Prática 6: <u>Sistema massa-mola</u>: Lei de Hooke, movimento sem atrito e sua energia cinética e potencial, movimento com atrito viscoso.

Anexe a folha com as tabelas de dados que você recebeu à frente do seu relatório, que deve ser manuscrito em papel almaço. Cada parte do relatório deve ser precedida de uma pequena seção com um esboço simples ilustrando o experimento de onde os dados vieram e quais os princípios físicos (equações principais) que baseiam as análises. (Bem simplificado: uma figura e algumas sentenças – não é pra fazer longas introduções teóricas). As tabelas de dados devem ser desenhadas com régua e os dados devem ser colocados em colunas com unidades, incertezas e algarismos significativos corretos. Não faça rascunhos, apresente todas as contas feitas. Não tem problema rasurar. Os gráficos pedidos devem ser feitos ocupando cada um uma folha inteira de papel e seguindo todas as instruções prévias de como confeccionar bons gráficos (vasto material no moodle da disciplina). A discussão dos resultados deve ser feita à medida em que os resultados forem obtidos. Não precisa repetir tudo em uma seção de conclusão. Considere g = constante = 9,78000000000 m/s² quando for necessário. A massa do carrinho ligado à mola é **m = (181,30 ± 0,01) g**. A constante de mola tem um valor individual para cada estudante, a ser determinado na 1ª parte da prática.

<u>1ª Parte: Determinação da constante K da mola</u>

Lei de Hooke → força produzida por uma mola → $\vec{F}=-K\,.\vec{\Delta x}$, onde $\vec{F}$ é o vetor força (em unidades de N), $\vec{\Delta x}$ é o vetor deslocamento em relação á posição de equilíbrio da mola (em unidades de m), K é a constante de mola (em unidades de N/m) e o sinal negativo indica que a força é sempre contrária ao deslocamento → força restauradora. Para cada massa m o valor de F = mg.

Todos os dados das suas tabelas foram obtidos usando uma mesma mola de constante K desconhecida. Para determinar o valor de K, foi feito um experimento onde diferentes massas foram penduradas à mola e anotados os deslocamentos observados (conforme demostrado no laboratório)→ dados da tabela 1.

Você deve reproduzir a Tab.1 em seu relatório e fazer um gráfico em papel milimetrado de m vs Δx. Ajuste manualmente uma reta a este gráfico e obtenha graficamente estimativas dos valores dos coeficientes linear e angular deste gráfico (não precisa calcular as incertezas graficamente, mas não esqueça as unidades dos coeficientes). Seu gráfico deve ficar parecido com o esboçado na Figura 1.

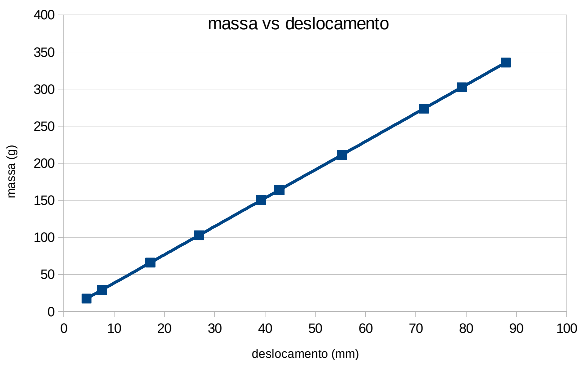

Fig. 1 - esboço de como deve parecer o gráfico de m vs Δx, e a reta ajustada manualmente.

Mostre, a partir da lei de Hooke, que ao ajustar uma reta média m = $\boldsymbol{a}$.Δx + $\boldsymbol{b}$ aos dados do experimento, o parâmetro $\boldsymbol{a}$ = K/g e o parâmetro $\boldsymbol{b}$ deve ser nulo. Usando um aplicativo de ajuste de mínimos quadrados ajuste aos dados da tabela: m = $\boldsymbol{a}$.Δx + $\boldsymbol{b}$, reproduza em seu relatório os valores de a, b, suas incertezas com unidades e significativos corretos. Compare os valores obtidos no app com os valores obtidos graficamente. São equivalentes?

Calcule o valor de K e sua incerteza a partir do ajuste de reta do app e adote este valor de K para todo o resto do relatório. Indique explicitamente o valor K ± ΔK em unidades de N/m com significativos corretos. (Dica: o valor de K obtido deve estar entre 1,5 e 3,0 N/m).

2ª Parte: Sistema massa-mola sem atrito

Lei de Hooke na direção x → F = - K.x. Na ausência de atrito → $F_{resultante} = F_{mola}$.

$$2^a \text{ Lei de Newton} \rightarrow \quad m\frac{d^2}{dt^2}x(t)=F_{res} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t)=-\frac{K}{m}x(t) \quad . \qquad (1)$$

A expressão (1) é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) que diz: derivando duas vezes a função x(t) no tempo obtemos a própria função x(t) multiplicada por uma constante negativa. A solução é do tipo: $x(t)=X_{max}\cos(\omega_0 t)$, com $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$. (2)

No experimento 2, colocamos um sistema massa-mola sobre um trilho de ar horizontal sem atrito e colocamos para oscilar (conforme demonstrado no laboratório e no vídeo de exemplo postado no moodle). Usamos uma câmera de celular para filmar a oscilação e, usando um video-player com avanço quadro-a-quadro (uma imagem a cada 1/60 s), registramos as posições observadas em comparação com uma trena gravada junto com o carrinho com passos de 0,1 s (a cada 6 quadros). Estes são os dados apresentados na Tabela 2. O valor de x é medido em relação à posição de equilíbrio da mola (x=0). A tabela contém 21 valores (i = 1, 2, 3, … , 21). Você deve organizar estes dados em uma nova tabela com 8 colunas verticais: i, t, x, v, 4x, Ep, Ec, Em. As colunas **t** e **x** são os dados recebidos na Tabela 2 e **i** é o indice dos dados de 1 a 21, conforme explicado. A coluna **v** é a velocidade (em unidades de mm/s), e deve ser calculada ponto a ponto, usando a expressão: $v_i=\frac{x_{1+1}-x_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}}=\frac{x_{1+1}-x_{i-1}}{0{,}2\,s}$. Para saber quantos significativos serão usados para colocar os valores de v na tabela, você deve propagar as incertezas de x para v. Não esqueça de colocar as unidades e indicar a incerteza dos valores de v na sua tabela. Na coluna 4x você deve simplesmente colocar os valores de x multiplicados por 4, mantendo o mesmo num de significativos de x (não esqueça de propagar a incerteza de x para 4x e indicar isso na tabela).

Em uma mesma folha de papel milimetrado você deve fazer os gráficos de (4x vs t) e de (v vs t) na mesma escala (4x em unidades de mm e v em unidades de mm/s). A necessidade de multiplicar x por 4 é para as oscilações de x e v ficarem do mesmo tamanho no gráfico. Seu gráfico deve ficar com uma aparência similar à Figura 2.

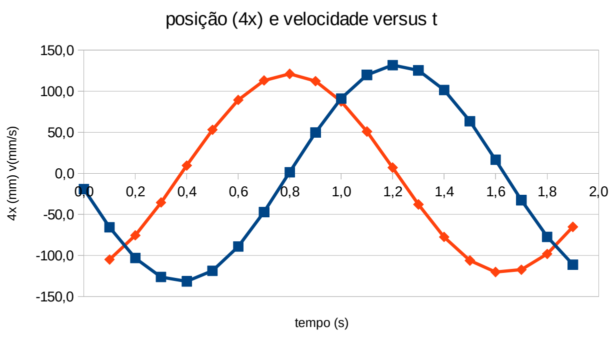

Figura 2 – posição (azul) e velocidade (vermelho) do sistema massa-mola.

Como os dados foram coletados a partir de um momento inicial aleatório, seu gráfico não precisa ser exatamente igual à Figura 2 (a fase inicial da oscilação pode ser qualquer), mas deve ter um pouco mais de uma oscilação completa. Interprete estes gráficos baseando-se no que sabe sobre o movimento do sistema massa-mola (quais as posições que correspondem aos máximos e minimos da velocidade). Lembre-se que v=dx/dt. Assim, se x(t) = cos() → v(t) ~ - sen(). Você verifica isso no seu gráfico de x e v versus t???

A energia potencial elástica do sistema é $E_p = \frac{1}{2} K x^2$, e a energia cinética $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Calcule os valores $E_p(t_i) = \frac{1}{2} K.(x_i)^2$ e $E_c(t_i) = \frac{1}{2} m.(v_i)^2$ e preencha as colunas correspondentes da sua tabela. Não precisa propagar as incertezas, mas obedeça as regras de algarismos significativos. Calcule as duas energias em unidades de 10^{-6} Joules. Na última coluna de sua tabela você deve colocar os valores da energia mecânica $E_m = E_p + E_c$ (basta somar Ep e Ec ponto a ponto!), também em unidades de 10^{-6} J.

Em uma mesma folha de papel milimetrado você deve fazer os gráficos de (E_p, E_c e E_m) versus t, usando a mesma escala para todos. O seu gráfico final deve ficar parecido com o esboço mostrado na Figura 3.

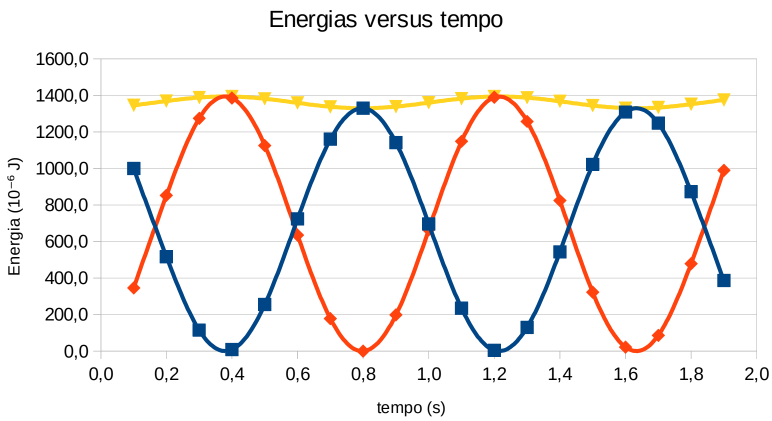

Figura 3 – Sistema massa-mola sem atrito – Energias versus tempo.
Ep em vermelho, Ec em azul e Em = (Ep + Ec) em amarelo.

Novamente a fase inicial das oscilações deste esboço é aleatória quando comparada ao seu gráfico, mas o seu gráfico também deve apresentar mais de duas oscilações de E_p e de E_c. Você sabe explicar porque no mesmo intervalo de tempo x e v apresentam uma oscilação completa enquanto E_c e E_p apresentam duas? O que mais você pode dizer observando seu gráfico? Qual a relação entre as fases de E_p e de E_c? E qual a relação entre os valores máximos que E_p e E_c atingem? E o que você pode dizer sobre E_m? Se não existir nenhuma força externa a E_m deveria ser uma constante... E_m se conserva no tempo neste MHS? Lembre-se que nossa análise simplificou bastante o cálculo de v, usando um intervalo de 0,2s, o que é bem grande quando comparado com um intervalo tendendo a zero, como a definição de derivada verdadeira… isso faz com que nossa velocidade não seja exatamente igual a velocidade instantânea, mas esteja perto dela… como você acha que isso pode afetar o cálculo de E_c??? E o de E_m???

<u>3ª Parte: Sistema massa-mola com atrito viscoso</u>

Repetimos o experimento descrito na 2ª parte do roteiro, mas agora fixamos um pedaço de isopor sobre o carrinho, de modo a adicionar ao sistema uma força de atrito viscoso (proporcional à velocidade). Neste caso a 2ª Lei de Newton fica:

$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F_{res} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -K x(t) - b v(t)$, onde b é o coeficiente de atrito viscoso, dado em Ns/m. Isso leva à EDO: $\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{K}{m} x(t) - \frac{b}{m} \frac{d}{dt} x(t)$ (3).

A EDO dada por (3) é mais complicada de resolver que a EDO dada em (1). Mas, suprimindo alguns detalhes, uma das soluções possíveis (amortecimento subcrítico) também tem

uma componente oscilante, mas agora ela é multiplicada por um termo que decai exponencialmente. Essa solução de (3) tem o formato: $x(t)=X_0 \exp(-\gamma t)\cos(\omega' t)$, onde γ tem unidades de s^{-1}.
Se considerarmos apenas os pontos em que x(t) atinge os valores máximos (cos()=+1), temos a expressão:

$$x_{máx}(t_i)=X_0 \exp(-\gamma t_i) \qquad (4).$$

Assim, pudemos analisar as imagens no vídeo do experimento., observando o movimento quadro-a-quadro, e anotamos os valores da amplitude da oscilação e os instantes de tempo em que ocorreram dez valores sequenciais de máximos da oscilação. Estes dados estão na Tabela 3, fornecida para a análise individual.

Se aplicarmos log aos dois lados de (4) obtemos:

$\log(x_{máx}) = \log(x_0 \exp(-\gamma t)) = \log(x_0) + \log(\exp(-\gamma t)) \rightarrow$

$\log(x_{máx}) = \log(x_0) - \gamma.\log(e) . t$

Se fizermos um gráfico de $Y=\log(x_{máx})$ versus X=t temos uma reta: Y = A.X + B, com o coeficiente angular $A= -\gamma.\log(e)$ e o coeficiente linear $B = \log(x_0)$. Isso é um gráfico conhecido como monolog.

Copie a Tabela 3 de dados no seu relatório, faça um gráfico, em papel monolog, de $x_{máx}$ vs tempo e ajuste manualmente uma reta média aos seus pontos. Você vai precisar de uma folha de papel mololog com 2 décadas em Y. Seu gráfico deve ficar parecido com o mostrado na Figura 4. A partir da sua reta ajustada manualmente, obtenha uma estimativa para o valor de γ. Não esqueça das unidades.

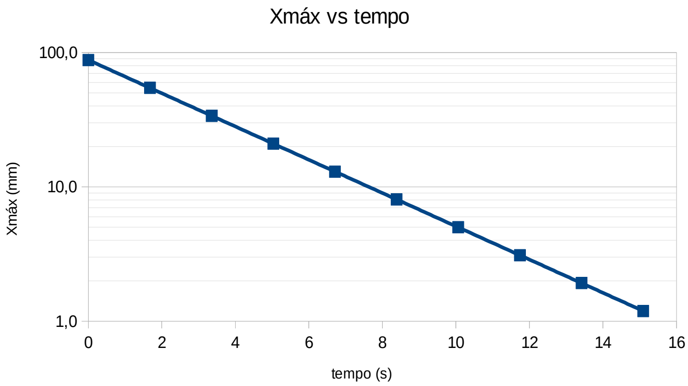

Figura 4 – Massa-mola com atrito viscoso: amplitude máxima versus tempo em escala monolog.

Se ao invés de aplicarmos a função log() aos dois lados de (4), aplicarmos a função ln() obtemos: $\ln(x_{máx}) = -\gamma t + \ln(x_0)$. Acrescente mais uma coluna à sua tabela e coloque nesta coluna os valores de $\ln(x_{máx})$. Não precisa propagar a incerteza. Coloque os valores de ln() em sua tabela com 3 casas decimais. Usando um aplicativo de ajuste baseado em mínimos quadrados ajuste a reta: $\ln(x_{máx}) = At + B$ e obtenha o valor dos parâmetros A e B e suas incertezas. Transcreva os valores obtidos no app para o seu relatório e coloque as unidades e os significativos corretamente. Qual o valor de γ e sua incerteza obtido pelo app. Compare estes valores do app com o seu valor de γ obtido graficamente. São equivalentes?

Se a amplitude da oscilação decai exponencialmente com uma constante de decaimento γ o que você pode afirmar sobre o que deve acontecer com a energia mecânica E_m com o passar do tempo no sistema massa-mola com atrito viscoso? (Dica: veja como você fez para calcular a E_p a partir de x na parte 2)

Bom trabalho!