Prova 3 - 4300372 – Eletromagnetismo - 13/12/2022

1) [3,0 pts] Reflexão e Interferência

a) Um feixe de luz monocromática, de comprimento de onda $\lambda = 0,5 \mu m$, incide perpendicularmente sobre uma interface ar-vidro. Considerando que o índice de refração do vidro é $n_v = 3,0$, qual o coeficiente de reflexão, e qual a fração da potência refletida da luz incidente, comparada à potência total incidente

Considere agora que queremos minimizar a reflexão nesta interface, depositando um material isolante com um índice de refração $n_I < n_v$.

b) Se $n_I = 1,5$, qual o coeficiente de reflexão na interface isolante-vidro?

c) Qual a espessura do material para termos interferência destrutiva na reflexão?

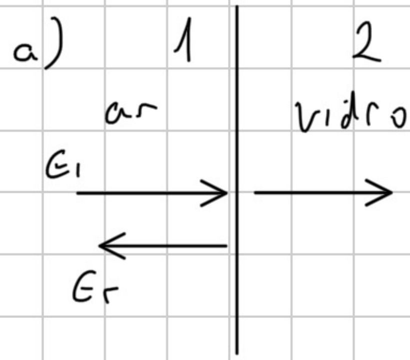
d) Em primeira aproximação, qual a fração da potência refletida da luz incidente, comparada à potência total incidente?

Dado: coeficiente de reflexão de Fresnel

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

onde n_1 é o índice de refração do meio incidente, e n_2 o índice de refração do meio refratado.

1/ a)



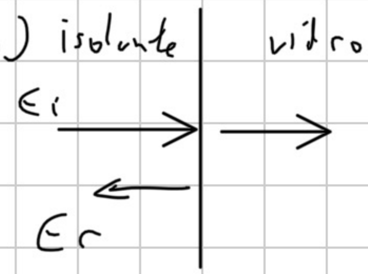
Coeficiente de reflexão

$$r = \frac{E_r}{E_I} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Fração de potência refletida

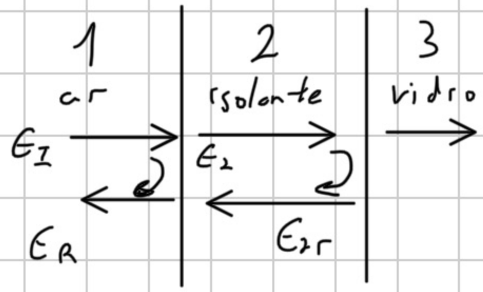
$$R = \frac{P_r}{P_I} = |r|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$$

b)



$$r = \frac{n_I - n_V}{n_I + n_V} = \frac{1,5 - 3,0}{1,5 + 3,0} = -\frac{1,5}{4,5} = -\frac{1}{3}$$

c)



$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1,0 - 1,5}{1,0 + 1,5} = -\frac{0,5}{2,5} = -\frac{1}{5}$$

$$r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} = \frac{1,5 - 3,0}{1,5 + 3,0} = \frac{-1,5}{4,5} = -\frac{1}{3}$$

1ª aproximação: $E_r = E_I \cdot r_{12} + t_{12} E_{2r} e^{i\varphi}$; $E_{2r} = E_2 \, r_{23}$; $E_2 = E_I \cdot t_{12}$

$$\therefore E_r = E_I \left(r_{12} + t_{12}^2 \cdot r_{23} \, e^{i\varphi} \right)$$

$$t_{12}^2 = 1 - r_{12}^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \sim 1$$

$$E_r = E_I \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} e^{i\varphi} \right) \rightarrow \text{mínimo se } e^{i\varphi} = -1$$

$$\Rightarrow \varphi = (2m+1)\pi$$

$m \in \mathbb{N}$

Espessura: $\varphi = k \cdot (2d)$ $\to$ 2 pois temos ida e volta no meio

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_n} = 2\pi \frac{f}{c_n} = 2\pi \frac{f}{c} \cdot n = \frac{2\pi}{\lambda_0} n$$

c_n ↳ vel. da luz no meio

λ_0 ↳ compr. de onda no vácuo

$$\Rightarrow \varphi = (2m+1)\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} \cdot \frac{n}{\lambda_0} \cdot 2d$$

$$\Rightarrow d = \frac{\lambda_0}{n} \cdot \frac{2m+1}{4} = \frac{0{,}5}{4}\mu m \cdot \frac{1}{1{,}5}(2m+1)$$

$$d = \frac{1}{12}(2m+1)\,\mu m \to \text{mínimo}: d_{min} = \frac{1}{12}\,\mu m$$

d) Aproximando $t_{12}^2 \simeq 1$

$$E_r = E_I\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = E_I \cdot \left(\frac{-3+5}{15}\right) = E_I \cdot \frac{2}{15}$$

$$r = \frac{2}{15} \quad ; \quad \boxed{R = \frac{4}{225} \sim 2\%}$$

2) [3,5] Temos dois dipolos oscilando na origem, descritos pelos momentos de dipolo $\vec{p}_1(t) = p_0 \cos(\omega t)\hat{x}$ e $\vec{p}_2(t) = p_0 \cos(\omega t + \pi/2)\hat{y}$.

a) Qual a expressão para o campo elétrico gerado pelo dipolo $\vec{p}_1$, ao longo dos eixos x, y, z, ou seja $\vec{E}_1(x,0,0,t)$, $\vec{E}_1(0,y,0,t)$, e $\vec{E}_1(0,0,z,t)$?

b) Qual a expressão para o campo elétrico gerado pelo dipolo $\vec{p}_2$, ao longo dos eixos x, y, z, ou seja $\vec{E}_2(x,0,0,t)$, $\vec{E}_2(0,y,0,t)$, e $\vec{E}_2(0,0,z,t)$?

c) Qual a Intensidade do campo emitido nas direções x, y e z, e qual a polarização ao longo destas direções?

Dado: Campo elétrico gerado por um dipolo oscilante, onde o dipolo está na origem: $\vec{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{sen\theta}{r} cos(kr - \omega t + \phi)\hat{\theta}$, para um dipolo orientado na direção $\hat{z}$.

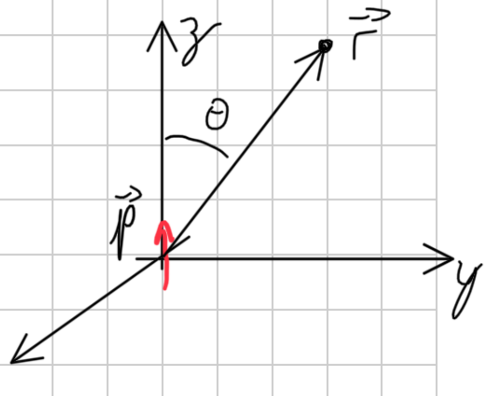
Campo magnético gerado pelo mesmo dipolo: $\vec{B} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{sen\theta}{r} cos(kr - \omega t + \phi)\hat{\varphi}$.

Vetor de Poyinting $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$, Intensidade: $I = \langle |S| \rangle$

Dica: Calcule o caso para o dipolo orientado na direção $\hat{z}$ e depois troque os eixos conforme a conveniência.

2) a) Dipolo orientado em $\hat{z}$

$$\vec{E} = E_0 \frac{sen\theta}{r} \cos(kr - \omega t + \phi)\hat{\theta}$$



Direção z: $\theta = 0$

$$\vec{E}(0,0,z,t) = 0$$

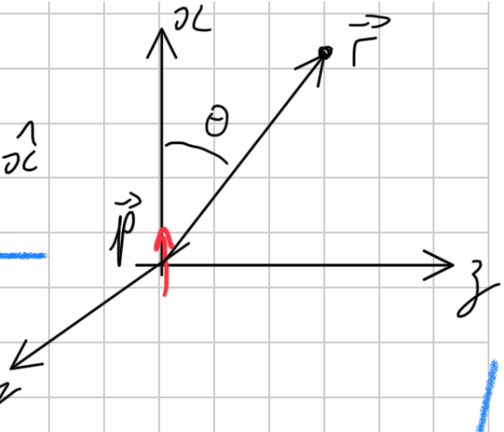
Direção x: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\hat{\theta} = \hat{z}$, $r = x$

$$\vec{E}(x,0,0,t) = \frac{E_0}{x} \cos(kx - \omega t + \phi)\hat{z}$$

Direção y: $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\hat{\theta} = \hat{y}$, $r = y$

$$\vec{E}(0,y,0,t) = \frac{E_0}{y} \cos(ky - \omega t + \phi)\hat{z}$$

→ Girando para $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t)\,\hat{x}$

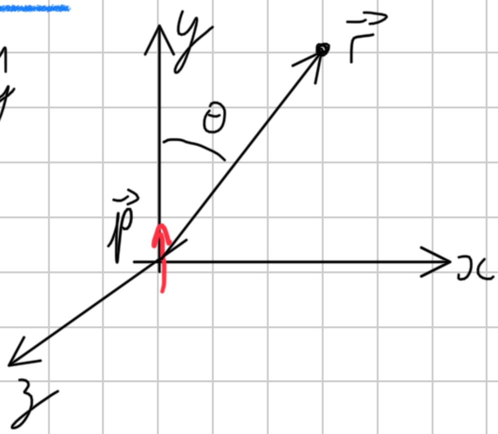


$$\vec{E}_1(x,0,0,t) = 0$$

$$\vec{E}_1(0,y,0,t) = \frac{E_0}{y}\cos(ky-\omega t)\,\hat{x} \quad ; \quad E_0 = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}$$

$$\vec{E}_1(0,z,0,t) = \frac{E_0}{z}\cos(kz-\omega t)\,\hat{x}$$

b) Girando para $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t + \pi/2)\,\hat{y}$



$$\vec{E}_2(x,0,0,t) = \frac{E_0}{x}\cos(kx-\omega t+\pi/2)\,\hat{y}$$

$$\vec{E}_2(0,y,0,t) = 0$$

$$\vec{E}_2(0,0,z,t) = \frac{E_0}{z}\cos(kz-\omega t+\pi/2)\,\hat{y}$$

c) $x \Rightarrow \vec{E}(x,0,0,t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{E_0}{x} \cos(kx - \omega t + \pi/2)\,\hat{y}$

$\boxed{\text{Polarização linear na direção } \hat{y}}$

Intensidade: $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{E} \times \vec{B} = E_0 \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \cos(kr - \omega t + \phi)\,\hat{\theta} \times \frac{E_0}{c} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \cos(kr - \omega t + \phi)\,\hat{\varphi}$$

$$= \frac{|\vec{E}|^2}{c}\,\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{|\vec{E}|^2}{\mu_0 c}\,\hat{r} \qquad |S| = \frac{|\vec{E}|^2}{\mu_0 c}$$

$$x \Rightarrow |\vec{E}|^2 = \frac{E_0^2}{x^2} \cos^2(kx - \omega t + \pi/2)$$

$$I = \langle |S| \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \frac{1}{x^2} \langle \underbrace{\cos^2(kx - \omega t + \pi/2)}_{1/2} \rangle$$

$$I(x,0,0) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c x^2}$$

$$= \frac{\mu_0^2 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2} \frac{1}{2\mu_0 c x^2} = \boxed{\frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2} \frac{\mu_0}{c} \frac{1}{x^2}}$$

$$y \Rightarrow \vec{E}(0,y,0,t) = \frac{E_0}{y}\cos(ky-\omega t)\,\hat{x}$$

Polarização linear na direção $\hat{x}$

$$I = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\frac{1}{y^2}\underbrace{\langle \cos^2(ky-\omega t)\rangle}_{1/2} = \boxed{\frac{p_0^2\,\omega^4}{32\pi^2}\frac{\mu_0}{c}\frac{1}{y^2}}$$

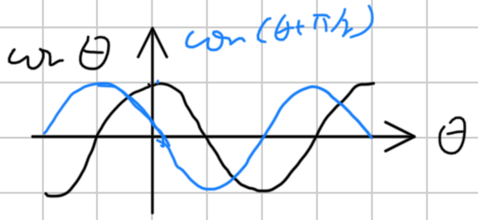
$$z \Rightarrow \vec{E}(0,0,z,t) = \frac{E_0}{z}\left[\cos(kz-\omega t)\,\hat{x} + \cos(kz-\omega t+\pi/2)\,\hat{y}\right]$$

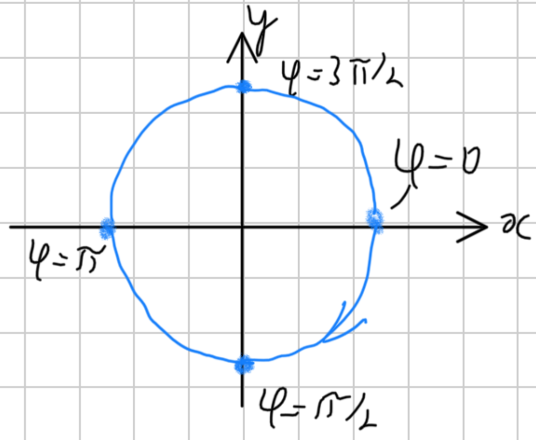
$$\cos(kz-\omega t+\pi/2) = \frac{e^{i(kz-\omega t)}e^{i\pi/2} + e^{-i(kz-\omega t)}e^{-i\pi/2}}{2}$$

$$e^{i\pi/2} = \underbrace{\cos\pi/2}_{0} + i\,\underbrace{\text{sen}\,\pi/2}_{1} = i \quad / \quad e^{-i\pi/2} = -i$$

$$\cos(kz-\omega t+\pi/2) = i\,\frac{e^{i(kz-\omega t)} - e^{-i(kz-\omega t)}}{2} = -\text{sen}(kz-\omega t)$$

$$\vec{E}(0,0,z,t) = \frac{E}{z}\left[\cos(kz-\omega t)\,\hat{x} - \text{sen}(kz-\omega t)\,\hat{y}\right]$$





$$\varphi = \omega t - kz$$

$\boxed{\text{Polarização circular, sentido horário}}$

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle \quad ; \quad |S| = \frac{|\vec{E}|^2}{\mu_0 c} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\mu_0 c z^2}\Big[\underbrace{\cos^2(kz - \omega t) + \operatorname{sen}^2(kz - \omega t)}_{=1}\Big]$$

$$|S| = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\mu_0 c z^2}$$

$$I(0,0,z) = \langle |S| \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{\mu_0 c z^2} = \frac{p_0^2 \omega^2}{16\pi^2} \frac{\mu_0}{c} \frac{1}{z^2}$$

3) [3,5 pts] Uma onda plana incide em um meio com um certo índice de refração dependente da frequência. Esta onda é composta de duas frequências, $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ e $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$, que dão origem a uma envoltória típica de um batimento:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0[\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)] = \frac{\vec{E}_0}{2}\cos(k_0 z - \omega_0 t)\cos(\Delta k z - \Delta\omega t).$$

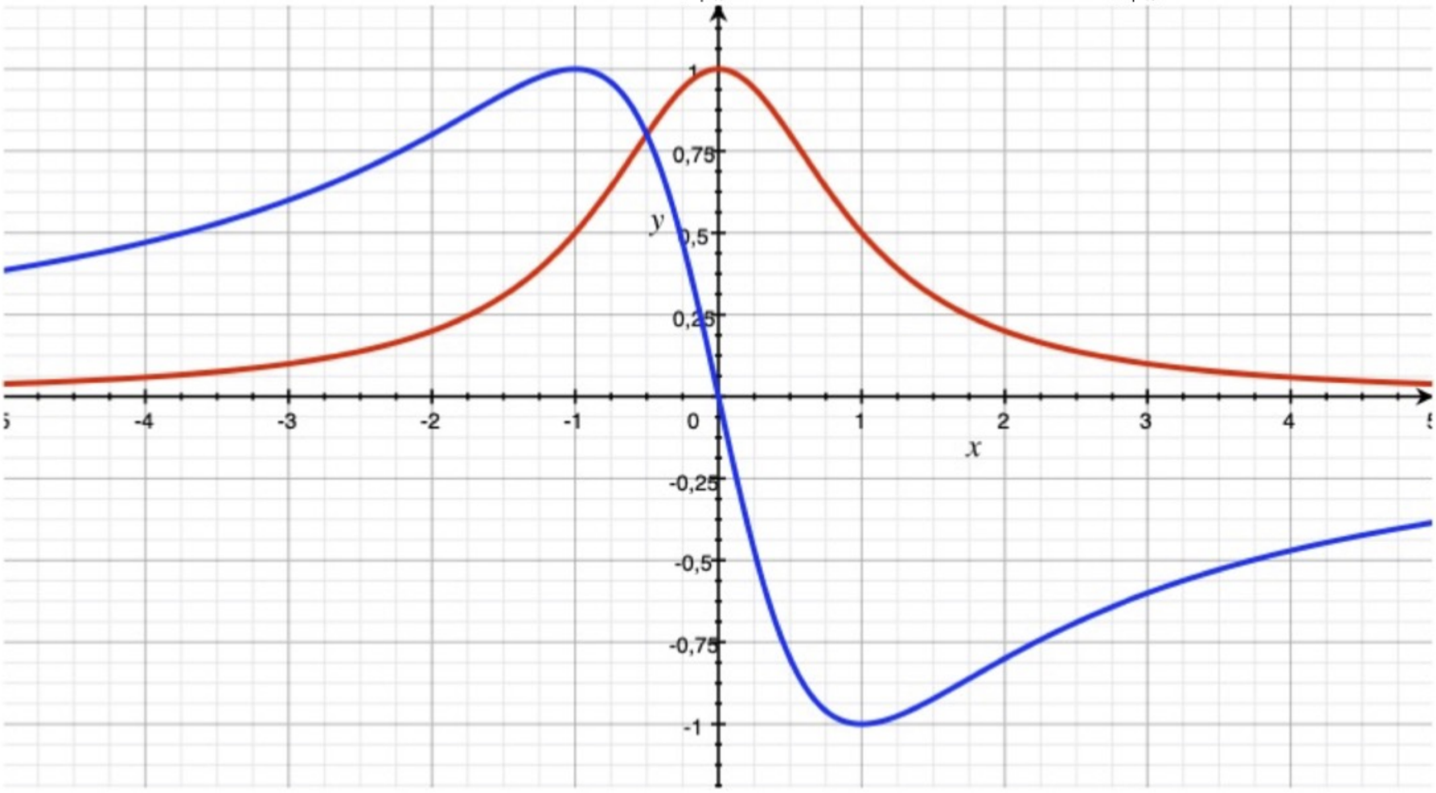
O índice de refração do meio é dado por $n(\omega) = n_R + n_1 \frac{x}{1+x^2}$, e sua absorção por $\alpha = \alpha_R \frac{1}{1+x^2}$, onde $x = 2\frac{\omega-\omega_R}{\gamma}$, sendo ω_R a frequência de ressonância e γ a largura de absorção.

a) Se $\Delta\omega \ll \gamma$, qual é a velocidade da envoltória na ressonância? Como ela se compara à velocidade de grupo $v_G = \frac{\partial\omega}{\partial k}$?

b) Se $\Delta\omega = 2\gamma$, qual é a velocidade da envoltória na ressonância? Como ela se compara à velocidade de grupo $v_G = \frac{\partial\omega}{\partial k}$?

Dado: Velocidade de fase: $v_\varphi = \omega/k$; Velocidade de grupo $v_G = v_\varphi/(1 + \frac{\omega}{n^2}\frac{dn}{d\omega})$

Figura 1: Em azul, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Em vermelho, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



3) $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega \; ; \; k_1 = \frac{\omega_1}{c} \cdot n(\omega_1) = k_0 + \Delta k$

$$\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega \; ; \; k_2 = \frac{\omega_2}{c} \, n(\omega_2) = k_0 - \Delta k$$

$$\omega_0 \Rightarrow k_0 = \frac{\omega_0}{c} \, n(\omega_0)$$

Velocidade de grupo: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{v_\varphi}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}$

$$n(\omega) = n_R + n_1 \frac{x}{1+x^2} \qquad x = 2 \, \frac{\omega - \omega_R}{\gamma}$$

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{dx} \frac{dx}{d\omega} = n_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \cdot \frac{2}{\gamma}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = x \cdot \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 1 + x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \left.\frac{dn}{dx}\right|_{x=0} = 1$$

$$\left.\frac{dn}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 2 \, \frac{n_1}{\gamma} \Rightarrow v_g = \frac{v_\varphi}{1 + 2 \, \frac{\omega_R}{\gamma} \cdot \frac{n_1}{n_R}}$$

a) Velocidade da envoltória: $V_e = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

$$n(\omega_1) \Rightarrow x(\omega_1) = 2\frac{\omega_R + \Delta\omega - \omega_R}{\gamma} = \frac{2\Delta\omega}{\gamma}$$

$$n(\omega_1) = n_R + n_1 \cdot 2\frac{\Delta\omega}{\gamma}\frac{1}{1+\left(\frac{2\Delta\omega}{\gamma}\right)^2} \simeq n_R + n_1 \cdot \frac{2\Delta\omega}{\gamma}$$

$$n(\omega_2) \Rightarrow x(\omega_2) = 2\frac{\omega_R - \Delta\omega - \omega_R}{\gamma} = -\frac{2\Delta\omega}{\gamma}$$

$$n(\omega_2) \simeq n_R - n_1 \, 2\frac{\Delta\omega}{\gamma}$$

Con $n(\omega)$, podemos calcular Δk

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{(\omega_0 + \Delta\omega)}{2c}\left(n_R + n_1 \cdot \frac{2\Delta\omega}{\gamma}\right) - \frac{(\omega_0 - \Delta\omega)}{2c}\left(n_R - n_1 \frac{2\Delta\omega}{\gamma}\right) =$$

$$= \frac{\Delta\omega n_R}{c} + \frac{\omega_0}{c} n_1 \, 2\frac{\Delta\omega}{\gamma} = \frac{\Delta\omega}{c}\left(n_R + \frac{2\omega_0 n_1}{\gamma}\right)$$

$$V_e = \frac{c}{\Delta\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{n_R + \frac{2\omega_0}{\gamma} n_1} = \frac{c}{n_R}\frac{1}{1+\frac{2n_1}{n_R}\frac{\omega_0}{\gamma}} = \frac{V_\varphi}{1+\frac{2n_1}{n_R}\frac{\omega_0}{\gamma}}$$

$$\boxed{V_e = V_g}$$

b) $\Delta\omega = 2\gamma$

$$n(\omega_1) = n_R + n_1 \cdot \frac{2\Delta\omega}{\gamma} \frac{1}{1+\left(\frac{2\Delta\omega}{\gamma}\right)^2} = n_R + n_1 \cdot 4 \frac{1}{1+4^2}$$

$$= n_R + \frac{4}{17} n_1$$

$$n(\omega_2) = n_R - \frac{4}{17} n_1$$

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{(\omega_0 + 2\gamma)}{2c}\left(n_R + n_1 \cdot \frac{4}{17}\right)$$

$$- \frac{(\omega_0 - 2\gamma)}{2c}\left(n_R - n_1 \frac{4}{17}\right) =$$

$$= \frac{n_R}{c} 2\gamma + \frac{\omega_0}{c} n_1 \cdot \frac{4}{17} = \frac{n_R}{c}\left(2\gamma + \omega_0 \frac{n_1}{n_R} \cdot \frac{4}{17}\right)$$

$$v_e = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{c}{n_R} \frac{2\gamma}{2\gamma + \omega_0 \frac{n_1}{n_R} \cdot \frac{4}{17}} = \frac{v_\varphi}{1 + \frac{2\omega_R}{\gamma} \frac{n_1}{n_R} \cdot \frac{1}{17}}$$

$$v_g = \frac{v_\varphi}{1 + 2 \frac{\omega_R}{\gamma} \cdot \frac{n_1}{n_R}} \Rightarrow \frac{v_e}{v_g} = \frac{1 + \alpha/17}{1+\alpha}$$

$$\alpha = \frac{2\omega_R n_1}{\gamma n_R}$$

$$v_e \neq v_g \qquad |\alpha| < 1 \qquad \boxed{\frac{v_e}{v_g} \simeq \frac{1}{1+\alpha}}$$

$$\boxed{v_e \sim v_\varphi}$$