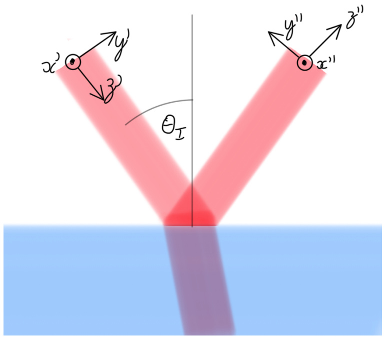
Prova 3 - 4302303 - Eletromagnetismo I - 2022 - 21/07/2022
Gabarito

1) [5,0] Um feixe de luz circularmente polarizada, com polarização destra, de potência P_I e área efetiva A, incide com um ângulo de θ em relação à normal de uma superfície de um dielétrico. Pela figura, digamos que o campo dentro do feixe é dado por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = ERe\left\{exp[i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)]\hat{x}' + exp[i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \pi/4)]\hat{y}'\right\}$$



a) Se o índice de refração no meio incidente é $n = \sqrt{3}$, qual o ângulo de Brewster (θ_B) para o qual a reflexão é linearmente polarizada?

b) Calcule o coeficiente de reflexão para as duas componentes de polarização do campo incidente nesta condição (use os versores $\hat{x}$", $\hat{y}$").

c) Calcule a razão entre a potência total refletida P_R e P_I.

Dado: índice de refração no dielétrico $n = \sqrt{3}$.

Coeficientes de reflexão:

Polarização perpendicular (ou normal):

$$r_n = \frac{n_I \cos\theta_I - n_T \cos\theta_T}{n_I \cos\theta_I + n_T \cos\theta_T}$$

Polarização paralela:

$$r_p = \frac{n_I \cos\theta_T - n_T \cos\theta_I}{n_I \cos\theta_T + n_T \cos\theta_I}$$

Ângulo de Brewster: $\tan\theta_B = n_T/n_I$.

Errata: a polarização acima é elíptica! Para ser circular, precisamos de

$$\vec{E}(\vec{r},t) = ERe\left\{exp[i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)]\hat{x}' + exp[i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t + \pi/2)]\hat{y}'\right\}.$$

No entanto, o resultado não se altera!

a) Ângulo de Brewster: polarização paralela se cancela

$$tg\,\theta_B = \frac{n_T}{n_I} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_B = 60° = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

b) $\theta_I = \theta_B$, $\theta_T \Rightarrow n_I \,sen\,\theta_I = n_T \,sen\,\theta_T$

$$\left.\begin{array}{l} n_I \,sen\,\theta_I = 1 \cdot sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ n_R \,sen\,\theta_T = \sqrt{3}\,sen\,\theta_T \end{array}\right\} \quad sen\,\theta_T = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_T = 30°$$

$$\cos\theta_I = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \cos\theta_T = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\Gamma_n = \frac{\cos\theta_I - n_T\cos\theta_T}{\cos\theta_I + n_T\cos\theta_T} = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\Gamma_p = \frac{\cos\theta_T - n_T\cos\theta_I}{\cos\theta_T + n_T\cos\theta_I} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}} = 0}$$

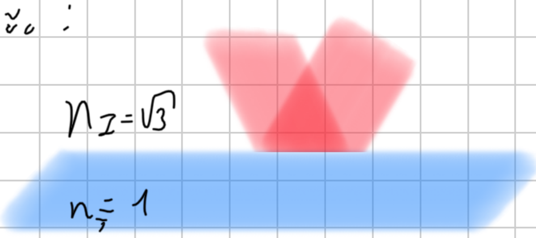
c) Componente n: $P_R^n = |\Gamma_n|^2 P_I^n = \left|-\frac{1}{2}\right|^2 \cdot \frac{P_I}{2} = \frac{1}{8} P_I$

Componente p: $P_R^p = |\Gamma_p|^2 P_I^p = 0 \cdot \frac{P_I}{2} = 0$

Potência refletida: $P_R = P_R^p + P_R^n = \frac{1}{8} P_I$

$$\boxed{\frac{P_R}{P_I} = \frac{1}{8}}$$

Segunda interpretação:



a) $\tan \theta_\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30° = \dfrac{\pi}{6}$

b) $\theta_I = \theta_B$, $\quad \theta_T \Rightarrow \quad n_I \operatorname{sen} \theta_I = n_T \operatorname{sen} \theta_T$

$$\left.\begin{array}{l} n_I \operatorname{sen} \theta_I = \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ n_R \operatorname{sen} \theta_T = \operatorname{sen} \theta_T \end{array}\right\} \operatorname{sen} \theta_T = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_T = 60°$$

$\cos \theta_I = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos \theta_T = \cos 30° = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\Gamma_n = \frac{n_I \cos\theta_I - n_T \cos\theta_T}{n_I \cos\theta_I + n_T \cos\theta_T} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\Gamma_p = \frac{n_I \cos\theta_T - n_T \cos\theta_I}{n_I \cos\theta_T + n_T \cos\theta_I} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0}$$

c) Componente n: $P_R^n = |\Gamma_n|^2 P_I^n = \left|\dfrac{1}{2}\right|^2 \cdot \dfrac{P_I}{2} = \dfrac{1}{8} P_I$

Componente p: $P_R^p = |\Gamma_p|^2 P_I^p = 0 \cdot \dfrac{P_I}{2} = 0$

Potência refletida: $P_R = P_R^p + P_R^n = \dfrac{1}{8} P_I \Rightarrow \boxed{\dfrac{P_R}{P_I} = \dfrac{1}{8}}$

2) [5,0] Considere dois dipolos oscilantes, com amplitudes $\vec{p}_1 = p_o cos(\omega t)\hat{x}$ e $\vec{p}_2 = p_o sen(\omega t)\hat{y}$, situados na origem.

a) Qual o campo elétrico gerado por estes dipolos oscilantes ao longo dos eixos x, y, z?

b) Quais as polarizações dos campos no eixo z, e no plano xy.

c) Qual a razão entre as intensidades ao longo dos eixos x e y, para uma mesma distância à origem? E ao longo dos eixos x e z, para uma mesma distância à origem?

Dado: Campo elétrico de um dipolo $\vec{p} = p_o \cos(\omega t + \varphi)\hat{z}$, orientado no eixo z, em coordenadas esféricas (onde θ é o ângulo entre o eixo do dipolo e a direção $\vec{r}$).

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_o \omega^2}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} \cos(kr - \omega t - \varphi)\hat{\theta}$$

Intensidade do campo propagante: $I = \langle|\vec{S}|\rangle$, com o módulo do vetor de Poynting $|\vec{S}| = c\varepsilon|\vec{E}|^2$.

2) O campo de um único dipolo orientado na direção $\hat{z}$ é dado por

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \frac{\text{sen}\,\theta}{r} \cos(kx - \omega t)\,\hat{\theta} \; ; \; E_0 = \frac{-\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}$$

Neste caso, ao longo do eixo z, $x = y = 0$ e

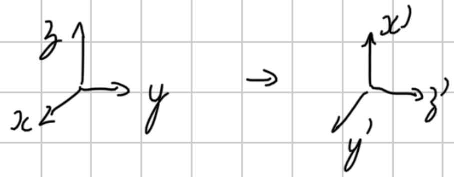
$$\vec{E}(0,0,z,t) = E_0 \frac{\text{sen}\,0}{z} \cos(kz - \omega t)\,\hat{\theta} = 0 \; ;$$

e para os demais eixos

$$\vec{E}(0,y,0,t) = E_0 \frac{\overset{1}{\cancel{\text{sen}\,90^\circ}}}{y} \cos(ky - \omega t)\,\hat{z} = \frac{E_0}{y} \cos(ky - \omega t)\,\hat{z}$$

$$\vec{E}(x,0,0,t) = \frac{E_0}{x} \cos(kx - \omega t)\,\hat{z}$$

Para o dipolo $\vec{p}_1$, trocamos $\hat{z} \to \hat{x}$, $\hat{x} \to \hat{y}$, $\hat{y} \to \hat{z}$

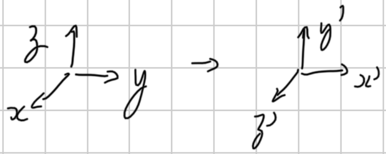


$$\vec{E}_1(0,0,z,t) = \frac{E_0}{z} \cos(kz - \omega t)\,\hat{x}$$

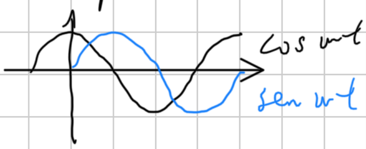
$$\vec{E}_1(0,y,0,t) = \frac{E_0}{y} \cos(ky - \omega t)\,\hat{x}$$

$$\vec{E}_1(x,0,0,t) = 0$$

Para o dipolo $\vec{p}_2$, trocamos $\hat{z} \to \hat{y}$, $\hat{x} \to \hat{z}$, $\hat{y} \to \hat{x}$



e atentamos para a fase do dipolo: $\text{sen}(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$



$$\Rightarrow \omega t \to \omega t - \pi/2$$
$$-\omega t \to -\omega t + \pi/2$$

Com estas trocas, temos

$$\vec{E}_2(0,0,z,t) = \frac{E_0}{z}\cos(kz - \omega t + \pi/2)\,\hat{y} = \frac{E_0}{z}\,\text{sen}(\omega t - k_z)\,\hat{y}$$

$$\vec{E}_2(0,y,0,t) = 0$$

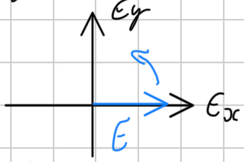
$$\vec{E}_2(x,0,0,t) = \frac{E_0}{x}\cos(kx - \omega t + \pi/2)\,\hat{y} = \frac{E_0}{x}\,\text{sen}(\omega t - k_z)\,\hat{y}$$

Assim, com $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$\begin{cases} \vec{E}(0,0,z,t) = \dfrac{E_0}{z}\left[\cos(\omega t - kz)\,\hat{x} + \text{sen}(\omega t + kz)\,\hat{y}\right] \\ \vec{E}(0,y,0,t) = \dfrac{E_0}{y}\cos(\omega t - ky)\,\hat{x} \\ \vec{E}(x,0,0,t) = \dfrac{E_0}{x}\,\text{sen}(\omega t - kx)\,\hat{y} \end{cases}$$

Onde usamos: $-\text{sen}\,\varphi = \text{sen}(-\varphi)$, $\cos(\varphi + \pi/2) = -\text{sen}\,\varphi$

b) No eixo z, temos duas polarizações ortogonais em quadratura $\Rightarrow$



Visto do eixo z para a origem, temos o campo $\vec{E}$ girando no sentido anti-horário: polarização circular destra.

No plano xy, vemos os dois dipolos combinados no plano horizontal. A polarização é linear, no plano, necessariamente ortogonal ao eixo de propagação

c) Tomando a mesma distância para os 3 eixos:

$$I(0,0,z,t) = \frac{c\varepsilon E_0^2}{z^2} \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - kz) + \text{sen}^2(\omega t - kz) \rangle}_{=1}$$

$$I(0,0,z,t) = c\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{z^2}$$

$$I(0,y,0,t) = c\varepsilon \frac{E_0^2}{y^2} \langle \cos^2(\omega t - ky) \rangle = c\varepsilon \frac{E_0^2}{y^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$I(x,0,0,t) = c\varepsilon \frac{E_0^2}{x^2} \langle \text{sen}^2(\omega t - kx) \rangle = c\varepsilon \frac{E_0^2}{x^2} \frac{1}{2}$$

Assim $\dfrac{I(a,0,0,t)}{I(0,a,0,t)} = 1$; $\dfrac{I(a,0,0,t)}{I(0,0,a,t)} = \dfrac{1}{2}$