Resolução da P2

1) Vamos calcular os autovalores de A.

$$p_A(t) = det\begin{pmatrix} a-t & 4 & 0 \\ 1 & a-t & 0 \\ 0 & 1 & -1-t \end{pmatrix} = (-1-t)((a-t)^2-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1-t=0 \Rightarrow t=-1 \text{ ou } (a-t)^2 = 4 \Leftrightarrow a-t = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} t = a-2 \\ t = a+2 \end{cases}.$$

Temos, $a-2 \neq -1 \Rightarrow a \neq 1$ e $a+2 \neq -1 \Rightarrow a \neq -3$, como $a-2 \neq a+2$, se $a \neq 1$ e $a \neq -3$ teremos três autovalores distintos e A será diagonalizável.

Vamos estudar os casos $a = 1$ e $a = -3$.

Se $a = 1$, temos dois autovalores, $t = 3$ com multiplicidade algébrica 1 e, portanto, multiplicidade geométrica 1 e $t = -1$ com multiplicidade algébrica 2.

Vamos determinar $V(-1) = Ker(A+I)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=0 \\ x+2y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Assim, $V(-1) = [(0,0,1)]$ e a multiplicidade geométrica de -1 é 1, logo A não é diagonalizável neste caso.

Se $a = -3$, temos dois autovalores, $t = -5$ com multiplicidade algébrica 1 e, portanto, multiplicidade geométrica 1 e $t = -1$ com multiplicidade algébrica 2.

Vamos determinar $V(-1) = Ker(A+I)$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+4y=0 \\ x-2y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Assim, $V(-1) = [(0,0,1)]$ e a multiplicidade geométrica de -1 é 1, logo A não é diagonalizável neste caso.

Alternativa c) $a \neq 1$ e $a \neq -3$.

2) A afirmação I) é falsa.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ que não é diagonalizável, pois $p_A(t) = t^2+1$, que não possui raízes reais, mas $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que já é diagonal.

A afirmação II) é falsa.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que já é diagonal, portanto, diagonalizável, mas não é invertível, pois tem autovalor nulo.

A afirmação III) é verdadeira.

De fato, mesmo que 1 e 2 sejam autovalores de T, não podemos ter autovetor associado a autovalores distintos, assim $Ker(T-I) \cap Ker(T-2I) = \{\vec{0}\}$

Alternativa e)

3) Vamos calcular os autovalores de T, para isso precisamos obter a matriz de T em relação à mesma base no domínio e no contra domínio.

Temos que $[T]_B = [I]_{CB}[T]_{BC}$, vamos calcular a matriz $[I]_{CB}$

$$\begin{cases} 1+2t = (1,2,0)_B \\ 1+t = (1,1,0)_B \\ t^2-t-1 = (-1,-1,1)_B \end{cases} \Longrightarrow [I]_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$[T]_B = [I]_{CB}[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cujos autovalores são $1, -1$ e 3. Logo, T é diagonalizável, pois possui 3 autovalores distintos, cuja soma é 3.

Alternativa a)

4) Como a equação geral da cônica não possui termos de 1º grau nas variáveis x e y, basta encontrar os autovalores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ associada à cônica.

$$p_A(t) = det\begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Assim, uma equação reduzida da cônica será da forma, $u^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$ que são duas retas paralelas.

Alternativa d)

OBS: *Outra forma, repare que* $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 1 \Leftrightarrow x - y = \pm 1$.

5) Vamos calcular a matriz de T na base canônica de R^3, que é ortonormal com o produto interno usual.

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,2,0) \\ T(0,1,0) = (0,2,1) \\ T(0,0,1) = (0,1,2) \end{cases} \Longrightarrow [T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que não é simétrica, logo T não é um operador simétrico, além disso, como $\det[T] = 3 \neq 0$, temos que T é invertível. Basta verificar se T é, ou não, diagonalizável.

$$p_T(t) = det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 2 & 2-t & 1 \\ 0 & 1 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)((2-t)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - t = 0 \Longrightarrow t = 1 \text{ ou } t^2 - 4t + 3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}.$$

Vamos determinar $V(1) = Ker(T - I)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = -y \text{ e } x = 0$$

Assim, $V(1) = [(0,1,-1)]$ e a multiplicidade geométrica de $t = 1$ é 1, logo T não é diagonalizável.

Alternativa a) T não é simétrico, não é diagonalizável, mas é invertível.

6) Como T é simétrico $V(1) = V(2)^{\perp}$, logo se $(x,y,z) \in V(1)$, então

$$\begin{cases} \langle (x,y,z),(1,2,0)\rangle = x + 2y = 0 \\ \langle (x,y,z),(0,1,1)\rangle = y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y \text{ e } z = -y$$

Assim, $V(1) = [(2,-1,1)]$

Temos que $\{(1,2,0),(0,1,1),(2,-1,1)\}$ é uma base de R^3 na qual conhecemos a imagem de T, vamos escrever o vetor $(3,4,4)$ nesta base.

$$(3,4,4) = 1(1,2,0) + 3.(0,1,1) + 1.(2,-1,1)$$

Assim, $T(3,4,4) = T(1,2,0) + 3T(0,1,1) + T(2,-1,1) =$

$$= (2,4,0) + 3(0,2,2) + (2,-1,1) = (4,9,7)$$

Alternativa a)

7) Vamos calcular os autovalores e autovetores de A.

$$p_A(t) = det\begin{pmatrix} 4-t & -8 & -6 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & -4 & -1-t \end{pmatrix} = (2-t)\big((4-t)(-1-t)+6\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$V(1) = Ker(T - I)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 8y - 6z = 0 \\ y = 0 \\ x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2z \text{ e } y = 0$$

Assim, $V(1) = [(2,0,1)]$

$V(2) = Ker(T - 2I)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 8y - 6z = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4y + 3z$$

Assim, $V(2) = [(4,1,0),(3,0,1)]$.

Escolhendo a base $\{(2,0,1),(4,1,0),(3,0,1)\}$ temos que, na diagonal da matriz D, os autovalores aparecerão na ordem, 1,2 e 2

Alternativa b)

8) Como T é simétrico $V(\lambda) = V(0)^{\perp}$, logo se $(x,y,z) \in V(\lambda)$, então

$$\begin{cases} \langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = x + y = 0 \\ \langle (x,y,z),(2,0,3)\rangle = 2x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x \text{ e } z = -\frac{2}{3}x$$

Assim, $V(\lambda) = Ker(T - \lambda I) = [(3,-3,2)]$

Alternativa b)

9) A afirmação I) é verdadeira.

De fato, como $t = 0$ é raiz de $p_T(t)$, T não é invertível.

A afirmação II) é falsa.

O autovalor $t = 2$ pode ter multiplicidade geométrica menor que 3 e, portanto, T não seria diagonalizável.

A afirmação III) é verdadeira.

De fato, $dim\ (Ker(T - 2I)) = 3 \Rightarrow m_g(2) = 3 = m_a(2)$.

$dim\big(Im(T - I)\big) = 4 \Rightarrow \dim\big(Ker(t - I)\big) = 6 - 4 = 2 = m_a(1)$.

Alternativa a)

10) Vamos encontrar os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ associada ao sistema.

$$p_A(t) = det\begin{pmatrix} 5-t & -2 \\ 6 & -2-t \end{pmatrix} = (5-t)(-2-t) + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$V(1) = Ker(A - I)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

Assim, $V(1) = [(1,2)]$

$V(2) = Ker(A - 2I)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

Assim, $V(2) = [(2,3)]$

Logo, a solução geral será da forma, $X(t) = c_1e^t(1,2) + c_2e^{2t}(2,3)$ ou

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^t + 2c_2e^{2t} \\ y(t) = 2c_1e^t + 3c_2e^{2t} \end{cases}, c_1\ c_2 \in R$$

Impondo as condições iniciais obtemos:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + 2c_2 = 3 \\ y(0) = 2c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, $2x(t) - y(t) = 2(e^t + 2e^{2t}) - (2e^t + 3e^{2t}) = e^{2t}$

Alternativa a)

11) Do enunciado temos que os autovalores da matriz A, associada à quádrica, são $t = 2$ e $t = -1$, além disso, $V(2) = [(-1,1,0), (1,1,2)]$ e, como A é simétrica, temos que $V(-1) = V(2)^{\perp}$, logo se $(x, y, z) \in V(-1)$, então

$$\begin{cases} \langle (x,y,z), (-1,1,0) \rangle = -x + y = 0 \\ \langle (x,y,z), (1,1,2) \rangle = x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x \text{ e } z = -x$$

Assim, $V(-1) = [(1,1,-1)]$, logo uma base ortonormal de autovetores de A é dada por, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)\right\}$ e a mudança ortogonal de variáveis, que elimina os termos mistos de 2º grau, é $X = MX'$, em que

$$M = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{\sqrt{2}}x' + y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ z = 2y' + \frac{-1}{\sqrt{3}}z' \end{cases}$$

Substituindo na equação da quádrica obtemos,

$$2x'^2 + 2y'^2 - z'^2 + 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}x' + y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x'^2 + 2y'^2 - z'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' + 1$$

Ainda precisamos completar quadrados na variável x'

$$2x'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' = 2\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x'\right) = 2\left(\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Fazendo a nova mudança de variável $\begin{cases} u = x' - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ v = y' \\ w = z' \end{cases}$, obtemos

$$2u^2 + 2v^2 - w^2 - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2u^2 + 2v^2 - w^2 = 0$$

Alternativa c).

12) Pelo enunciado temos que 1 e 2 são os autovalores de $A \in M_3(R)$, logo A possui mais um autovalor real λ. Como $detA$ é igual ao produto de seus autovalores, temos que $8 = 1.2.\lambda$, de onde $\lambda = 4$.
Alternativa a)