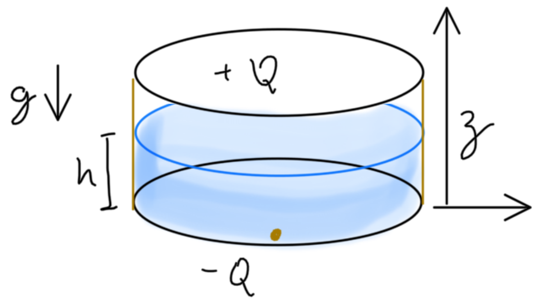
Prova 1 Substitutiva - 4302303 - Eletromagnetismo I - 13/07/2023

1) [5,0] Um capacitor de placas paralelas de área A, separadas por uma distância d, carregado com um a carga Q, contém em seu interior um líquido isolante, de permissividade ε e densidade η. O líquido pode escoar por um furo na parte inferior do capacitor. No entanto, ele permanece em equilíbrio, com uma altura h no interior do capacitor. Considerando a permissividade do vácuo ε_0, responda:



a) Qual o valor do vetor deslocamento $\vec{D}(z)$, do campo elétrico $\vec{E}(z)$ e do potencial $V(z)$ na região entre as placas do capacitor?

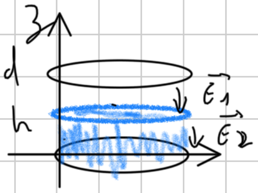
b) Qual a capacitância total do capacitor, considerando a fração líquida e a fração preenchida com ar?

c) Qual a energia elétrica armazenada no capacitor?

d) Qual a força exercida pelo campo no dielétrico, que leva à condição de equilíbrio?

e) Qual a altura h da coluna, em função dos parâmetros do problema e da aceleração gravitacional g?

1 a) $\vec{D} = -\frac{Q}{A}\hat{z}$; $\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = -\frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{z}$; $\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = -\frac{Q}{\varepsilon A}\hat{z}$



$$V(z)-V(0) = \int_0^z -\vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{\varepsilon A} z \qquad 0<z\leq h$$

$$z>h \Rightarrow V(z)-V(h)+[V(h)-V(0)] = -\int_h^z \vec{E}_1\, d\vec{l} - \int_0^z \vec{E}_2\, d\vec{l}$$

$$V(z)-V(0) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}(z-h) + \frac{Q}{\varepsilon A} \qquad h\leq z<d$$

b) $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V(d)-V(0)} = \left(\frac{d-h}{\varepsilon_0 A} + \frac{h}{\varepsilon A}\right)^{-1} = A\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon(d-h)+h\varepsilon_0}$

c) $U = \frac{Q\cdot V}{2} = \frac{Q^2}{2A}\left(\frac{d\varepsilon - h(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon_0\varepsilon}\right)$

d) $F_z = -\frac{dU}{dh} = \frac{Q^2}{2A}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon}$

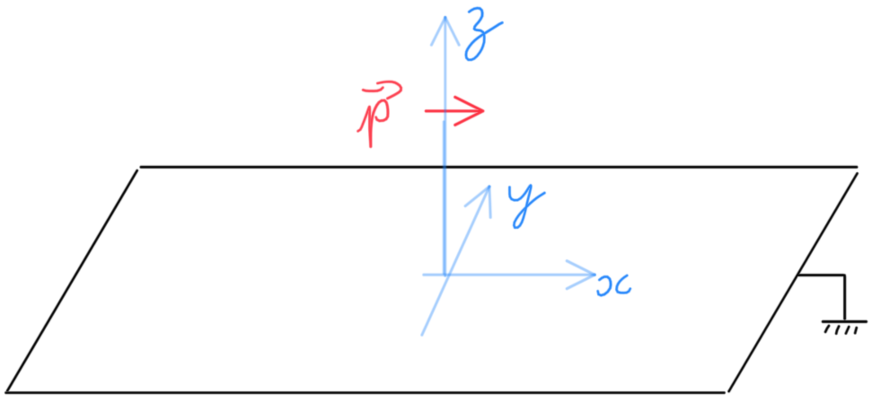
e) $F_z = P \Rightarrow \frac{Q}{2A}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon} = m\cdot g$; $m = \eta\cdot h\cdot A$

$$\therefore h = \frac{Q}{2\eta g A^2}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon\cdot\varepsilon_0}$$

2)[5,0] Um dipolo elétrico $\vec{p} = p\hat{x}$ está situado a uma altura d de uma superfície condutora mantida em potencial nulo.

a) Qual é o potencial $V(x, y, z)$ na região superior do plano?

b) Qual é o campo elétrico $\vec{E}(x, y, 0)$ na superfície do plano?



Dado: potencial de dipolo

$$V(\vec{r'}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r'}}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}$$

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ $\qquad$ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\qquad$ $\vec{E} = -\nabla V$

Densidade de energia: $u_E = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$

Energia no capacitor $U = \frac{C \cdot V}{2}$

Capacitância: $C = Q \cdot V$

2 a) Dipolo : $V_1(\vec{r_1}) = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{r_1}}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}$

$$\vec{r_1} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (z-d)\,\hat{z} \qquad \vec{p} = p \cdot \hat{x}$$

$$\therefore\ V_1(\vec{r_1}) = \frac{p x}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}}$$

Imagem : $\vec{p} \to \vec{p_I}$

$$V_2(\vec{r_2}) = \frac{\vec{p_I} \cdot \vec{r_2}}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}$$

$$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + (z+d)\,\hat{z} \qquad \vec{p} = -p \cdot \hat{x}$$

$$V_2(\vec{r_2}) = \frac{-p x}{4\pi} \frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}$$

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r_1}) + V_2(\vec{r_2}) = \frac{p x}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} \right\}$$

b) Campo na superfície condutora →

apenas componente normal

$$\vec{E}(x,y,0) = E_z(x,y)\,\hat{z}$$

$$E_z = -\frac{d}{dz} V \qquad \Bigg/ \quad \frac{d}{dz} \frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} = -\frac{3}{2} \frac{2(z-d)}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{5/2}}$$

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}} = -\frac{3}{2} \frac{2(z+d)}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{5/2}}$$

$$\therefore\ \vec{E}(x,y,0) = \frac{3 p x}{2\pi\varepsilon_0} \frac{d}{[x^2+y^2+d^2]^{5/2}}\,\hat{z}$$