Prova 3 - 4302303 - Eletromagnetismo I - 2023 - 11/07/2023

Justifique de forma sucinta suas respostas.

1)[2,5] Queremos gerar um campo com polarização circular no plano yz, combinando um dipolo elétrico e um dipolo magnético oscilantes. Especifique a orientação, a relação entre as fase φ_p e φ_m e as amplitudes dos dipolos elétrico (p_0) e magnético (μ_0).

Qual a intensidade do campo $I = \langle|\vec{S}|\rangle$ resultante, em função da posição $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$?

Dados: Campo gerado por um dipolo elétrico $\vec{p}_0 = p_0 cos(\omega t + \varphi_E)\hat{z}$:

$$\vec{E}_p(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \varphi_p)\hat{\theta}$$

Campo gerado por um dipolo magnético:$\vec{m}_0 = m_0 cos(\omega t + \varphi_B)\hat{z}$:

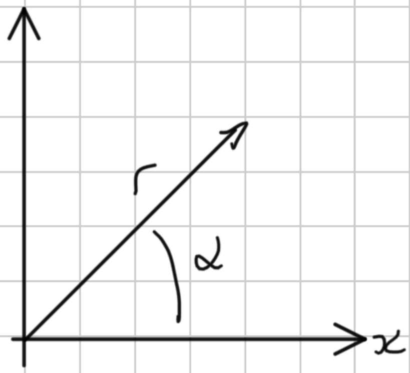
$$\vec{E}_m(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \varphi_m)\hat{\phi}$$

---

1) $\vec{p}_0 = p_0 \cos(\omega t + \varphi_E)\, \hat{x}$

$\vec{m}_0 = p_0 \cdot c^2 \cos(\omega t + \varphi_E \pm \pi/2)\, \hat{x}$

$\rho = \sqrt{y^2+z^2}$



$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\rho}{r} = \sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}}$

$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ $\qquad B = \frac{E}{c}$

$\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$

$|\vec{S}| = \frac{E^2}{\mu c}$

$|E| = \frac{\omega}{k} B = c \cdot B$

Pol. Circular: $E = \frac{\mu_0 p \omega^2}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \underbrace{\hat{e}(r,t)}_{\text{vetor girando}}$

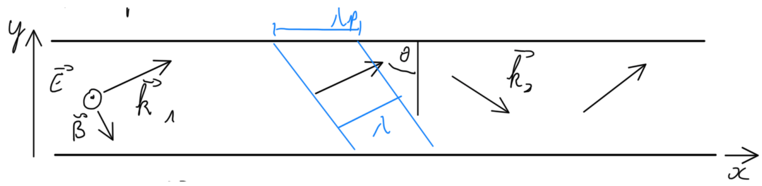
$E^2 = \frac{\mu_0^2 p^2 \omega^4}{16\pi^2} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}$

$$S = \frac{\mu_0 p^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \left(\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$$

2) [2,5] Vimos que para um guia de onda composto por duas placas paralelas ao plano xz, a solução do campo elétrico transverso propagante na direção $\hat{x}$ é dada por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 sen(ky\, cos\theta)\exp[i(k\, sen\theta\, x - \omega t)]\hat{z}$$

.



Para um ângulo de incidência de 60°, e uma separação entre as placas de 1 mm, calcule quais os comprimentos comprimentos de onda que podem se propagar no guia, lembrando da condição de contorno de que o campo nas placas deve ser nulo.

Qual a velocidade de fase para os três primeiros modos propagantes?

$$\vec{E} = E_0 \operatorname{sen}(k y \cos\theta)\, e^{i(k \operatorname{sen}\theta\, x - \omega t)}$$

$$V = \frac{\omega}{k \operatorname{sen}\theta}$$

$\theta = 60^\circ$ $\quad \cos\theta = 1/2$

$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$

$$V_n = \frac{2\omega}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\lambda_n}{2\pi}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}\right) = 0 \qquad \frac{kd}{2} = n\pi$$

$$\frac{\cancel{2}\cancel{\pi} d}{\cancel{2}\lambda} = n\cancel{\pi} \qquad \boxed{\lambda = \frac{d}{n} = \frac{1\,\text{mm}}{n}}$$

$n=1 \quad \lambda = 1\,\text{m}$

$n=2 \quad \lambda = 0{,}5\,\text{mm}$

$n=3 \quad \lambda = 0{,}33\,\text{mm}$

$$V_1 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10^{-3}}{\pi}\,\text{m} = \frac{2\pi c}{\sqrt{3}\cdot\cancel{10^{-3}}} \cdot \frac{\cancel{10^{-3}}}{\cancel{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, c$$

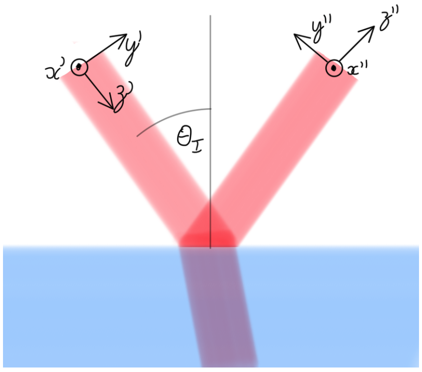
$$V_2 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \cdot \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{\pi} = \frac{2\pi c}{0{,}5\,\text{mm}} \cdot \frac{\cancel{0{,}5\cdot 10^{-3}}}{\cancel{\pi}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, c$$

$$V_3 = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3\pi}\, 10^{-3}\,\text{m} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, c$$

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1\,\text{mm}} \cdot c$$

$$\boxed{\omega_n = \frac{2\pi c}{\lambda_n}}$$

3) [2,5] Um feixe de luz de seção transversa circular de diâmetro d incide sobre um material de índice de refração $n = \sqrt{7}/2$, com um ângulo de incidência de $\pi/3$ rad.



a) Qual a polarização (em relação ao plano de incidência) para exercer a máxima pressão sobre a interface?

b) Qual o coeficiente de reflexão, e o coeficiente de transmissão neste caso?

c) Qual a razão entre a intensidade refletida e a intensidade incidente? E entre a intensidade transmitida e a intensidade incidente?

d) Qual a razão entre a potência total refletida e a potência total incidente? E entre a potência total transmitida e a potência total incidente?

Dados: Coeficientes de reflexão e transmissão:

Polarização perpendicular (ou normal):

$$r_n = \frac{n_I \cos\theta_I - n_T \cos\theta_T}{n_I \cos\theta_I + n_T \cos\theta_T}$$

$$t_n = \frac{2n_I \cos\theta_I}{n_I \cos\theta_I + n_T \cos\theta_T}$$

Polarização paralela:

$$r_p = \frac{n_I \cos\theta_T - n_T \cos\theta_I}{n_I \cos\theta_T + n_T \cos\theta_I}$$

$$t_p = \frac{2n_I \cos\theta_I}{n_I \cos\theta_T + n_T \cos\theta_I}$$

a) Pressão máxima $\rightarrow$ Reflexão máxima

$$r_n = \frac{n_I \cos\theta_I - n_T \cos\theta_T}{n_I \cos\theta_I + n_T \cos\theta_T}$$

$$n_I \operatorname{sen}\theta_I = n_T \operatorname{sen}\theta_T$$

$$1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{7}{4}} \operatorname{sen}\theta_T$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}} = \operatorname{sen}\theta_T$$

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \cos\theta_T$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{4}}\sqrt{\frac{4}{7}}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}}\sqrt{\frac{4}{7}}}$$

$$= \frac{1/2 - 1}{1/2 + 1} = -\frac{1}{3}$$

$$r_p = \frac{n_I \cos\theta_T - n_T \cos\theta_I}{n_I \cos\theta_T + n_T \cos\theta_I} = \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{4}{7}} - \sqrt{\frac{7}{4}}\,\frac{1}{2}}{1 \cdot \sqrt{\frac{4}{7}} + \sqrt{\frac{7}{4}}\,\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{7}}{7} - \frac{\sqrt{7}}{4}}{\sqrt{\frac{4}{7}} + \sqrt{\frac{7}{4}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{8\sqrt{7} - 7\sqrt{7}}{28}}{\frac{8\sqrt{7} + 7\sqrt{7}}{28}} = \frac{\sqrt{7}}{15\sqrt{7}} = \frac{1}{15}$$

$r_n > r_p \rightarrow$ polarização linear na direção $\hat{x}$

b) $r = \frac{1}{3} \rightarrow R = \frac{1}{9}$

$$t_n = \frac{2 n_I \cos\theta_I}{n_I \cos\theta_I + n_T \cos\theta_T} = \frac{2\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} \rightarrow T = \frac{4}{9}$$

c) $$\frac{I_R}{I_I} = \frac{R I_I}{I_I} = R = \frac{1}{9}$$

$$\frac{I_T}{I_I} = \frac{T I_I}{I_I} = T = \frac{4}{9}$$

d) Para as potências, é importante levar em consideração que o diâmetro do feixe de luz será distorcido em uma das direções no feixe transmitido, se tornando elíptico. Assim, a área deve ser considerada para um cálculo direto. Porém, o feixe refletido tem o mesmo perfil do incidente, e então a fração para a potência do refletido será igual à calculada para a intensidade do refletido.

$$\frac{Pot_R}{Pot_I} = \frac{I_R}{I_I} = R = \frac{1}{9}$$

$$\frac{Pot_R + Pot_T}{Pot_I} = 1 \longrightarrow \frac{Pot_T}{Pot_I} = \frac{8}{9}$$

4) [2,5] Em um meio condutor, temos o índice de refração dado por $n = 2 + 4i$. Considere uma onda com incidência normal em uma interface com o ar, $\vec{E}(z,t) = Re\left[Aexp[i(kz - \omega t)]\right]\hat{y}$. Sendo que o coeficiente de reflexão na interface é dado por $r = \frac{1-n}{1+n}$, escreva:

a) O campo elétrico e magnético da onda incidente, e o vetor de Poynting.

b) O campo elétrico e magnético da onda refletida, e o vetor de Poynting.

c) O campo elétrico e magnético da onda transmitida, e o vetor de Poynting.

Dados: Condição de contorno na interface

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \vec{D}_2 \cdot \hat{n} \qquad \vec{E}_1 \times \hat{n} = \vec{E}_2 \times \hat{n}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

4) $\vec{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}(z,t)\right]$; $\vec{\mathcal{E}}(z,t) = A e^{i(kz-\omega t)}\hat{y}$

a) $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = i\omega \vec{B}$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & \mathcal{E}_y(z) & 0 \end{vmatrix} = -\hat{x}\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{E}_y(z) = -ikAe^{i(kz-\omega t)}\hat{x}$$

Vale lembrar que $\vec{k} = k\hat{z}$

$$i\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}} = ik\,Ae^{i(kz-\omega t)}\underbrace{(\hat{z}\times\hat{y})}_{\hookrightarrow -\hat{x}} = \nabla \times \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega}Ae^{i(kz-\omega t)}\hat{x} = -\frac{A}{c}e^{i(kz-\omega t)}\hat{x}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mathrm{Re}\left[\frac{A}{c}e^{i(kz-\omega t)}\right]\cdot -\hat{x}}$$

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mathrm{Re}\left[\vec{\mathcal{E}}\times\vec{B}\right]}{\mu_0} = \frac{\mathrm{Re}\left[A^2e^{i2(kz-\omega t)}\right]\cdot-(\hat{y}\times\hat{x})}{\mu_0 c}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\mathrm{Re}\left[A^2e^{i2(kz-\omega t)}\right]}{\mu_0 c}\hat{z}}$$

b) $\Gamma = \frac{1-n}{1+n} = \frac{1-2-4i}{1+2+4i} = -\frac{1+4i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = -\frac{3-4i+12i+16}{9+16}$

$$\Gamma = -\frac{19+8i}{25}$$

$$\boxed{\vec{E}_r = \mathrm{Re}\left[\Gamma \cdot A e^{i(kz-\omega t)}\right]\hat{y}} \; ; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{-i(kz+\omega t)}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\vec{k}_r = -k\hat{z} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{E}_r = -ik\Gamma A e^{-i(kz+\omega t)} \cdot \underbrace{\hat{z} \times \hat{y}}_{-\hat{x}}$$

$$\boxed{\vec{B}_r = \mathrm{Re}\left[\frac{\Gamma A}{c} e^{-i(kz+\omega t)}\right]\hat{x}}$$

$$\vec{S}_r = \frac{\vec{E}_r \times \vec{B}_r}{\mu_0} = \frac{\mathrm{Re}\left[(\Gamma \cdot A)^2 e^{-2i(kz+\omega t)}\right]}{\mu_0 c}\,\hat{y} \times \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{S}_r = \frac{\mathrm{Re}\left[(\Gamma \cdot A)^2 e^{-2i(kz+\omega t)}\right]}{\mu_0 c}\left(-\hat{z}\right)}$$

c) Interface: $\vec{E}_I + \vec{E}_R = \vec{E}_T$ @ $z = 0$

$$\vec{E}_T(0, t) = \mathrm{Re}\left[(A + \Gamma A)\, e^{-i\omega t}\right]\hat{y} = \mathrm{Re}\left[(1+\Gamma) A e^{-i\omega t}\right]\hat{y}$$

$$1+r = 1 - \frac{19+8i}{25} = \frac{25-19-8i}{25} = \boxed{\frac{6-8i}{25}}$$

Vetor $\vec{k} = k_T \cdot \hat{z}$ $\qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$

$$k_T = \frac{2\pi}{\lambda_T} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} \cdot n = k \cdot n = k \cdot (2+4i)$$

$$\exp(i \cdot k_T \cdot z) = \exp(i \cdot 2kz) \cdot \exp(-4kz)$$

$$\boxed{\vec{E}_T(z,t) = Re\left[\frac{6-8i}{25} \cdot A e^{-4kz} \cdot e^{i(2kz-\omega t)}\right]\hat{y}}$$

Onde $k = \omega/c$

$$i\vec{k} \times \vec{E}_T = i(k \cdot n) \cdot \mathcal{E}_T \cdot \underbrace{\hat{z} \times \hat{y}}_{-\hat{x}} = i\omega \vec{B}_T$$

$$\vec{B}_T = -\frac{n}{c} \mathcal{E}_T \cdot \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{B}_T = -Re\left[\frac{(2+4i) \cdot (6-8i)}{25 \cdot c} A e^{-4kz} e^{i(2kz-\omega t)}\right]\hat{x}}$$

$$\boxed{\vec{S}_T = \frac{\vec{E}_T \times \vec{B}_T}{\mu_0} = Re\left[\frac{(2+4i)}{\mu_0 c}\left(\frac{6-8i}{25}\right)^2 A^2 e^{-8kz} e^{2i(2kz-\omega t)}\right]\hat{z}}$$