Álgebra Linear para Engenharia II
Aula 20
Prof. Pedro L. Fagundes

Exercícios

Exercícios

1) No R^4 com o produto interno usual, considere o subespaço $W = [(1,1,0,0),(0,1,-1,1)]$.

i) Determine bases ortonormais B e F para W e $W^{\perp}$, respectivamente.

ii) Sendo $T: R^4 \rightarrow R^4$, dado por $T(v) = proj_W v$, determine a matriz de T em relação à base $B \cup F$.

iii) Quais são os autovalores de T? É T diagonalizável?

Exercícios

$W = [(1,1,0,0),(0,1,-1,1)]$.

i) Determine bases ortonormais $B \; e \; F$ para $W \; e \; W^{\perp}$, respectivamente.

$$< (1,1,0,0),(0,1,-1,1) > = 1 \neq 0$$

Tome $u = (1,1,0,0)$ e seja $v = (0,1,-1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) =$

$= \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,1\right)$, $\|u\| = \sqrt{2} \; e \; \|v\| = \sqrt{\frac{5}{2}}$, logo seja.

$B = \left\{e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), e_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,1\right)\right\}$

Exercícios

$W^{\perp}$

$$\begin{cases} <(x,y,z,w),(1,1,0,0)> = x+y=0 \\ <(x,y,z,w),(0,1,-1,1)> = y-z+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=w-x \end{cases}$$

$$W^{\perp} = [(1,-1,-1,0),(0,0,1,1)]$$

$$<(1,-1,-1,0),(0,0,1,1)> = -1 \neq 0$$

Tome $u=(1,-1,-1,0)$ e seja $v=(0,0,1,1)+\frac{1}{3}(1,-1,-1,0)=$

$=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$, $\|u\|=\sqrt{3}$ e $\|v\|=\sqrt{\frac{5}{3}}$, logo seja.

$$F=\left\{e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1,0), e_4=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)\right\}$$

Exercícios

ii) Sendo $T: R^4 \rightarrow R^4$, dado por $T(v) = proj_w v$, determine a matriz de T em relação à base $B \cup F$.

$\boldsymbol{E = B \cup F = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}}$

$\boldsymbol{T(e_1) = e_1 = (1, 0, 0, 0)_E}$, **pois** $\boldsymbol{e_1 \in W\ e\ proj_W e_1 = e_1}$

$\boldsymbol{T(e_2) = e_2 = (0, 1, 0, 0)_E}$, **pois** $\boldsymbol{e_2 \in W\ e\ proj_W e_2 = e_2}$

$\boldsymbol{T(e_3) = \vec{0} = (0, 0, 0, 0)_E}$, **pois** $\boldsymbol{e_3 \in W^{\perp}\ e\ proj_W e_3 = \vec{0}}$

$\boldsymbol{T(e_4) = \vec{0} = (0, 0, 0, 0)_E}$, **pois** $\boldsymbol{e_4 \in W^{\perp}\ e\ proj_W e_4 = \vec{0}}$

Exercícios

Assim temos:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii) Quais são os autovalores de T? É T diagonalizável?

Os autovalores de T são $1\ e\ 0$ ambos com multiplicidade algébrica 2.

É diagonalizável, pois $[T]_E$ é uma matriz diagonal.

Exercícios

4) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, W um subespaço de V e $T: V \to V$ o operador linear definido por $T(v) = proj_W v$.

i) Mostre que $T^2 = T$

ii) Mostre que $KerT = W^{\perp}$ e $Im(T) = W$

Exercícios

iii) Mostre que existe uma base ortonormal B tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Onde a quantidade de 1´s na diagonal é igual a dimensão de W

iv) Mostre que T é simétrico.

Exercícios

Sol.

i) Mostre que $T^2 = T$.

Dado $v \in V$, lembremos que, $proj_W v \in W$ e que se $u \in W$, então $proj_W u = u$, logo seja $proj_W v = x$,

$$T^2(v) = T\big(T(v)\big) = T(proj_W v) = T(x) =$$

$$= proj_W x = x = proj_W v = T(v)$$

Exercícios

ii) Mostre que $\boldsymbol{KerT = W^{\perp}}$ e $\boldsymbol{Im(T) = W}$

Dado $\boldsymbol{v \in V}$, como $\boldsymbol{proj_W v \in W}$, temos que $\boldsymbol{Im(T) \subseteq W}$, por outro lado, se $\boldsymbol{u \in W}$ $\boldsymbol{u = proj_W u}$, logo $\boldsymbol{W \subseteq Im(T)}$.

Pela definição de projeção ortogonal temos que:

$$\boldsymbol{u = proj_W v \Leftrightarrow v - u \in W^{\perp}}$$

Logo,

$$\boldsymbol{v \in KerT \Leftrightarrow T(v) = \vec{0} \Leftrightarrow proj_W v = \vec{0} \Leftrightarrow v \in W^{\perp}}$$

Exercícios

iii) Mostre que existe uma base ortonormal B tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Sejam $F = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ uma base ortonormal para W e $E = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ uma base ortonormal para $W^\perp$.

Como $V = W \oplus W^\perp$, temos que $k + r = n = dimV$, além disso, $w_i \perp u_j$ para todo i e todo j. Seja $B = F \cup E$

Exercícios

Assim $B = \{w_1, w_2, \dots, w_k, u_1, u_2, \dots, u_r\}$ é ortonormal e,

$$T(w_1) = w_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)_B,\ T(w_2) = w_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)_B$$

$$T(w_i) = w_i = (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)_B;\ i = 1, 2, \dots, k$$

$$T(u_1) = \vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)_B,\ T(u_2) = \vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)_B$$

$$T(u_j) = \vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)_B;\ j = 1, 2, \dots, r$$

Logo

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios

iv) Mostre que T é simétrico.

Como provado em iii) T tem uma matriz diagonal (e portanto simétrica) na base B que é ortonormal, logo T é simétrico.

Exercícios

17) Seja E um espaço vetorial com o produto interno e T um operador linear simétrico de E.

Considere as afirmações:

I) Se B é uma base ortogonal de E, então $[T]_B$ é simétrica.

II) Se α e β são autovalores distintos de T, E e F são conjuntos ortogonais de vetores de T com $E \subset V(\alpha)$ e $F \subset V(\beta)$, então $E \cup F$ é ortogonal.

III) Se B é uma base de E tal que $[T]_B$ é diagonal, então B é ortonormal.

Exercícios

I) Se B é uma base ortogonal de E, então $[T]_B$ é simétrica.

Falso, a base tem que ser ortonormal.

II) Se α e β são autovalores distintos de T, E e F são conjuntos ortogonais de vetores de T com $E \subset V(\alpha)$ e $F \subset V(\beta)$, então $E \cup F$ é ortogonal.

Verdadeiro, autovetores de um operador simétrico associados a autovalores distintos são sempre ortogonais.

Dessa forma dados um vetor de E e um de F eles já são ortogonais, como E e F são ortogonais $E \cup F$ é ortogonal

Exercícios

III) Se B é uma base de E tal que $[T]_B$ é diagonal, então B é ortonormal.

Falso, a base pode até não ser ortogonal.

Exercícios

P2020) Considere as bases $B = \{1 + x, 1 - x^2, 2x + x^2\}$ e $C = \{(1,0,1,1), (0,1,2,3), (1,-1,1,1), (0,0,2,1)\}$ de $P_2(R)$ e R^4. Sejam $a \in R$ e $T: P_2(R) \to R^4$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

T é injetora se, e só se:

Sol. Vamos calcular $KerT$.

Exercícios

Seja $u = (x, y, z)_B \in KerT$, então $T(u) = \vec{0}$.

$$[T(u)]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Da 1ª equação temos $z = -x$, substituindo nas demais,

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = (1-a)x \end{cases}$$

Exercícios

Logo,

$$x = (1-a)x \Leftrightarrow x = x - ax \Leftrightarrow ax = 0$$

Se $a = 0$, x pode assumir qualquer valor real, e neste caso $KerT = \{(x, x, -x)_B, x \in R\} = [(1, 1, -1)_B]$ e T não é injetora.

Se $a \neq 0$, $x = 0$ e assim $KerT = \{(0, 0, 0)_B\} = \{\vec{0}\}$ e T é injetora.

Alternativa correta, $a \neq 0$

Exercícios

P2020) Seja $T: R^3 \to R^3$ um operador linear cuja matriz, em relação à base canônica de R^3, é simétrica e cujo polinômio característico é $p(t) = -t(t+1)^2$. Sabendo que $(1,0,1) \in KerT$, é correto afirmar que $T(1,2,3)$ é igual a:

Sol. Como a base canônica é ortonormal, temos que T é um operador simétrico.

$V(0) = [(1,0,1)]$ e $V(-1) = V(0)^{\perp}$.

Suponha que $(x,y,z) \in V(-1)$, então

$$< (x,y,z),(1,0,1) > = 0 \Leftrightarrow x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$$

Exercícios

Logo $V(-1) = \{(x, y, -x), x, y \in R\} = [(1,0,-1),(0,1,0)]$

Assim $B = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,0)\}$ é uma base para R^3 na qual conhecemos T.

$$(1,2,3) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \gamma = 2 \\ \alpha - \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$T(1,2,3) = 2T(1,0,1) - T(1,0,-1) + 2T(0,1,0) =$$

$$= -(-1,0,1) + 2(0,-1,0) = (1,-2,-1)$$

Exercícios

18) Seja V um espaço vetorial com o produto interno, T e S operadores lineares. Considere as afirmações:

I) Se T e S são simétricos, então $T + S$ é diagonalizável.

II) Se T é simétrico e invertível, então T^{-1} também é simétrico.

III) T é invertível se, e só se, 0 não é um autovalor de T.

Exercícios

I) Se T e S são simétricos, então $T+S$ é diagonalizável.

Verdadeira.

Seja B uma base ortonormal de V, como T e S são simétricos, $[T]_B$ e $[S]_B$, são simétricas assim,

$$[T+S]_B = [T]_B + [S]_B$$

Que será simétrica, pois é soma de duas matrizes simétrica, logo $T+S$ é simétrico e, portanto, diagonalizável

Exercícios

II) Se T é simétrico e invertível, então T^{-1} também é simétrico.

Verdadeira.

Se A é simétrica e invertível, então A^{-1} é simétrica pois,

$$\left(A^{-1}\right)^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$$

Logo se B é uma base ortonormal de V, temos $[T]_B$ é simétrica e $\left[T^{-1}\right]_B = [T]_B{}^{-1}$

Exercícios

III) T é invertível se, e só se, 0 não é um autovalor de T.

Verdadeira.

Suponha T invertível, então T é injetora e, portanto, $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, logo 0 não é autovalor de T.

Suponha agora que 0 não é autovalor de T, então $Ker(T) = \{\vec{0}\}$ e portanto T é um operador linear injetor de V, que possui dimensão finita, assim T também é sobrejetor, logo invertível.

Exercícios

19) A respeito das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercícios

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

É diagonalizável, pois é simétrica.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$p_B(t) = (2-t).(3-t).(t^2+2)$ **que possui raízes não reais, logo não é diagonalizável**

Exercícios

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$p_C(t) = (2-t)(-1-t)((2-t)^2-1)$, cujas raízes são todas reais e distintas $\{2, -1, 1, 3\}$, logo diagonalizável.

Exercícios

20) Considere R^3 com o produto interno dado por:

$$< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) > =$$
$$= 3x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 + 2z_1z_2$$

Se T é um operador linear simétrico com polinômio característico $p(t) = (2-t)(t-1)^2$ e $T(1,1,0) = (2,2,0)$, então $T(x,y,z) = ?$

Sol.

Temos que $V(2) = [(1,1,0)]$ e que $V(1) = V(2)^{\perp}$

Exercícios

Seja $u = (x, y, z) \in V(1)$, assim temos

$$< (x, y, z), (1, 1, 0) > = 3x + x + y + y = 0 \Rightarrow y = -2x$$

Assim $V(1) = [(1, -2, 0), (0, 0, 1)]$

$B = \{(1, 1, 0), (1, -2, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de R^3 na qual conhecemos T.

Vamos escrever (x, y, z) na base B.

Exercícios

$$(x, y, z) = a(1,1,0) + b(1,-2,0) + c(0,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = x \\ a - 2b = y \\ c = z \end{cases}$$

Das duas primeiras temos que $b = \frac{x-y}{3}$, substituindo na 1ª equação obtemos $a = \frac{2x+y}{3}$

Logo, $(x, y, z) = \frac{2x+y}{3}(1,1,0) + \frac{x-y}{3}(1,-2,0) + z(0,0,1)$

Exercícios

Assim,

$$T(x,y,z) = \frac{2x+y}{3}T(1,1,0) + \frac{x-y}{3}T(1,-2,0) + zT(0,0,1)$$

$$= \frac{2x+y}{3}(2,2,0) + \frac{x-y}{3}(1,-2,0) + z(0,0,1) =$$

$$= \left(\frac{5x+y}{3}, \frac{2x+4y}{3}, z\right)$$

Alternativa a)

Exercícios

46 L2) Verdadeiro ou falso? Justifique a resposta.

ii) Se $T: P_8(R) \to P_8(R)$ é definida por, $T(p) = p´$, então existe uma base B de $P_8(R)$ tal que $[T]_B$ é invertível.

iii) Se $T: R^3 \to M_2(R)$ é uma transformação linear injetora, então a matriz de T com relação a quaisquer bases de R^3 e $M_2(R)$ é invertível.

Exercícios

ii) Se $T: P_8(R) \to P_8(R)$ é definida por, $T(p) = p´$, então existe uma base B de $P_8(R)$ tal que $[T]_B$ é invertível.

Sol.

Falso, pois seja $p(t) = c, \mathbf{c} \neq 0$ o polinômio constante, então $T(p)(t) = p´(t) = 0$, logo $Ker(T) \neq \{\vec{0}\}$.

Assim T não é injetor e, portanto, não é invertível, logo a sua matriz em relação a qualquer base de $P_8(R)$ não será invertível.

Exercícios

iii) Se $T: R^3 \to M_2(R)$ é uma transformação linear injetora, então a matriz de T com relação a quaisquer bases de R^3 e $M_2(R)$ é invertível.

Falso, como $dim R^3 = 3 \neq 4 = dim M_2(R)$ não existe transformação linear invertível entre estes espaços.

Exercícios

48 L2) Seja $T: R^2 \to R^2$ um operador linear não nulo tal que $T^2 = 0$. Mostre que existe uma base B de R^2 tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. Seja $u \in R^2$ tal que $T(u) \neq \vec{0}$, seja $v = T(u)$.

O conjunto $\{u, v\}$ é LI.

De fato se fosse LD existiria um real α tal que $u = \alpha v$ e assim

$$v = T(u) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha T\big(T(u)\big) = \vec{0}$$

Exercícios

Logo o conjunto $B = \{u, v\}$ é uma base de R^2.

Vamos calcular $[T]_B$

$$T(u) = v = (0,1)_B$$

$$T(v) = T\big(T(u)\big) = \vec{0} = (0,0)_B$$

Logo

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Álgebra Linear para Engenharia II
Aula 20
Prof. Pedro L. Fagundes

Exercícios