AULA 19
Álgebra Linear para Engenharia II
Prof. Pedro L. Fagundes

Reconhecimento de Cônicas
e exercícios

Reconhecimento de Cônicas

Cônica:

Analiticamente são as raízes de um polinômio de grau dois em duas variáveis, ou seja, são as soluções da equação:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Onde, $a, b, c, d, e, f \in R$**.**

Esta equação é chamada equação geral da cônica.

Reconhecimento de Cônicas

Para reconhecer uma cônica, devemos encontrar a sua equação reduzida.

A equação de uma cônica esta em sua forma reduzida se:

1) Só possui coeficientes de 2º grau e o coeficiente constante, sendo nulo o coeficiente misto de 2º grau.

Ou

2) Se uma das variáveis possui coeficiente de 1º grau não nulo, então seu coeficiente de 2º grau é zero.

Reconhecimento de Cônicas

Ex.

1) $3x^2 + 4xy - 2x + y - 1 = 0$ **é uma cônica dada por sua equação geral.**

2) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ **é a equação reduzida de uma circunferência de centro na origem e raio** $r = 2$**.**

3) $x^2 - y^2 - 9 = 0$ **é a equação reduzida de uma hipérbole.**

4) $x^2 - 3y - 9 = 0$ **é a equação reduzida de uma parábola.**

Reconhecimento de Cônicas

Dada a equação geral de uma cônica, associamos a sua parcela de 2º grau, e um operador linear simétrico de R^2, cuja matriz em relação à base canônica é:

$$L(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Reconhecimento de Cônicas

Note que:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix} =$$

$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 = L(x,y).$$

Como a matriz A é diagonalizável, existe uma matriz ortogonal M tal que, $M^tAM = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D$

Chamando de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$**, temos que** $u^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

Reconhecimento de Cônicas

Fazendo a mudança de variável $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ a equação anterior se transforma em:

$$L(x, y) = u^t A u \Rightarrow L(x', y') = \left(M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^t A M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}^t M^t A M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha x'^2 + \beta y'^2$$

Reconhecimento de Cônicas

Encontre a equação reduzida das seguintes cônicas.

a) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

Reconhecimento de Cônicas

Encontre a equação reduzida das seguintes cônicas.

a) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 1 = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ p_A(t) = det\begin{pmatrix} 5-t & 2 \\ 2 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$= (5-t)(2-t) - 4 = t^2 - 7t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

Nas novas variáveis x' e y' **a equação da cônica é dada por,**

$6x'^2 + y'^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{\frac{1}{6}} + y'^2 = 1 \text{ (Elipse)}$$

Reconhecimento de Cônicas

b) $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.

O coeficiente em xy é zero, basta completar quadrados.

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

$$2y^2 - 4y = 2\left(y^2 - 2y\right) = 2\left((y-1)^2 - 1\right)$$

Substituindo na equação da cônica,

$$(x+1)^2 - 1 + 2(y-1)^2 - 2 + 3 = 0,$$

Reconhecimento de Cônicas

b) $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.

O coeficiente em xy é zero, basta completar quadrados.

$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$

$2y^2 - 4y = 2\left(y^2 - 2y\right) = 2\left((y-1)^2 - 1\right)$

Substituindo na equação da cônica,

$(x+1)^2 - 1 + 2(y-1)^2 - 2 + 3 = 0$, **seja** $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$ **temos**

$x'^2 + 2y'^2 = 0$ **(Um ponto).**

Reconhecimento de Cônicas

Vamos pegar uma equação completa.

c) $x^2 + 4xy + y^2 + x - y - 1 = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Reconhecimento de Cônicas

Vamos pegar uma equação completa.

c) $x^2 + 4xy + y^2 + x - y - 1 = 0.$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ p_A(t) = det\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (1-t)(1-t) - 4 = t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$$

$V(3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Reconhecimento de Cônicas

Logo $B = \{(1,1)\}$ é uma base para $V(3)$.

$V(-1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \end{cases} \Rightarrow y = -x$$

Logo $B = \{(1,-1)\}$ é uma base para $V(-1)$.

$\|(1,1)\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2}$, logo $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Nas novas variáveis x' e y' a parte de 2º grau da cônica fica, $3x'^2 - y'^2$ e a parte de 1º grau?

Reconhecimento de Cônicas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}.$$

$$x^2 + 4xy + y^2 + x - y - 1 = 0$$

Reconhecimento de Cônicas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}.$$

$$x - y - 1 =$$

Reconhecimento de Cônicas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}.$$

$$x - y - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') - 1$$

Reconhecimento de Cônicas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}.$$

$$x - y - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') - \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') - 1 = \sqrt{2}y' - 1.$$

A equação nas coordenadas x' e y' é:

$3x'^2 - y'^2 + \sqrt{2}y' - 1 = 0$, agora devemos completar quadrados na variável y'.

Reconhecimento de Cônicas

$-y'^2 + \sqrt{2}y'$

Reconhecimento de Cônicas

$$-y'^2 + \sqrt{2}y' = -\left(y'^2 - \sqrt{2}y'\right)$$

Reconhecimento de Cônicas

$$-y'^2+\sqrt{2}y'=-\left(y'^2-\sqrt{2}y'\right)=-\left(\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{2}{4}\right)$$

Voltando na equação da cônica, temos:

$$3x'^2-y'^2+\sqrt{2}y'-1=3x'^2-\left(\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$3x'^2-\left(y'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=0$, **Fazendo** $\begin{cases} x''=x' \\ y''=y'-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ **temos:**

Reconhecimento de Cônicas

$$3x''^2 - y''^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 6x''^2 - 2y''^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x''^2}{\frac{1}{6}} - \frac{y''^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

que é uma hipérbole.

Exercícios

2) Considere R^3 com o produto interno usual e seja $T: R^3 \to R^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - 2y, -2x + y, -z)$ então:

Sol. A base canônica de R^3 é ortonormal com o P.I. usual. $T(1,0,0) = (1,-2,0), T(0,1,0) = (-2,1,0)$ e

$T(0,0,1) = (0,0,-1)$, logo

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Que é simétrica, logo T é simétrico

Exercícios

6) No R^2 com o produto interno usual, considere a base $B = \{(-1,1),(1,2)\}$. seja T um operador linear cuja matriz em relação à B é

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera as afirmações:

I) T é simétrico

II) T não é diagonalizável

III) T é diagonalizável, mas não é simétrico

Exercícios

I) T é simétrico

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = \{(-1,1),(1,2)\}$ não é ortonormal, pois

$$< (-1,1),(1,2) > = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

Podemos mudar a matriz de T para a base canônica, ou verificar se T admite uma base ortogonal formada por autovetores.

Vamos calcular $[T]_{Can}$ usando $[T]_B$.

Exercícios

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \{(-1,1),(1,2)\}$$

$$(1,0) = -\frac{2}{3}(-1,1) + \frac{1}{3}(1,2),\ (0,1) = \frac{1}{3}(-1,1) + \frac{1}{3}(1,2)$$

$$[T(1,0)]_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1,0) = -3(-1,1) + (1,2) = (4,-1)$$

$$[T(0,1)]_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1) = (-1,1) + 0.(1,2) = (-1,1)$$

Exercícios

$$[T]_{Can} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo T é simétrico, pois a base canônica é ortonormal.

Apenas I) é verdadeira.

Vamos refazer usando a matriz da composta.

$$[T]_{Can} = [I]_{BCan}[T]_B[I]_{CanB}$$

$$[I]_{BCan} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [I]_{CanB} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios

$$[T]_{Can} = [I]_{BCan}[T]_B[I]_{CanB} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios

8) Considere R^4 com o produto interno usual e seja $T: R^4 \to R^4$ tal que:

i) 0s únicos autovalores de T são 2 e -2

ii) T é simétrico

iii) $V(2) = [(0,1,1,0),(0,0,0,1),(1,0,0,1)]$.

Então $T(3,-2,2,3)$ é:

Sol. Como T é simétrico, se u é um autovetor associado ao autovalor -2, então $u \in V(2)^{\perp}$

Exercícios

Supondo $u = (x, y, z, w)$ temos:

$$\begin{cases} < (x, y, z, w), (0,1,1,0) > = 0 \\ < (x, y, z, w), (0,0,0,1) > = 0 \\ < (x, y, z, w), (1,0,0,1) > = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ w = 0 \\ x + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Assim $V(-2) = [(0, 1, -1, 0)]$

Logo $B = \{(0,1,1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,1), (0,1.-1,0)\}$ é uma base para R^4, na qual sabemos calcular T.

Vamos escrever o vetor $v = (3, -2, 2, 3)$ na base B.

Exercícios

$$(3,-2,2,3)=\alpha(0,1,1,0)+\beta(0,0,0,1)+\gamma(1,0,0,1)+$$
$$+\delta(0,1.-1,0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=3\\ \alpha+\delta=-2\\ \alpha-\delta=2\\ \beta+\gamma=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=3\\ \delta=-2\end{cases}$$

$$T(3,-2,2,3)=3T(1,0,0,1)-2T(0,1,-1,0)=$$
$$=3(2,0,0,2)-2(0,-2,2,0)=(6,4,-4,6)$$

Alternativa c)

Exercícios

13) Sejam U um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto, $T: U \to U$ um operador linear, u e v autovetores de T associados a autovalores distintos α e β respectivamente.

Considere as afirmações:

I) Se $dimU = 3\ e\ dimV(\alpha) = 2$, então T é diagonalizável

II) Se T é simétrico, então $V(\alpha) = V(\beta)^{\perp}$

III) Se $< u, v > = 0$, então T é simétrico

Exercícios

I) Se $dimU = 3$ e $dimV(\alpha) = 2$, então T é diagonalizável

Verdadeiro, pois se $dimU = 3$ o polinômio característico p de T tem grau 3 e como $dimV(\alpha) = 2$, α é uma raiz de p com $m_a(\alpha) \geq 2$, como β também é autovalor de T e distinto de α, temos que $m_a(\beta) \geq 1$, assim

$$gr(p) = 3 \geq m_a(\alpha) + m_a(\beta) \geq 2 + 1 = 3$$

Logo $m_a(\beta) = 1 = m_g(\beta)$ e $m_a(\alpha) = 2 = m_g(\alpha)$

Portanto T é diagonalizável.

Exercícios

II) Se T é simétrico, então $V(\alpha) = V(\beta)^{\perp}$

Falso. Sendo T simétrico, $V(\alpha) \subseteq V(\beta)^{\perp}$, pois T pode possuir outros autovalores distintos de α e β.

III) Se $< u, v > = 0$, então T é simétrico.

Falso, T pode ter outros autovetores, associados a outros autovalores distintos de α e β e não ortogonais a u e a v, ou mesmo entre eles.

Exercícios

15) No R^3 com PI usual, seja T um operador linear simétrico cujos autovalores são -2 e 3. Sabendo que $Ker(I+2I) = [(1,1,1),(-1,0,1)]$, encontre $[T]_{Can}$.

Sol. Como T é simétrico $V(3) \subseteq V(-2)^{\perp}$, como $dimR^3 = 3$ e $dimV(-2) = 2$, temos que $dimV(3) = 1$, assim temos que $V(3) = V(-2)^{\perp}$, logo se $u = (x,y,z) \in V(3)$ temos:

$$\begin{cases} <(x,y,z),(1,1,1)> = 0 \\ <(x,y,z),(-1,0,1)> = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ -x+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

Dessa forma $V(3) = [(1,-2,1)]$

Exercícios

Assim, sabemos que existe uma matriz ortogonal M tal que:

$$M^t[T]_{Can}M = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Uma possível matriz é:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercícios

Logo, $[T]_{Can} = MDM^t =$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & -10 & 5 \\ -10 & 8 & -10 \\ 5 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

AULA 19
Álgebra Linear para Engenharia II
Prof. Pedro L. Fagundes

Reconhecimento de Cônicas
e exercícios