CAP 7 - Griffiths

Schrödinger: $\vec{p} \to -i\hbar\nabla$ em $\frac{\vec{p}^2}{2m} + V = E$

$E \to i\hbar\,\partial/\partial t$

$$\to \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\,\partial\psi/\partial t}$$ não relat.

Klein-Gordon: uso $E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4$ (ou $p^\mu p_\mu = m^2c^2$)

lembre: $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ $\quad x^\mu = (ct, \vec{x})$

$p_\mu = (E/c, -\vec{p})$ $\quad x_\mu = (ct, -\vec{x})$

$\to p^\mu \to \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j}\cdots\right) = i\hbar\left(\partial/\partial x^0, -\partial/\partial x^j \cdots\right)$

$p_\mu \to \left(i\hbar\frac{\partial}{x^0}, i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j}\cdots\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv i\hbar\partial_\mu$

$\therefore\ p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 \ \to\ -\hbar^2\underbrace{\partial^\mu}_{\partial/\partial x_\mu}\underbrace{\partial_\mu}_{\partial/\partial x^\mu}\psi - m^2c^2\psi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi}$$ (ok p/ part. de spin 0)

Dirac: $p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2c^2 = 0$

p/ partícula parada ($\vec{p} = 0$): $p^{0\,2} - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0$

2 sols: $p^0 - mc = 0$ ou $p^0 + mc = 0$

energia positiva ou negativa!

em geral: $p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc)$ e acho $\beta^\kappa, \gamma^\lambda$ (coeficientes)

p/ ñ ter termos lineares em p: $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$

expandindo, obtemos $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$ (ok)

MAS: $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 0$ p/ $\mu \neq \nu$ →

Só consigo se γ^μ forem MATRIZES, com

anticomutador $\underbrace{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{=\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu} = 2g^{\mu\nu}$

Por sinal, sabe quem anticomuta? Nossos amigos, as matrizes de Pauli! Na verdade as γs precisam ser no mínimo 4×4, aí tudo funciona:

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^i\gamma^0 \checkmark$$

$$\gamma^i\gamma^j = \begin{pmatrix} -\sigma_i\sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_i\sigma_j \end{pmatrix} = -\gamma^j\gamma^i \checkmark$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$i = 1, 2, 3$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

propriedades: ${\sigma^i}^2 = \mathbb{1}$, $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 0,\ i \neq j$; $[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma^k$

ou: $\boxed{\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k}$ contém tudo ☺

Partindo da sol. de en. positiva:

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0} \quad \text{sendo } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$

Eq. de Dirac

"espinor" de Dirac

SOLUÇÕES

partícula parada ($\vec{p} = 0$: $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = \partial\psi/\partial z = 0$) $\to$ ψ const. = pb// uniforme de encontrar a part. (!) (ok, princípio da incerteza...)

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0$$

Vamos dividir em 2 blocos: $\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, $\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$

$$\to \frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi_A \quad \to \quad \psi_A(t) = e^{-imc^2t/\hbar}\,\psi_A(0)$$

análogo a $e^{-iEt/\hbar}$ na eq. de Schr.

$$\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = \frac{imc^2}{\hbar}\psi_B \quad \to \quad \psi_B(t) = e^{+imc^2t/\hbar}\,\psi_B(0)$$

E negativa ou tempo neg.!

tomamos combinações de $\psi_A(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linearmente indep.

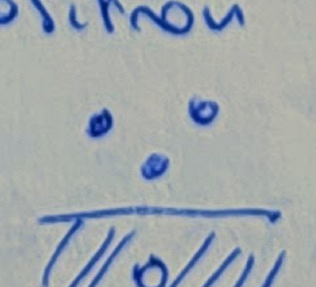
Temos os autoestados:

$$\underbrace{\psi^{(1)}}_{\text{elétron}} = e^{-imc^2/\hbar\, t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ spin } \uparrow \ ; \quad \psi^{(2)} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow$$

$$\psi^{(3)} = e^{+imc^2/\hbar\, t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow \ ; \quad \psi^{(4)} = e^{imc^2t/\hbar}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

pósitron

NOTE: posso pensar (Dirac) que é elétron c/ energia negativa e spin ↑ (no mar de Dirac) faltando i.e. "buraco", que se comporta como o oposto disso: pósitron com spin ↓



Na verdade, pensando que se propaga p/ trás no tempo, o pósitron terá spin invertido (análogo c/ o mom. angular)

Agora vamos procurar soluções p/ o caso $\vec{p} \neq 0$, tipo ondas planas (autof. do momento)

$\rightarrow \psi(x) = a\, e^{-ik.x}\, u(k) \rightarrow$ [k^μ relacionado ao mom. p^μ, espinor u como função de k^μ

$k.x = k_\mu x^\mu = k^0 ct - \vec{k}.\vec{r}$

se $k^\mu = p^\mu/\hbar \rightarrow \partial_\mu \psi = -ik_\mu \psi = \frac{p_\mu}{i\hbar}\psi$

$\therefore (i\hbar \partial_\mu)\psi = p_\mu \psi$ autof. do mom. quadri.

Na eq. de Dirac: $i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = -i^2\hbar^2 \gamma^\mu k_\mu \cancel{ae^{-ik.x}}\, u - mc\cancel{ae^{-ik.x}}\, u = 0$

$\rightarrow (\hbar \underbrace{\gamma^\mu k_\mu}_{= \begin{pmatrix} k^0 & -\vec{k}.\vec{\sigma} \\ \vec{k}.\vec{\sigma} & -k^0 \end{pmatrix}} - mc)u = 0$ (eq. algébrica p/ u)

como acima tomo $\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} (\hbar k^0 - mc)u_A & -\hbar \vec{k}.\vec{\sigma}\, u_B \\ \hbar \vec{k}.\vec{\sigma}\, u_A & -(\hbar k^0 + mc)u_B \end{pmatrix} = 0$

ou seja temos 2 condições: $u_A = \frac{\vec{k}.\vec{\sigma}}{k^0 - mc/\hbar} u_B$ e $u_B = \frac{\vec{k}.\vec{\sigma}}{k^0 + mc/\hbar} u_A \Rightarrow \frac{(\vec{k}.\vec{\sigma})^2}{k^{0\,2} - (mc/\hbar)^2} = \mathbb{1}$

$= \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix}$

mas: $(\vec{k}.\vec{\sigma})^2 = k_i k_j \sigma_i \sigma_j = k_i k_j \delta_{ij} \mathbb{1} + i \cancel{\varepsilon_{ijk} k_i k_j}^{\,0} \sigma_k = |\vec{k}|^2 \mathbb{1}$

então devemos ter k^μ tal que $(k^{0\,2} - \vec{k}^2)\hbar^2 = m^2c^2$

isso ocorre p/ $\boxed{k^\mu = \pm p^\mu/\hbar}$ // como esperado, k^μ é dado pelo quadri mom. (ou por seu negativo)

Vamos escrever então os espinores u:

[Note que agora ñ posso escolher $^1_0$ como antes, pois escolher $u_A = \binom{1}{0}$ já determina u_B, etc.

tomando $u_A = \binom{1}{0}$ ou $\binom{0}{1} \rightarrow u_B = \frac{1}{k^0 + mc/\hbar} \underbrace{\begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix}}_{\vec{k}.\vec{\sigma}} u_A$

então não posso pegar $k^\mu = -p^\mu/\hbar$, senão $k^0 + mc/\hbar = \frac{-E}{c\hbar} + \frac{mc}{\hbar} = 0$ p/ $\vec{p} = 0$ e u_B diverge!

$\therefore$ tomo $\boxed{k^\mu = p^\mu/\hbar}$: $u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c\, p_z/E + mc^2 \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix}$, $u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c(p_x - ip_y)/E + mc^2 \\ c(-p_z)/E + mc^2 \end{pmatrix}$

note $u^{(1)\dagger} u^{(2)} = \frac{N^2c^2}{(E+mc^2)^2}\left[p_z(p_x - ip_y) - p_z(p_x - ip_y)\right] = 0$ //

Normalização: $u^\dagger u = (\alpha^* \beta^* \gamma^* \delta^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = N^2\left(1 + \frac{\vec{p}^2c^2}{(E+mc^2)^2}\right) = N^2 \frac{\overbrace{E^2 + m^2c^4}^{E^2} + \vec{p}^2c^2 + 2Emc^2}{(E+mc^2)^2} =$

$u \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$

$= \frac{N^2\, 2E\cancel{(E+mc^2)}}{(E+mc^2)^{\cancel{2}}} \rightarrow$ tomo $\boxed{N = \sqrt{\frac{E+mc^2}{c}} \Rightarrow u^\dagger u = \frac{2E}{c}}$ //

Agora, escolhendo $u_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ vemos que devemos ter $\boxed{k^\mu = -p^\mu/\hbar}$ (4)

pois $u_A = \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{k^0 - mc/\hbar} u_B$ e o denominador seria $=0$ p/ $\vec{p}=0$ e $k^0 = \frac{E}{c\hbar} = \frac{mc}{\hbar}$

portanto, temos $u_A = \frac{\cancel{\hbar}c/\cancel{\hbar}}{-E-mc^2}\begin{pmatrix}-p_z & -p_x+ip_y\\ -p_x-ip_y & p_z\end{pmatrix}u_B = \frac{c}{E+mc^2}\begin{pmatrix}p_z & p_x-ip_y\\ p_x+ip_y & -p_z\end{pmatrix}u_B$ → como acima!

e os espinores:

$$\boxed{v^{(1)} = N\begin{pmatrix} c(p_x-ip_y)/E+mc^2 \\ c(-p_z)/E+mc^2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = -N\begin{pmatrix} cp_z/E+mc^2 \\ c(p_x+ip_y)/E+mc^2 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}}$$

convenção (ver ex. 7.9)

N é a mesma, $v^{(1)\dagger}v^{(2)}$ tb é 0 //

NOTE: as soluções com $k^\mu = +p^\mu/\hbar$, i.e. $\psi = a e^{-ip\cdot x/\hbar} u$, vão satisfazer à eq. de Dirac $(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$ enquanto as sols. com $k^\mu = -p^\mu/\hbar$ satisfazem $(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0$, $\psi = a e^{ip\cdot x/\hbar} v$

respectivamente partículas e antipartículas

⇒ nos dois casos ψ satisfaz $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$ só que no 1º temos uma autofunção do momento e no segundo autof. do negativo do momento

$\underbrace{i\hbar\partial_\mu}_{\text{operador } \hat{p}_\mu}\psi = \underbrace{p_\mu}_{\text{4vetor momento}}\psi$ p/ partículas e $-p_\mu\psi$ p/ antip.

→ os estados u e v ñ são sempre ortogonais (!)

$u^{(1)\dagger}v^{(1)} = \frac{N^2c^2}{(E+mc^2)^2}(2p_x - 2ip_y)$; $u^{(1)\dagger}v^{(2)} = \frac{-N^2c^2}{(E+mc^2)^2}(2p_z)$; $u^{(2)\dagger}v^{(1)} = \frac{N^2c^2}{(E+mc^2)^2}(-2p_z)$; $u^{(2)\dagger}v^{(2)} = \frac{-N^2c^2}{(E+mc^2)^2}(2p_x+2ip_y)$

só p/ $\vec{p}\to 0$, e nesse limite as funções ψ reproduzem o que tínhamos acima

⇒ para $\vec{p}\neq 0$ mas $v \ll c$ podemos comparar as componentes de part. e antip. em u e v:

p/ u as componentes inferiores são de ordem $\leq \frac{|\vec{p}|c}{E+mc^2} = \frac{|\vec{p}|c}{\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}+mc^2} < 1$

idem p/ componentes superiores de v

→ p/ $v \ll c$ as comp. de partícula são só superiores e de antip. inferiores, os 2 blocos "desacoplam", e tb temos as comp. pequenas de ordem $\sim \frac{|\vec{p}|\cancel{c}}{2mc^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}\gamma v}{2\cancel{m}c}$ $^{\sim 1}$ → ordem v/c

→ P/ $\vec{p} \parallel \hat{z}$ as expressões se simplificam, em particular:

$u^{(1)}\uparrow, v^{(1)}\downarrow$
$u^{(2)}\downarrow, v^{(2)}\uparrow$

$$u^{(1)} = N\begin{pmatrix}1\\0\\ |\vec{p}|c/E+mc^2 \\ 0\end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E+mc^2}{c}}\begin{pmatrix}1\\0\\ \sqrt{E^2-m^2c^4}/E+mc^2 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{(E+mc^2)/c}\\0\\ \sqrt{(E-mc^2)/c}\\0\end{pmatrix}$$

⇒ aí é autoestado de spin $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}$

Até agora, encontramos sols. de partícula livre p/ a eq. de Dirac, sendo ψ dado por espinores de 4 componentes (duas sols. p/ elétron, associadas a $u^{(1)}, u^{(2)}$ e 2 p/ pósitron $v^{(1)}, v^{(2)}$)

MAS note que as 4 componentes ñ têm nada a ver c/ 4-vetor!
Mesmo as matrizes γ^μ, são 4×4 e temos 4 delas, $\mu=0,1,2,3$ mas ñ se transformam, é apenas notação conveniente, em princípio

Pergunta: Como fica ψ no sistema linha? $\psi \to \psi' = S\psi$

p/ manter que seja sol. da Eq. de Dirac devemos ter:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi \implies i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu\psi' = mc\psi'$$

onde $\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \tilde\Lambda^\nu_\mu\,\partial_\nu$, $\tilde\Lambda = \Lambda^{-1} = \Lambda(-\beta) = \begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$

Aplico S^{-1} nos 2 lados

Portanto: $i\hbar\gamma^\mu\tilde\Lambda^\nu_\mu\partial_\nu S\psi = mcS\psi \to i\hbar\tilde\Lambda^\nu_\mu S^{-1}\gamma^\mu S\partial_\nu\psi = mc\psi$

ñ age no espinor (não depende de x^ν)
(é elem. de matriz no espaço de Lorentz)

$= i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ ($\mu \to \nu$)

$$\Rightarrow \tilde\Lambda^\nu_\mu(S^{-1}\gamma^\mu S)\partial_\nu\psi = \gamma^\nu\partial_\nu\psi \to [\underbrace{\tilde\Lambda^\nu_\mu(S^{-1}\gamma^\mu S) - \gamma^\nu}_{\text{deve ser}=0\ (\text{vale p/ } \forall\psi)}]\partial_\nu\psi = 0$$

∴ temos a condição: $\boxed{\tilde\Lambda^\nu_\mu S^{-1}\gamma^\mu S = \gamma^\nu}$ ou $\tilde\Lambda^\nu_\mu\gamma^\mu S = S\gamma^\nu$

por ex. p/ $\nu=0$:
contribuição de $\mu=0,1$ $\boxed{\gamma\gamma^0 S + \beta\gamma\gamma^1 S = S\gamma^0}$

$\nu=1$: $\beta\gamma\gamma^0 S + \gamma\gamma^1 S = S\gamma^1$

$\nu=2$: $\gamma^2 S = S\gamma^2$

$\nu=3$: $\gamma^3 S = S\gamma^3$

→ S comuta com γ^2 e γ^3 ↳ ∴ ñ pode conter um ou outro, ou produtos com eles!

$\Longrightarrow \boxed{S = a\mathbb{1} + b\gamma^0\gamma^1}$ pois $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=0$ p/ $\mu\neq\nu$

Note: p/ $v \ll c$ $\beta\to0, \gamma\to1$
$\gamma^0 S = S\gamma^0$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}S = \begin{pmatrix}+\\-\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = (+|-)$
→ blocos na antidiag. $=0$

note: potências vão só até 2 (como σs)

subst. na eq. p/ $\nu=0$:

$$\gamma(a\gamma^0 + b\overset{=1}{\gamma^{0\,2}}\gamma^1) + \beta\gamma(a\gamma^1 + b\overset{=-\gamma^1\gamma^1\gamma^0 = \gamma^0}{\gamma^1\gamma^0\gamma^1}) = a\gamma^0 + b\gamma^0\underbrace{\gamma^1\gamma^0}_{=-\gamma^0\gamma^1}$$

$$[\underbrace{a(\gamma-1)+b\beta\gamma}_{=0}]\gamma^0 + [\underbrace{a\beta\gamma + b(\gamma+1)}_{=0}]\gamma^1 = 0 \to \frac{a}{b} = -\frac{\beta\gamma}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{-\beta\gamma}$$

checa: $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2-1$
$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1-(1-\beta^2)}{1-\beta^2}$

note: $\beta^2 = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}$

portanto: $\frac{a}{b} = -\frac{\gamma\cdot\sqrt{\gamma^2-1}/\gamma}{\gamma-1} = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$ $\left((\gamma+1)(\gamma-1)\right)$ → tomo $\begin{cases} a = \sqrt{\gamma+1}/\sqrt{2} \\ b = -\sqrt{\gamma-1}/\sqrt{2}\end{cases}$ por conveniência

$\Longrightarrow$

Transf. de ψ dada por: $\psi \to \psi' = S\psi$

com $S = a_+ \mathbb{1} + a_- \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & a_- \\ 0 & a_+ & a_- & 0 \\ 0 & a_- & a_+ & 0 \\ a_- & 0 & 0 & a_+ \end{pmatrix}$

$\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$

onde $a_\pm = \pm\sqrt{\frac{(\gamma \pm 1)}{2}}$ Note que p/ $\gamma \to 1$ (limite não relat.) temos $a_- \to 0$, $a_+ \to 1$, $S \to \mathbb{1}$ como esperado //

Note que $S^\dagger S = S^2$ (real, simétrica) $= \begin{pmatrix} a_+^2 + a_-^2 & 2a_+a_-\sigma_1 \\ 2a_+a_-\sigma_1 & a_+^2+a_-^2 \end{pmatrix}$

$\gamma^2 - 1 = \frac{1 - 1 + \beta^2}{1-\beta^2}$

$= \begin{pmatrix} \gamma & -\sqrt{\gamma^2-1}\,\sigma_1 \\ -\sqrt{\gamma^2-1}\,\sigma_1 & \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta\sigma_1 \\ -\beta\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1}$

e portanto $\psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$ ñ é invariante de Lorentz

$(\psi^\dagger\psi)' = (S\psi)^\dagger(S\psi) = \psi^\dagger \underbrace{(S^\dagger S)}_{\neq \mathbb{1}} \psi \neq \psi^\dagger\psi$

e agora?

Solução: defino invariante com $\bar\psi \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ em vez de $\psi^\dagger$

aí temos $\bar\psi\psi = \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0}_{\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}} \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2$

e $(\bar\psi\psi)' = \psi^\dagger \underbrace{S^\dagger\gamma^0 S}_{=\gamma^0}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar\psi\psi$ //

pois $S^\dagger\gamma^0 S = \begin{pmatrix} a_+ & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ & a_-\sigma_1 \\ -a_-\sigma_1 & -a_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+^2 - a_-^2 & 0 \\ 0 & a_-^2 - a_+^2 \end{pmatrix} = \gamma^0$

$\Rightarrow$ Não podemos associar um 4vetor a ψ, mas $\bar\psi\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi$ é invariante e é escalar (ver abaixo)

Além disso, temos que $\bar\psi\gamma^5\psi$ é invariante e pseudoescalar

onde $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underbrace{-\sigma_2\sigma_3}_{=-i\sigma_1} & 0 \\ 0 & -\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($\sigma_1^2 = 1$)

Pois $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ e portanto $(\bar\psi\gamma^5\psi)' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0\gamma^5 S\psi = \psi^\dagger \underbrace{(S^\dagger\gamma^0 S)}_{=\gamma^0}\gamma^5\psi = (\bar\psi\gamma^5\psi)$ //

anticomuta com 3 e comuta com 1 dos gamas em γ^5 $\to$ γ^5 comuta com $S = a_+\mathbb{1} + a_-\gamma^0\gamma^1$

Transformação de paridade: como acima, p/ transf. $\psi \to \psi' = S\psi$ e $x^\mu \to x^{\mu'}$

vale $\underbrace{\left[\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}(S^{-1}\gamma^\mu S) - \gamma^\nu\right]}_{=0}\partial_\nu\psi = 0$ mas agora $x^{\mu'} = (x^0, -\vec{x})$

$\Rightarrow \gamma^0 = S^{-1}\gamma^0 S$, $\gamma^{1,2,3} = -S^{-1}\gamma^{1,2,3}S$ $S\gamma^0 = \gamma^0 S$, $S\gamma^i = -\gamma^i S$, $i = 1,2,3$ $\Rightarrow S = \gamma^0$

comuta com ela mesma e anticomuta com as outras

Sendo assim, em relação à transf. de paridade:

$$(\bar\psi\psi)' = \psi'^{+}\gamma^0\psi' = \psi^{+}\gamma^0\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=1}\psi = \bar\psi\psi \rightarrow \text{escalar}$$

$$(\bar\psi\gamma^5\psi)' = \psi^{+}\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=1}\gamma^5\gamma^0\psi = -\psi^{+}\gamma^0\gamma^5\psi = -(\bar\psi\gamma^5\psi) \rightarrow \text{pseudo escalar}$$

anticomutam

Considere agora $\bar\psi\gamma^\mu\psi$:

em relação à transf. de Lorentz temos $(\bar\psi\gamma^\mu\psi)' = \psi^{+}S^{+}\gamma^0\gamma^\mu S\psi =$

$$= \psi^{+}\underbrace{S^{+}\gamma^0 S}_{=\gamma^0}\underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu}\psi = \psi^{+}\gamma^0\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu\psi$$

acima vimos: $\tilde\Lambda^\nu_\mu(S^{-1}\gamma^\mu S) = \gamma^\nu$

$$\underbrace{\Lambda^\alpha_\nu\tilde\Lambda^\nu_\mu}_{\delta_{\alpha\mu}}(S^{-1}\gamma^\mu S) = \Lambda^\alpha_\nu\gamma^\nu$$

$$\rightarrow (\bar\psi\gamma^\mu\psi)' = \Lambda^\mu_\nu(\bar\psi\gamma^\nu\psi)$$

$\therefore$ é um quadrivetor

sob paridade: $(\bar\psi\gamma^\mu\psi)' = \psi^{+}\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{=1}\underbrace{\gamma^\mu\gamma^0}_{\text{anticom. se }\mu\neq 0}\psi = \begin{cases}(\bar\psi\gamma^\mu\psi) & \text{se } \mu=0\\ -(\bar\psi\gamma^i\psi) & i=1,2,3\end{cases}$

como esperado p/ vetor. Note: componente 0 de $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ é $\psi^{+}\psi$ que tínhamos normalizado c/ $u^{+}u = 2E/c$

Temos tb o pseudovetor $\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi$:

Lorentz: $(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)' = \psi^{+}\underbrace{S^{+}\gamma^0 S}S^{-1}\gamma^\mu\gamma^5 S\psi = \Lambda^\mu_\nu(\bar\psi\gamma^\nu\gamma^5\psi)$ 4-vetor

comutam

paridade: $(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi)' = \psi^{+}\underbrace{\gamma^0\gamma^0}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi = -\psi^{+}\underbrace{\gamma^\mu\gamma^0}\gamma^5\psi = \begin{cases}-(\bar\psi\gamma^\mu\gamma^5\psi) & \text{se } \mu=0\\ (\bar\psi\gamma^i\gamma^5\psi) & i=1,2,3\end{cases}$

comuta se $\mu=0$
anticomuta se $\mu\neq 0$

$\therefore$ pseudovetor

E tensor antisimétrico $\bar\psi\sigma^{\mu\nu}\psi$, $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$

$\rightarrow = \gamma^\mu\gamma^\nu,\ \mu\neq\nu$

Essas são todas as possibilid. de combinar elelos de ψ^{+} e ψ com 1 matriz 4x4 "no meio" → são 16 combinações: 1+1+4+4+6

pares com $\mu\neq\nu$

⇒ é interessante que γ^μ não é 4 vetor, mas quando usado entre $\bar\psi$ e ψ é como se fosse (!)