_2}$ deve ser zero:

$$a+b-(a+b)\frac{q}{f}+q=0 \qquad \frac{1}{f}=\frac{1}{q}+\frac{1}{a+b}$$

  - Lembrando **q** é a posição do plano da transformada, e **a+b** é a posição da fonte em relação à lente, vê-se que a transformada de Fourier é formada no plano imagem conjugado à fonte e não ao objeto difrator.

Entao a T. Fourier é formada no plano imagem conjugado à fonte que dista **a+b** da lente



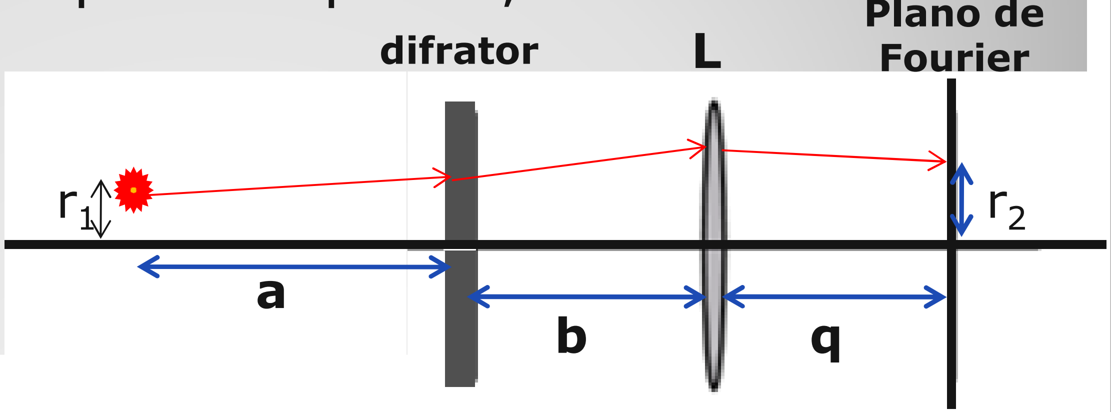
O espaçamento da figura de difração:

- As diversas ordens da figura de difração vão aparecer nas posições dadas por $\mathbf{r_2}$:

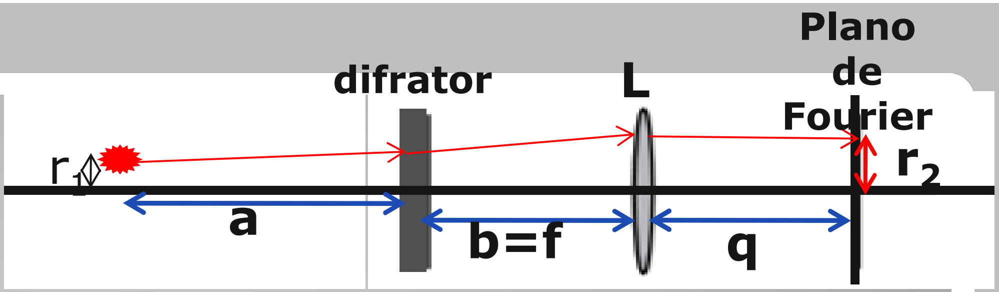
$$r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f} \right) \frac{m\lambda}{d} \quad se \quad r_1 = 0$$

- que substituindo a expressão para **f**, dá:

$$r_2 = \left(\frac{qa}{a+b} \right) \frac{m\lambda}{d}$$



Casos particulares



- Vamos estudar alguns casos particulares para a posição do difrator e ver o que acontece com o espaçamento $\mathbf{r_2}$:
  - **Caso 1**: se **b=f** (difrator no foco da lente)

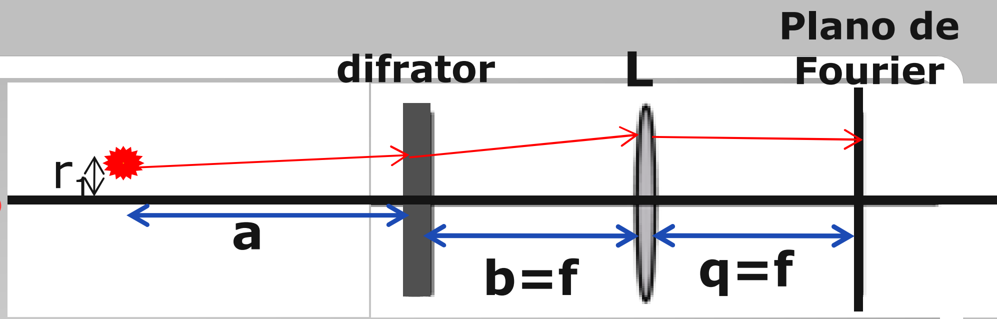
$$r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d} = \left(b + q - \frac{bq}{b}\right)\frac{m\lambda}{d} \Rightarrow r_2 = b\,\frac{m\lambda}{d} = f\,\frac{m\lambda}{d}$$

  - Ou seja a escala da figura da transformada de Fourier independe de **a**, e, portanto não muda,
  - mas como a expressão $\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b}$

é sempre válida, variando **a**

a posição, **q**, do plano de Fourier muda.

Casos particulares



- Se além de **b=f**: quisermos que a transformada se forme no foco imagem, **q=f**, a expressão $\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b}$

fica: $$\frac{1}{f} = \frac{1}{f} + \frac{1}{a+f}$$

- Então para ela ser uma igualdade, [1/(a+f)]=0, ou seja **a=**∞: os raios de incidência são paralelas, fonte no ∞.
- E nesse caso

$$r_2 = fm\frac{\lambda}{d}$$

Nesse caso: fonte no infinito e difrator no foco da lente convergente, a transformada de Fourier que se forma no foco imagem é exata. Nos outros casos vão aparecer fases, mas a intensidade não muda.