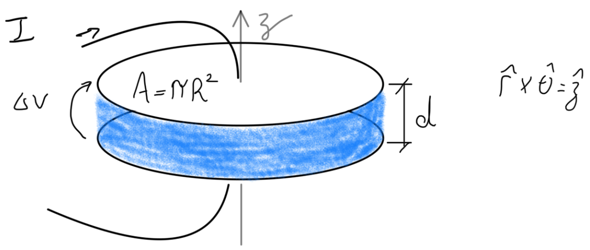
Prova 3 Sub - 4302303 - Eletromagnetismo I - 2022 - 26/07/2022

1) [4,0 pts] Um capacitor plano com um dielétrico de permissividade ε está submetido a uma diferença de potencial alternada $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.



a) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ entre as placas do capacitor.

b) Calcule o vetor $\vec{H}$ na superfície cilíndrica de raio R entre as placas do capacitor.

c) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}$ na superfície do capacitor.

d) Qual a energia total do campo eletromagnético no interior do capacitor ao longo do tempo?

Dado: $cos\theta \cdot sen\theta = sen(2\theta)/2$

a) $\Delta V = V_0 \cos(\omega t)$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = \frac{V_0}{d}\cos(\omega t)\,\hat{z}$$

b) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \Rightarrow \oint H_\theta \hat{\theta} \cdot r\, d\hat{\theta} = \frac{d}{dt}\int \varepsilon \frac{V_0}{d}\cos\omega t\, \hat{z} \cdot r\, dr\, d\theta\, \hat{z}$

$$H_\theta \cdot 2\pi R = -\omega \varepsilon \frac{V_0}{d} \pi R^2 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\vec{H} = -\frac{\omega \varepsilon V_0 R}{2d} \operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{\theta} \Rightarrow \vec{B} = -\omega \varepsilon \mu \frac{V_0 R}{2d} \operatorname{sen} \omega t\, \hat{\theta}$$

c) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\omega \varepsilon \frac{V_0^2}{2d^2} R \cos(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t) \underbrace{\hat{z} \times \hat{\theta}}_{-\hat{r}}$

$$\vec{S} = -\omega \varepsilon \frac{V_0^2}{2d^2} R \cos(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t)\, \hat{r}$$

d) $u_e = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2} = \epsilon \frac{V_0^2}{2d^2} \cos^2(\omega t)$, onde usamos $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$

$$U_e = \int u_e \, dv = \epsilon \frac{V_0^2}{2d^2} \cos^2(\omega t) \cdot \pi R^2 \cdot d = \epsilon \frac{V_0}{2d} \pi R^2 \cos^2(\omega t)$$

$u_B = \frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2} = \omega^2 \epsilon^2 \mu \frac{V_0^2 r^2}{8d^2} \operatorname{sen}^2(\omega t)$, onde $r < R$

$$U_B = \int u_B \, dv = \omega^2 \epsilon^2 \mu \frac{V^2}{8d^2} \operatorname{sen}^2(\omega t) \cdot \int_0^R r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$= \omega^2 \epsilon^2 \mu \frac{V^2}{8d^2} \operatorname{sen}^2(\omega t) \cdot 2\pi d \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$U_B = \mu \omega^2 \frac{\epsilon^2 V_0^2}{16 d} \pi R^4 \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

$$U = \epsilon V_0^2 \frac{\pi R^2}{2d} \left[\cos^2(\omega t) + (\omega R)^2 \frac{\mu \epsilon}{8} \operatorname{sen}^2(\omega t) \right]$$

$$= \frac{C V_0^2}{2} \left[\cos^2(\omega t) + (\omega R)^2 \frac{\mu\epsilon}{8} \operatorname{sen}^2(\omega t) \right] \qquad C = \epsilon \frac{\pi R^2}{d}$$

Ou ainda:

$$\nabla \cdot \vec{S} = -\frac{d}{dt} u_{em} \Rightarrow \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = -\frac{d}{dt} U_{em}$$

$$\int \vec{S}\cdot d\vec{a} = -w\,\epsilon\,\frac{V_0^2}{2d^2}R\cos(wt)\,\operatorname{sen}(wt)\cdot 2\pi R\cdot d =$$

$$= -w\,V_0^2\cdot\frac{\epsilon\pi R^2}{d}\cos(wt)\,\operatorname{sen}(wt)$$

$$\frac{d}{dt}U_{em} = w\,C\cdot V_0^2\,\underbrace{\cos(wt)\,\operatorname{sen}(wt)}_{\operatorname{sen}(2wt)/2} = \frac{w\,C\,V_0^2}{2}\operatorname{sen}(2wt)$$

$$\frac{d}{dt}U_{em} = \frac{CV_0^2}{2}\cdot w\,\operatorname{sen}(2wt) \Rightarrow U_{em} = \frac{CV_0^2}{4}\cos(2wt) = \underline{\frac{CV_0^2}{2}\cos^2(wt)}$$

a diferença é da ordem de $\left(\frac{wR}{c}\right)^2$ (onde c é a vel. da luz)

e aparece ao considerarmos termos superiores

2)[3,0 pts] Sabendo que uma onda eletromagnética, de campo elétrico

$$\vec{E} = Re\{\vec{E}_0 exp[i(kz - \omega t)]\}$$

incide perpendicularmente em um plasma, definido por uma frequência ω_P, qual é expressão para a onda que penetra no plasma, e qual a fração da potência total refletida, sabendo que no interior do plasma temos a relação

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$$

nos seguintes casos:

a)$\omega \ll \omega_P$

b) $\omega \gg \omega_P$

Dados: Coeficiente de reflexão para incidência normal: $r = \frac{n_I - n_R}{n_I + n_R}$. Considere que a onda incide do vácuo ($n_I = 1$). Velocidade de fase: $v = \omega/k$

2) Reflexão em plasma:

a) $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ $\quad \omega \ll \omega_p \Rightarrow k = i\,\frac{\omega_p}{c}$

$\tilde{n} = n_R + i n_I \rightarrow n = \omega/k = -i\,c/\omega_p$

$E_T = E_0 \exp[i \cdot i \frac{\omega_p}{c} z - i\omega t] = \underline{E_0 e^{-\frac{\omega_p z}{c}} e^{-i\omega t}}$

$r = \frac{1 - i n_I}{1 + i n_I}$ $\quad |r|^2 = 1 \Rightarrow \underline{R = 1}$

$$\underline{\vec{E}(t) = Re\{\vec{E}_0\, e^{-\omega_p z/c} \cdot e^{-i\omega t}\}}$$

b) $\omega \gg \omega_p$ $\quad k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$ $\quad n \simeq 1$

$\underline{R = 0}$ $\quad \vec{E} = Re\{\vec{E}_0 \exp[i(kz - \omega t)]\}$

3)[3,0 pts] Uma onda plana incide em um meio com um certo índice de refração dependente da frequência. Esta onda é composta de duas frequências, $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ e $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$, que dão origem a uma envoltória típica de um batimento:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0[\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)] = \frac{\vec{E}_0}{2}\cos(k_0 z - \omega_0 t)\cos(\Delta k z - \Delta\omega t)$$

O índice de refração do meio é dado por $n(\omega) = n_R + n_1 \frac{x}{1+x^2}$, e sua absorção por $\alpha = \alpha_R \frac{1}{1+x^2}$, onde $x = 2\frac{\omega - \omega_R}{\gamma}$, sendo ω_R a frequência de ressonância e γ a largura de absorção.

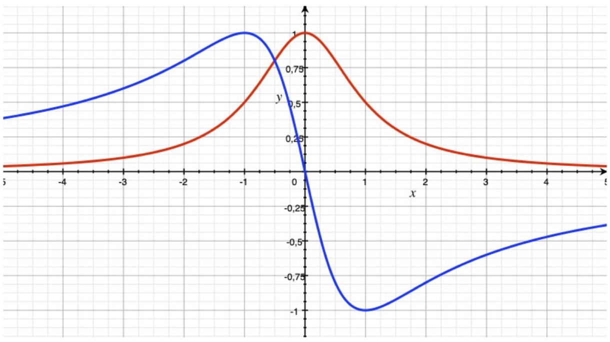


Figura 1: Em azul, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Em vermelho, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) Se $\Delta\omega \ll \gamma$, qual é a velocidade da envoltória na ressonância? Como ela se compara à velocidade de grupo $v_G = \frac{\partial\omega}{\partial k}$?

b) Se $\Delta\omega = 2\gamma$, qual é a velocidade da envoltória na ressonância? Como ela se compara à velocidade de grupo $v_G = \frac{\partial\omega}{\partial k}$?

Dado: Velocidade de fase: $v_\varphi = \omega/k$; Velocidade de grupo $v_G = v_\varphi/(1 + \frac{\omega}{n^2}\frac{dn}{d\omega})$

3)

a) $\Delta\omega \ll \gamma \rightarrow$ vale a aproximação $v_e = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \simeq \frac{\partial\omega}{\partial k} = v_g$

Como: $n = n_R + n_1 \frac{x}{1+x^2}$ $\qquad x = 2\frac{\omega-\omega_R}{\gamma}$

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} = \frac{\partial n}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \omega} = n_1\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right]\cdot\frac{2}{\gamma}$$

$$= \frac{2n_1}{\gamma}\,\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2n_1}{\gamma}\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\left.\frac{d}{d\omega}n\right|_{\omega=\omega_R} = \frac{2n_1}{\gamma}$$

$$V_g = \frac{v_\varphi}{1+\frac{\omega_R}{n^2}\frac{dn}{d\omega}} = \frac{v_\varphi}{1+2\frac{n_1\omega_R}{n^2\gamma}}$$

b) Neste caso, $\Delta\omega = 2\gamma$; $\omega_0 = \omega_R$

$$n_2^\circ = n(\omega_R + \Delta\omega) \Rightarrow \qquad x = 2\,\frac{\omega_R + \Delta\omega - \omega_R}{\gamma}$$

$$= 2\cdot\frac{\Delta\omega}{\gamma} = 4$$

$$n_2^\circ = n_R + n_I \cdot \frac{4}{1+4^2} = n_R + n_I \frac{4}{17}$$

$$n_1^\circ = n(\omega_R - \Delta\omega) \Rightarrow \quad x = -4 \Rightarrow n_1^\circ = n_R - n_I \frac{4}{17}$$

$$c_n = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \qquad k_2 = \frac{\omega_2 \cdot n_2}{c} = (\omega_0 + \Delta\omega)\left(n_R + \frac{4}{17} n_I\right)\frac{1}{c}$$

$$\simeq \frac{1}{c}\left(\omega_0\, n_R + \Delta\omega\, n_R + \omega_0 \cdot \frac{4}{17}\, n_I\right)$$

$$k_0 = \frac{\omega_0 n_R}{c} \Rightarrow \Delta k = k_2 - k_0 \simeq \Delta\omega\, n_R + \omega_0 \frac{4}{17} n_I$$

$$\frac{\Delta k}{\Delta\omega} = n_R + n_I \cdot \frac{4}{17}\,\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = n_R + n_I \cdot \frac{4}{17}\,\frac{\omega_0}{2\gamma}$$

$$v_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{1}{n_R + \frac{2\omega_0}{17}\frac{n_I}{\gamma}} = \frac{c/n_R}{1 + \frac{2}{17}\frac{n_I}{n_R}\frac{\omega_0}{\gamma}} = \frac{v_\varphi}{1 + \frac{2}{17}\frac{n_I}{n_R}\frac{\omega_0}{\gamma}}$$

$$V_g = \frac{v_\varphi}{1 + 2\,\frac{n_I}{n_R}\cdot\frac{\omega_0}{\gamma}\cdot\frac{1}{n_R}} \neq v_c$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\tfrac{\partial}{\partial t}\vec{B} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\tfrac{\partial}{\partial t}\rho \qquad \nabla \cdot \vec{S} = -\tfrac{\partial}{\partial t}(u_E + u_B) \qquad u_B = \tfrac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2} \qquad u_E = \tfrac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{free,enc} \qquad \vec{H} = \tfrac{1}{\mu_o}\vec{B} - \vec{M} \qquad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \qquad \mathcal{E} = -\tfrac{d}{dt}\Phi$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial \theta}F_z - \tfrac{\partial}{\partial z}F_\theta\right)\hat{r} + \left(\tfrac{\partial}{\partial z}F_r - \tfrac{\partial}{\partial r}F_z\right)\hat{\theta} + \tfrac{1}{r}\left(\tfrac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \tfrac{\partial}{\partial \theta}F_r\right)\hat{k}$$