



*Escola de Engenharia de São Carlos  
Universidade de São Paulo*

# Desempenho no Domínio da Frequência

## Aula 19

SEM 0169 – Sistemas de Controle

Profa. Maíra Martins da Silva

[mairams@sc.usp.br](mailto:mairams@sc.usp.br)

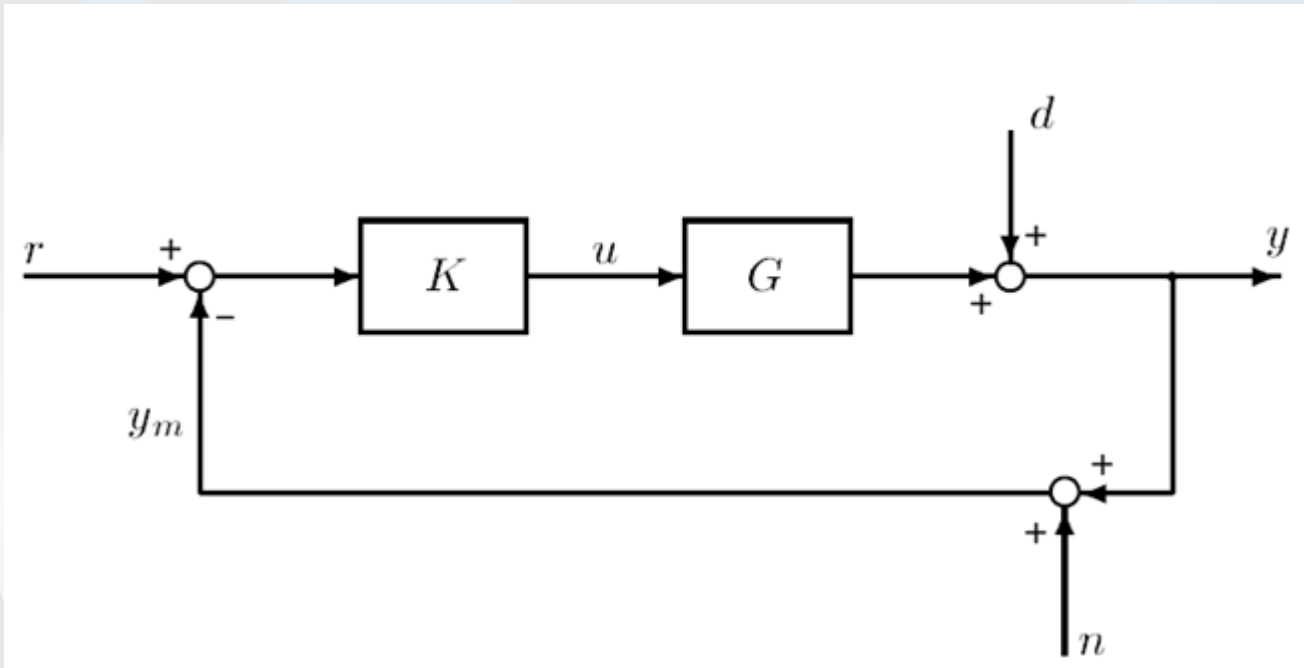
(16) 9 9291 8310



# Objetivo

Apresentar as métricas no domínio da frequência

# Introdução



$$Y(s) = D(s) + GU(s)$$

$$U = K(R - Y_m) = K(R - (N + Y))$$

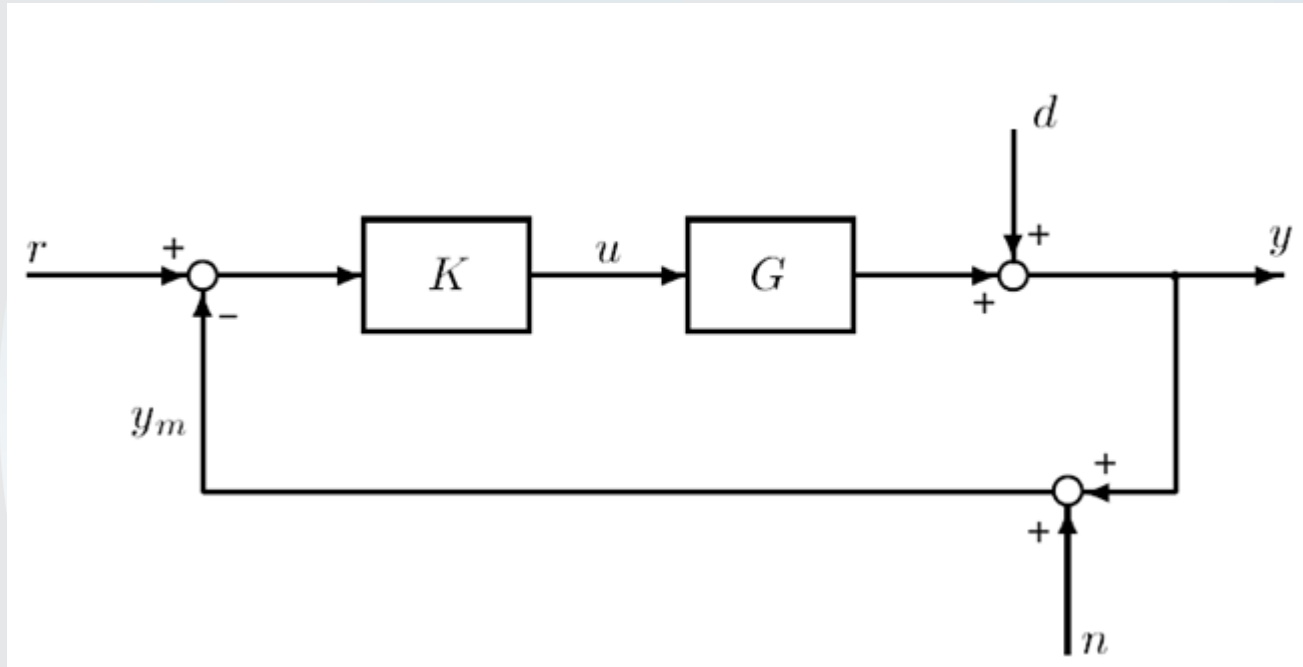


$$Y = D + GK(R - N - Y)$$

$$Y = D + GKR - GKN - GKY$$

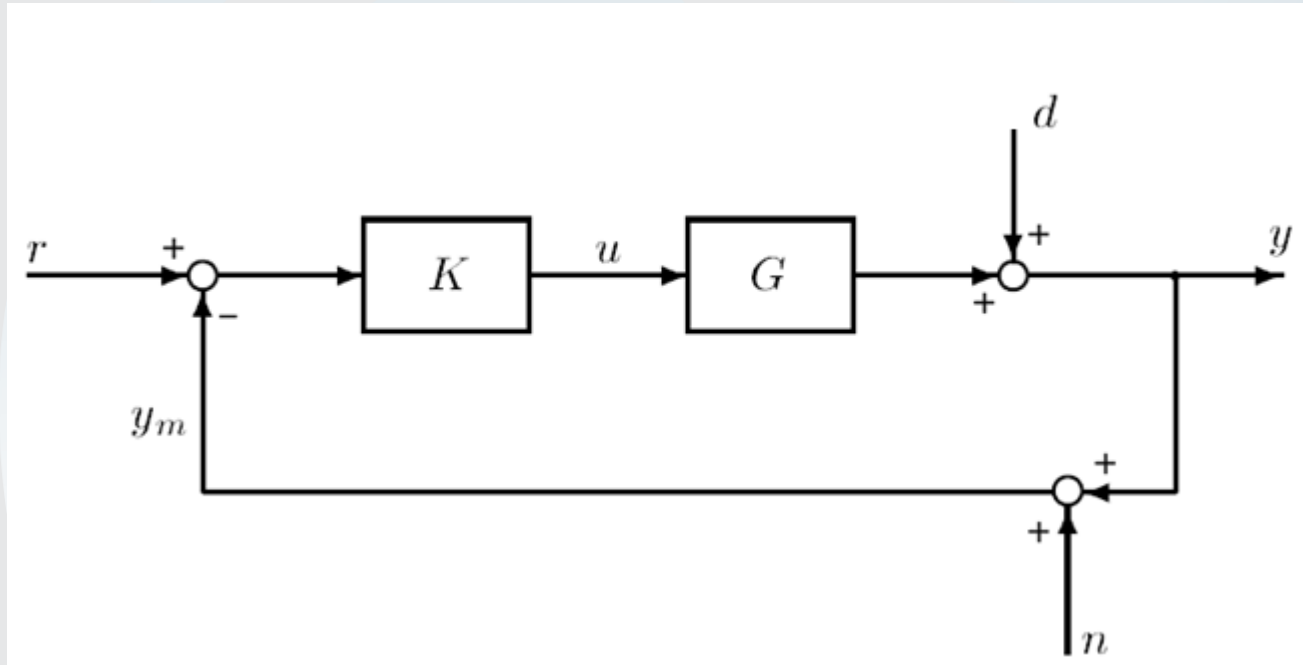
$$(1 + GK)Y = D + GKR - GKN$$

# Introdução



$$Y = \frac{1}{(1 + GK)} D + \frac{GK}{(1 + GK)} R - \frac{GK}{(1 + GK)} N$$

# Distúrbio



$$Y = \frac{1}{(1 + GK)} D + \frac{GK}{(1 + GK)} R - \frac{GK}{(1 + GK)} N$$

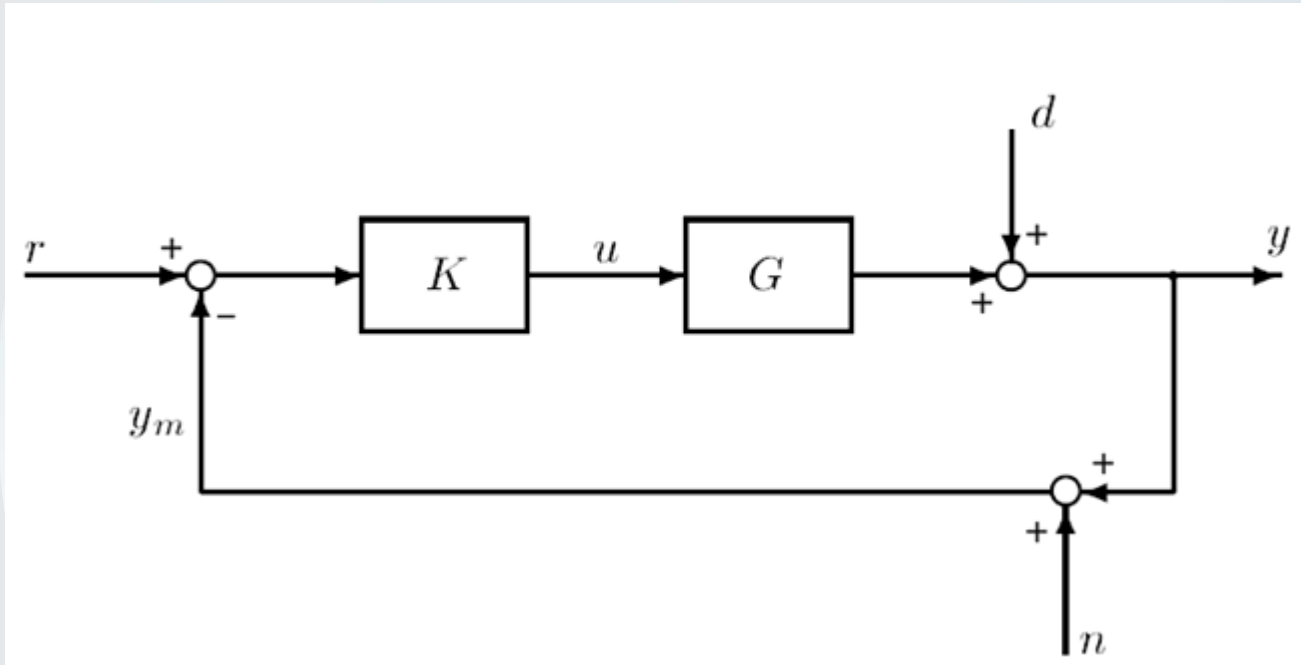
Rejeitar distúrbio

$$\frac{1}{(1 + GK)} \rightarrow 0$$

$$L = GK \rightarrow \infty$$

Conteúdo em baixa  
e alta frequência

# Referência



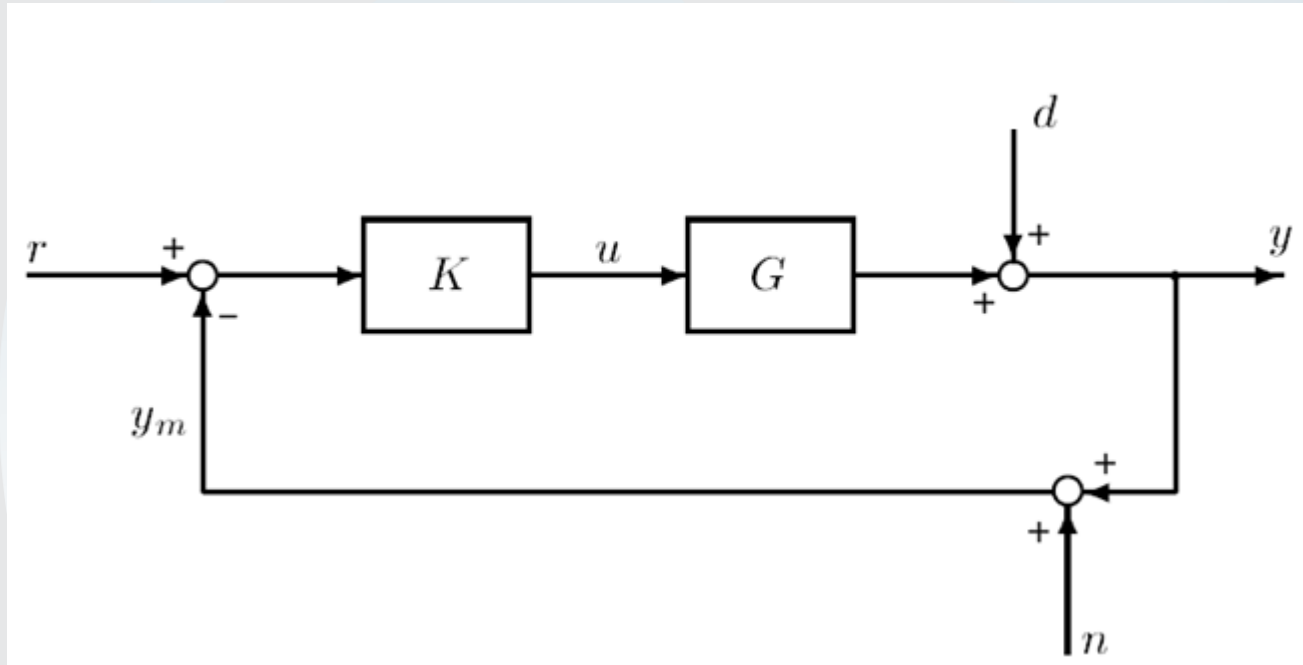
$$Y = \frac{1}{(1 + GK)} D + \frac{GK}{(1 + GK)} R - \frac{GK}{(1 + GK)} N$$

Acompanhar a referência  $\frac{GK}{(1 + GK)} \rightarrow 1$

$$L = GK \rightarrow \infty$$

Conteúdo em baixa  
frequência

# Ruído



$$Y = \frac{1}{(1 + GK)} D + \frac{GK}{(1 + GK)} R - \frac{GK}{(1 + GK)} N$$

Rejeitar ruído

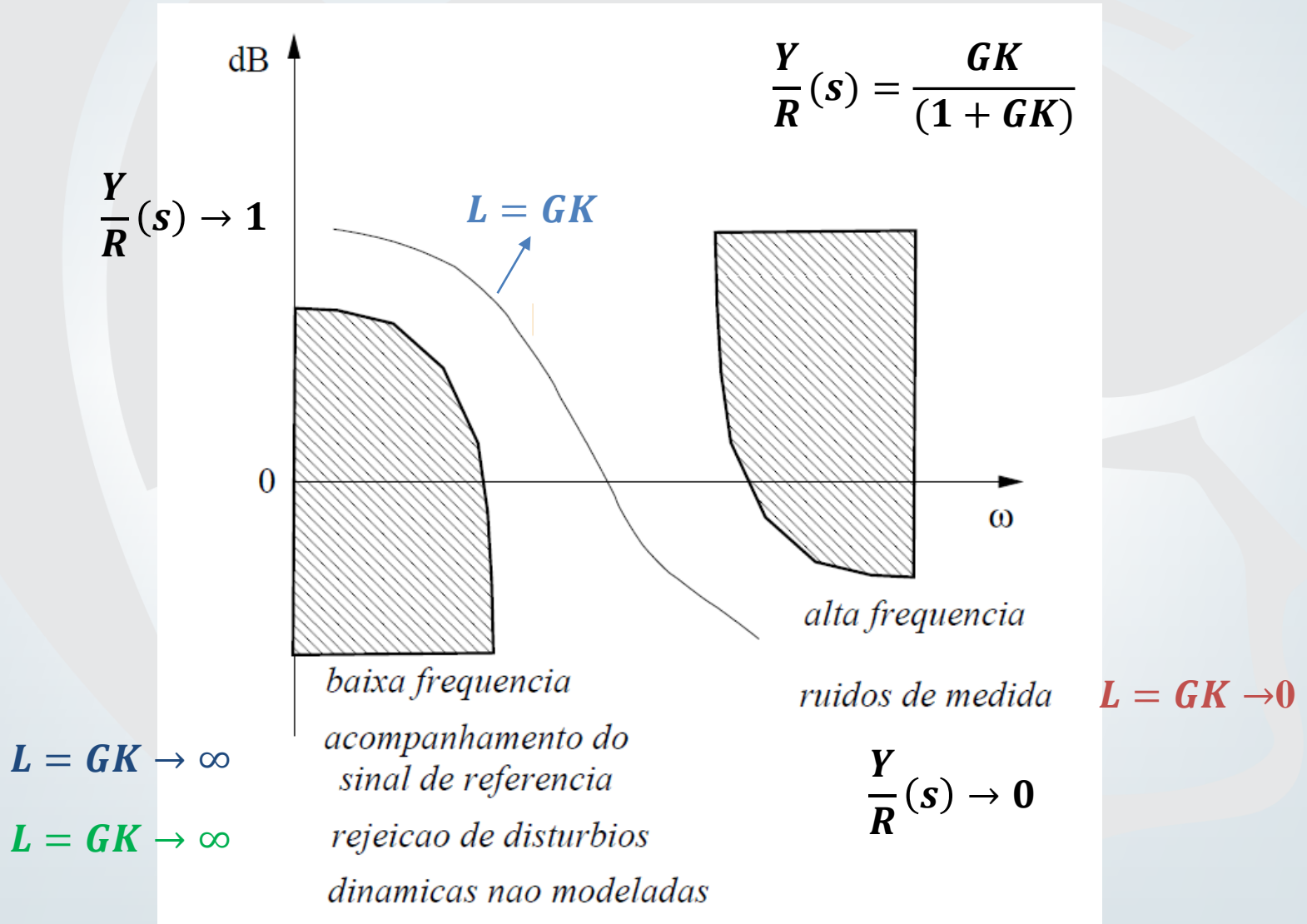
$$\frac{GK}{(1 + GK)} \rightarrow 0$$

$$L = GK \rightarrow 0$$

Conteúdo em alta  
frequência



# FRF da Malha Aberta



# Margens de estabilidade

## MARGEM DE GANHO

MG é o fator o qual o ganho pode aumentar até o sistema se tornar instável.

- $MG$ : inverso do módulo  $|G(j\omega)|$  na frequência onde o ângulo de fase é  $-180^\circ$ .

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega)|}$$

- $MG$  (em dB): diferença em dB do gráfico do módulo até 0 dB na frequência onde o ângulo de fase é  $-180^\circ$ . Positiva se  $|G(j\omega)|$  em dB  $< 0$  e negativa caso contrário.

$\omega_{180}$  = phase crossover frequency

# Margens de estabilidade

## MARGEM DE FASE

MF representa quanta fase podemos perder antes que o sistema se torne instável.

- *MF*:  $180^\circ$  mais o ângulo de fase ( $\phi$ ) na frequência de cruzamento do ganho (quando  $|G(j\omega)| = 0dB$ ).

$$MF = 180 + \phi$$

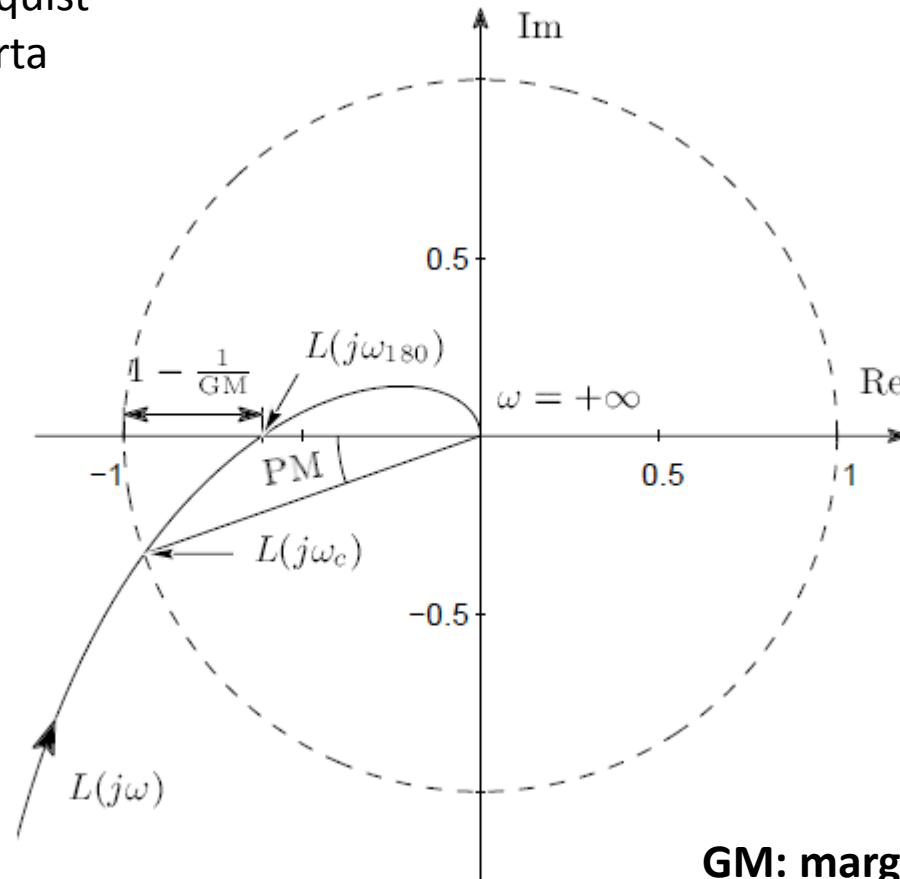
- *MF*: diferença em graus do gráfico de fase até  $-180^\circ$  na frequência de cruzamento do ganho. Positiva se  $\phi > -180^\circ$  e negativa caso contrário.

$\omega_c$  = gain crossover frequency

# Margens de estabilidade

Diagrama de Nyquist  
da malha aberta

$$L = GK$$

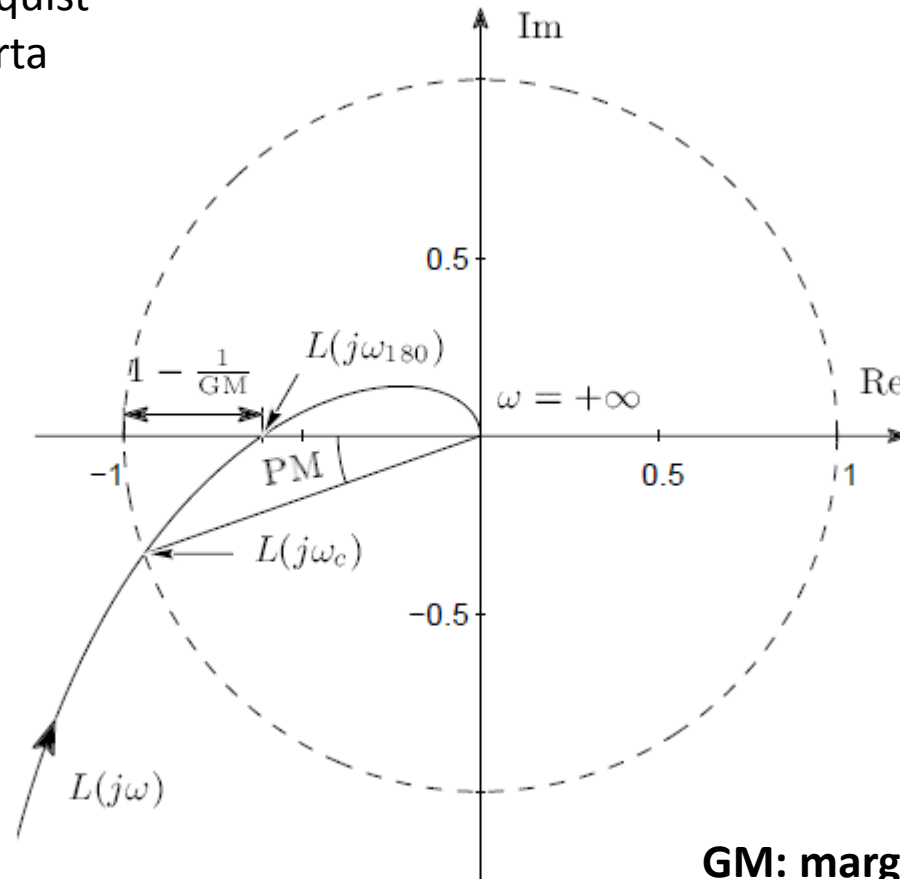


**GM: margem de ganho**  
**PM: margem de fase**

# Margens de estabilidade

Diagrama de Nyquist  
da malha aberta

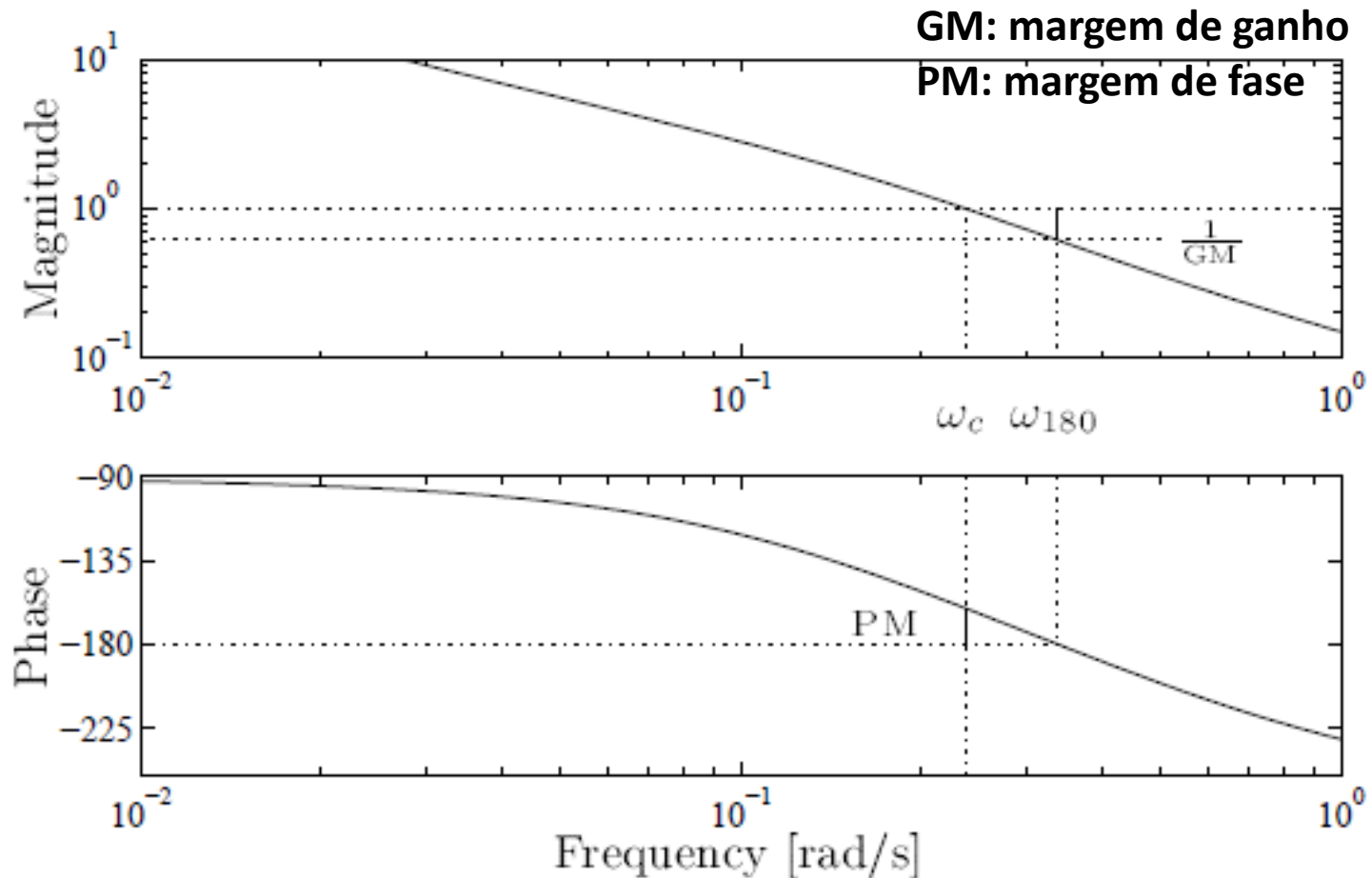
$$L = GK$$



**GM: margem de ganho**  
**PM: margem de fase**

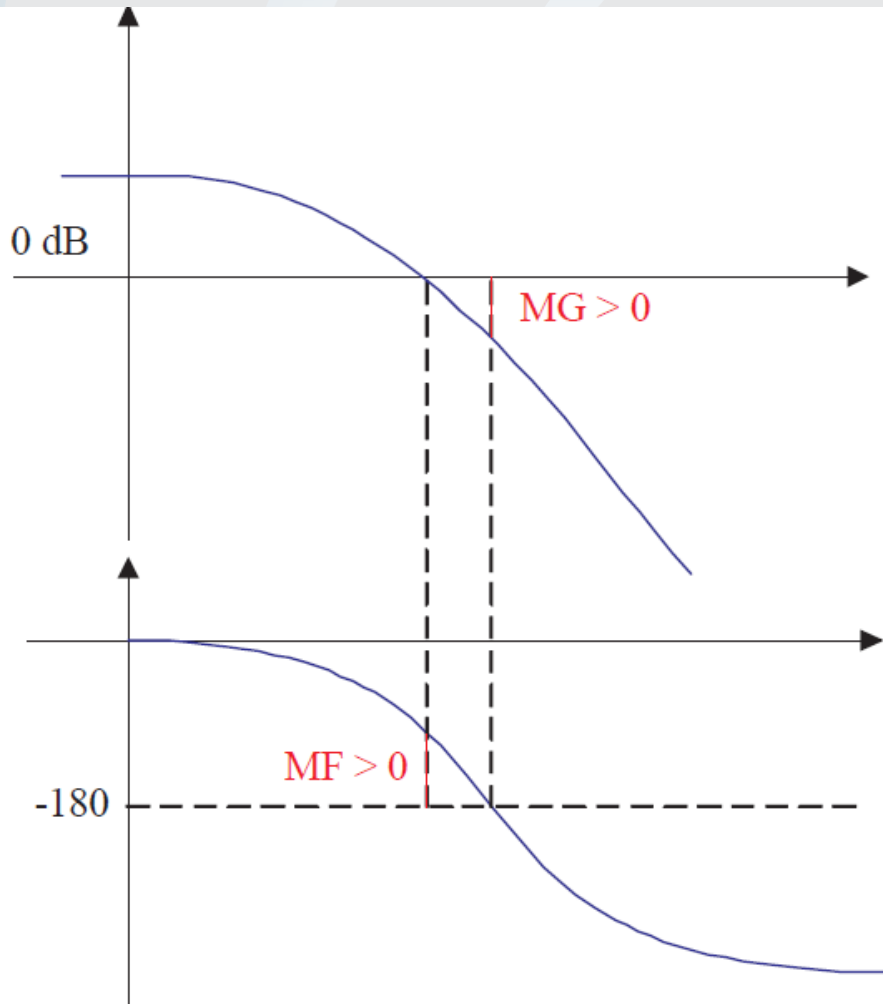
# Margens de estabilidade

Diagrama de Bode da malha aberta  $L = GK$

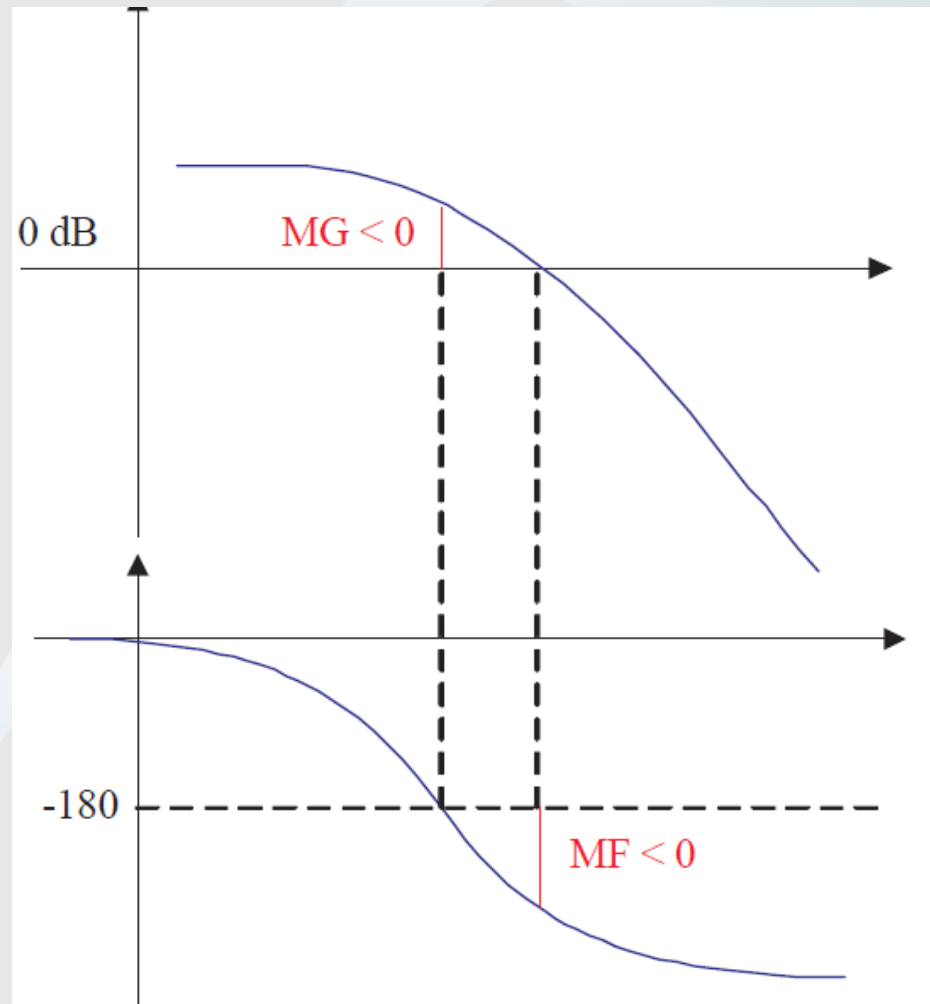


# Estabilidade

$MG > 0$  e  $MF > 0$  : estável



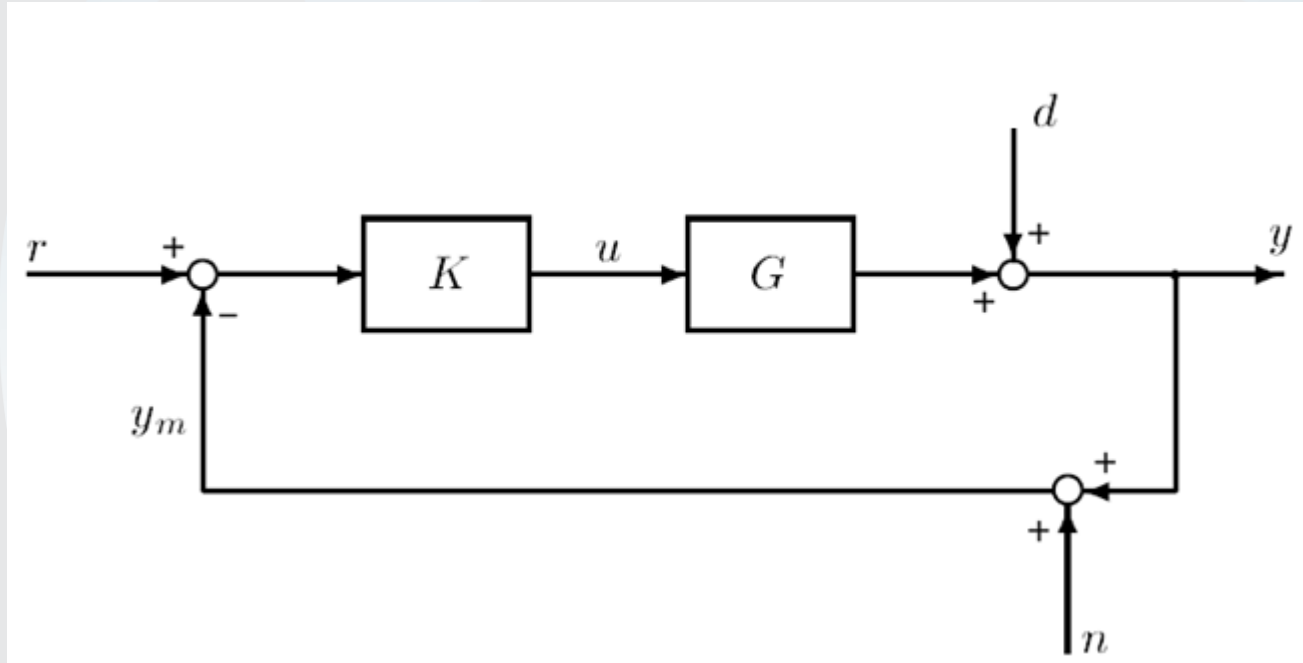
$MG < 0$  OU  $MF < 0$  : instável



\* Retirado do slide Adriano

# Exemplo 1: estável

Ver controle\_aula19\_ex1.ipynb



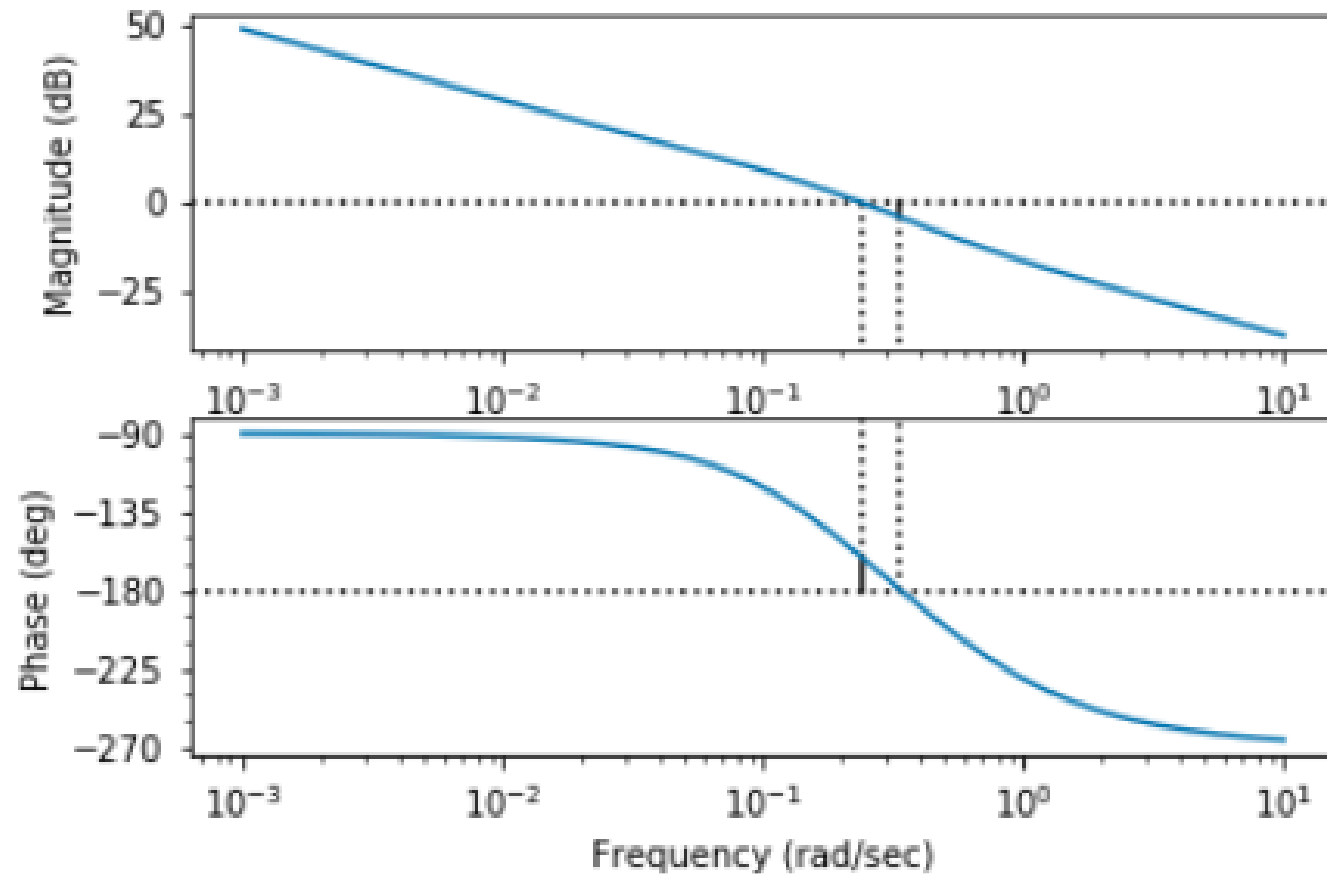
**Figure 2.8:** Typical Bode magnitude and phase plots of  $L = GK$ ,  $S$  and  $T$ .  
 $G(s) = \frac{3(-2s+1)}{(5s+1)(10s+1)}$ ,  $K(s) = 1.136(1 + \frac{1}{12.7s})$  (Ziegler-Nichols PI controller).



# Exemplo 1: estável

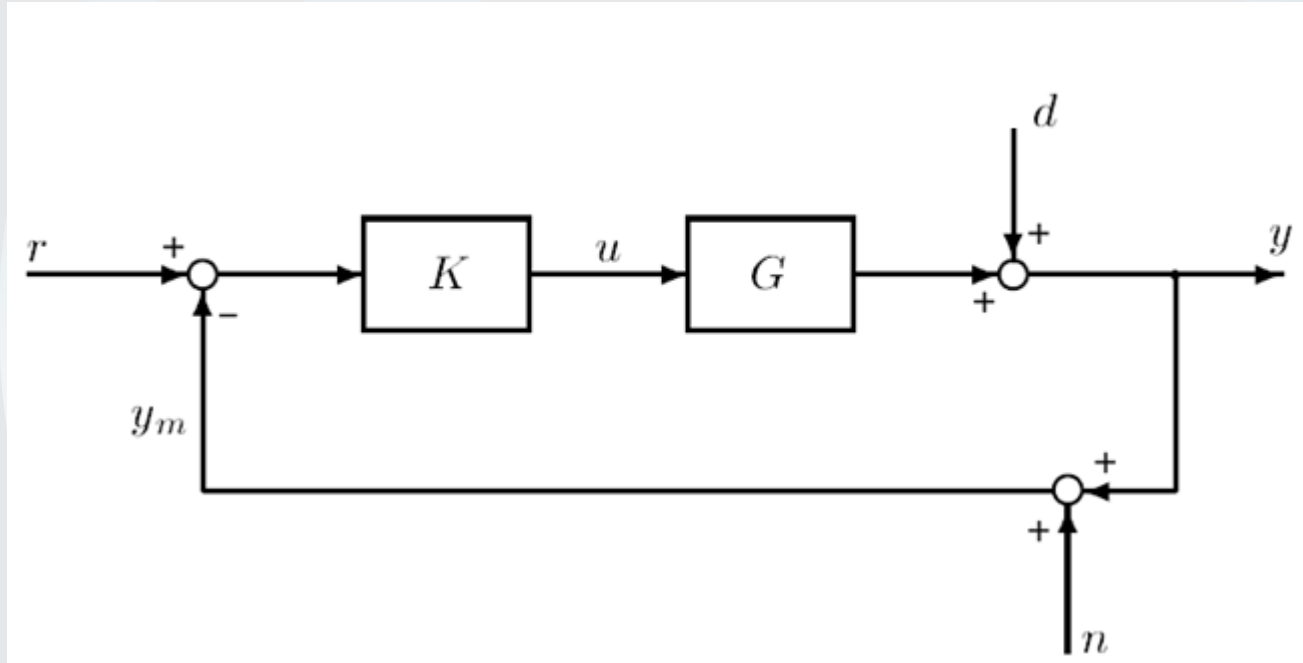
Ver controle\_aula19\_ex1.ipynb

$G_m = 4.29$  dB (at 0.34 rad/s),  $P_m = 19.53$  deg (at 0.24 rad/s)



# Exemplo 2: instável

[Ver controle\\_aula19\\_ex2.ipynb](#)



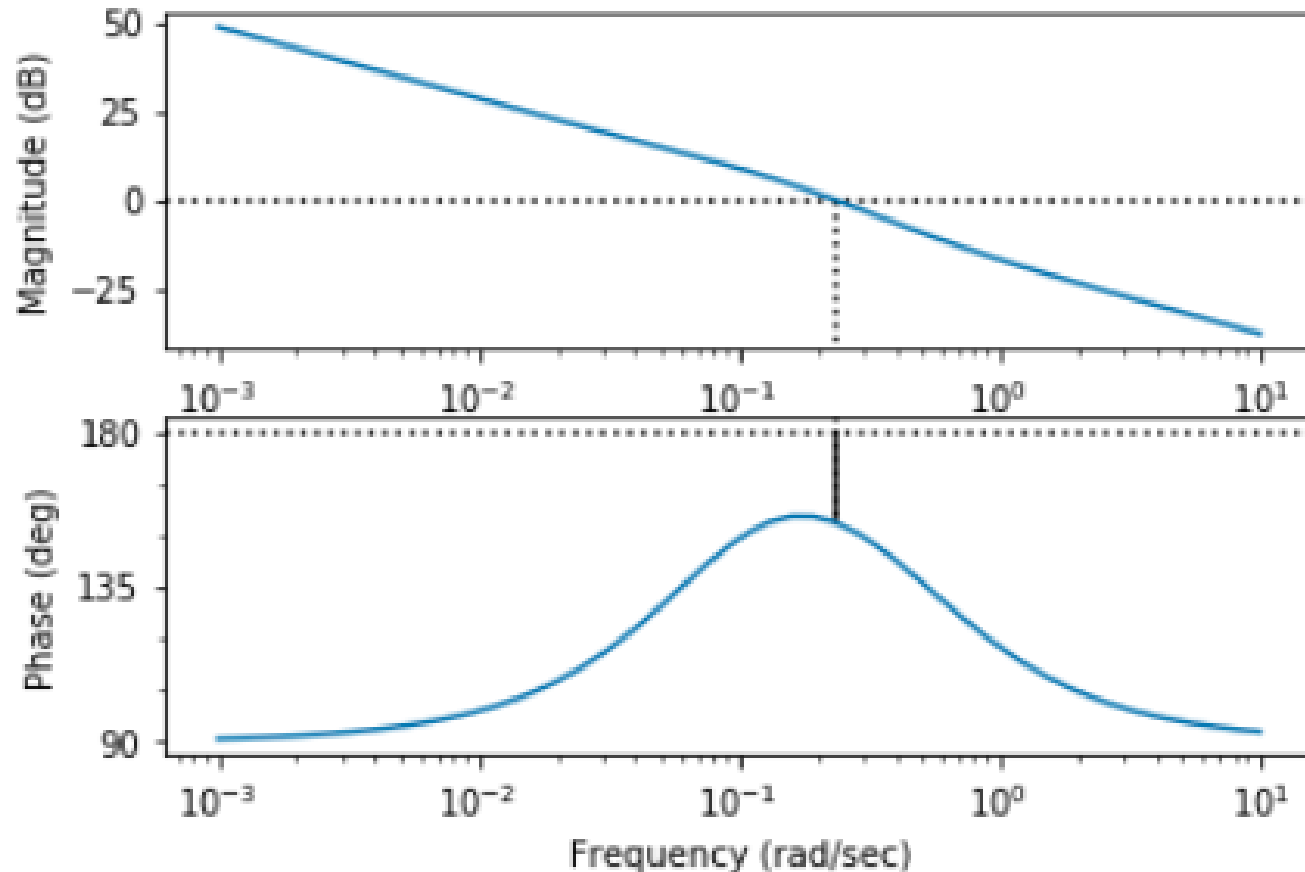
**Figure 2.8:** Typical Bode magnitude and phase plots of  $L = GK$ ,  $S$  and  $T$ .  
 $G(s) = \frac{3(-2s+1)}{(5s+1)(10s+1)}$ ,  $K(s) = 1.136(1 + \frac{1}{12.7s})$  (Ziegler-Nichols PI controller).

→ Mudei esse sinal

# Exemplo 2: estável

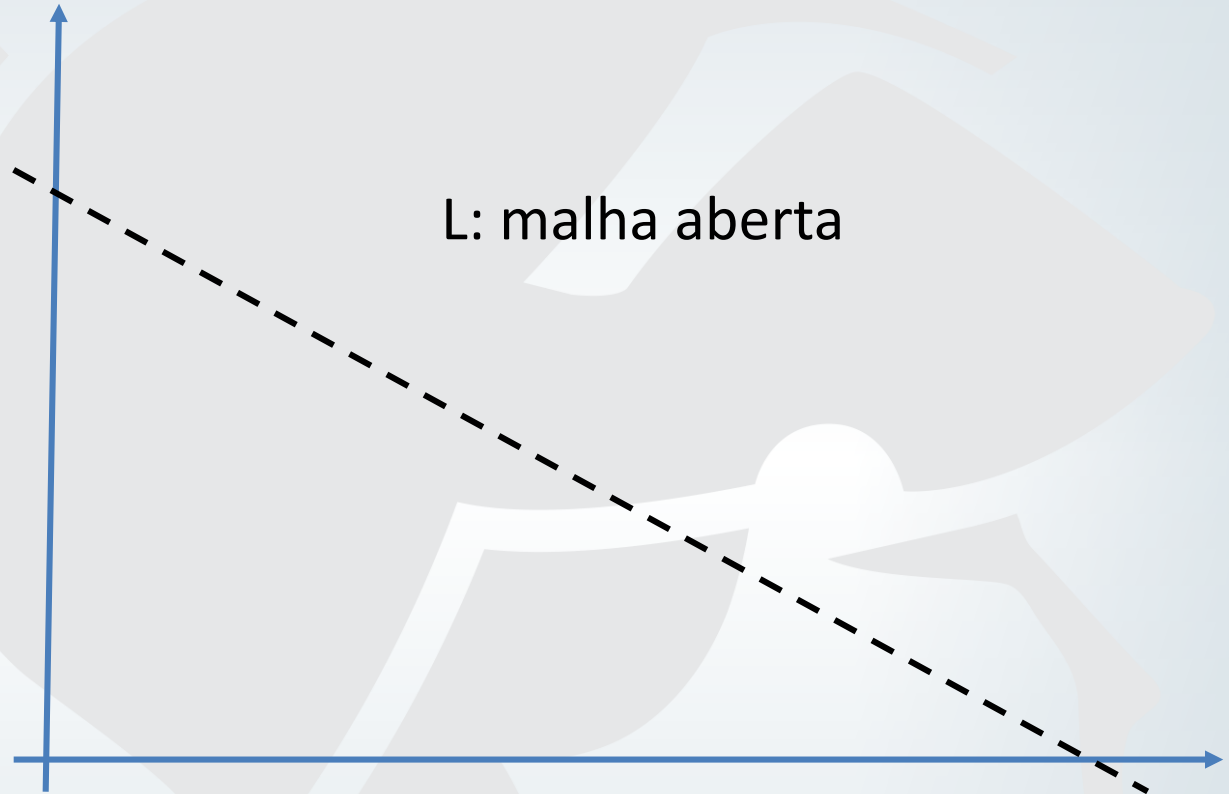
Ver controle\_aula19\_ex2.ipynb

Gm = inf dB (at nan rad/s), Pm = -26.35 deg (at 0.24 rad/s)



# Margens boas?

- $MF > 20^\circ$
- $MG > 1.5$



# Conclusões

- Temos muitas ferramentas para avaliar um sistema em malha fechada !!!



***EESC • USP***

[www.eesc.usp.br](http://www.eesc.usp.br)