SOLUÇÃO LISTA 3 (ESTUDO P/ PROVA)

3a) Propriedade: AA^T e A^TA são simétricas.
Por exemplo, seja $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ genérica tal que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Assim, devemos mostrar que $AA^T = (AA^T)^T$

$$AA^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{23}a_{13} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{23} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{bmatrix}$$

que é simétrica, ou seja $AA^T = (AA^T)^T$.

Utilizando propriedades de matrizes, note que:

- $(AA^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = AA^T$, ou seja, AA^T é simétrica.
- $(A^TA)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^TA$, ou seja, A^TA é simétrica.

$\therefore$ AA^T e A^TA são matrizes simétricas.

b) Pela decomposição SVD, temos $A = U\Sigma V^T$, ou seja,

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = (V^T)^T \Sigma^T U^T = V\Sigma^T U^T$$

Sendo assim: $A^TA = (V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T) = V\Sigma^T \underbrace{(U^TU)}_{Id} \Sigma V^T = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$ //

c) Analogamente ao item (b):

$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^T U^T) = U\Sigma \underbrace{(V^TV)}_{Id} \Sigma^T U^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$ //

d) Pelo item (b), note que as colunas de V são autovetores de A^TA. Pelo item (c), note que as colunas de U são autovetores de AA^T.

e) A diagonal de Σ contém os valores singulares de A, que são a raiz quadrada dos auto-valores de AA^T (ou A^TA).

f) $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T$ é a melhor aproximação da matriz A com posto k.

g) Cada uma das k matrizes $\sigma_i \vec{u}_i \vec{v}_i^T$ possui posto 1.

4) Demonstração: Temos $A^TA\hat{x} = A^T\vec{b}$. Aplicando a decomposição SVD em A, segue que $A = U\Sigma V^T$, e portanto podemos escrever:

$$A^TA\hat{x} = A^T\vec{b}$$
$$(U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)\hat{x} = (U\Sigma V^T)^T\vec{b}$$
$$(V\Sigma^T U^T)(U\Sigma V^T)\hat{x} = (V\Sigma^T U^T)\vec{b}$$
$$[V\Sigma^T(U^TU)\Sigma V^T]\hat{x} = (V\Sigma^T U^T)\vec{b}$$

Como U é ortogonal, $U^TU = Id$, e portanto

$$(V\Sigma^T\Sigma V^T)\hat{x} = (V\Sigma^T U^T)\vec{b}$$

Multiplicando à esquerda por V^T, temos

$$V^T(V\Sigma^T\Sigma V^T)\hat{x} = V^T(V\Sigma^T U^T)\vec{b}$$
$$[(V^TV)\Sigma^T\Sigma V^T]\hat{x} = [(V^TV)\Sigma^T U^T]\vec{b}$$

Como V é ortogonal, $V^TV = Id$, e portanto,

$$(\Sigma^T\Sigma V^T)\hat{x} = (\Sigma^T U^T)\vec{b}$$

Multiplicando à esquerda por $(\Sigma^T\Sigma)^{-1}$, segue que

$$\underbrace{(\Sigma^T\Sigma)^{-1}(\Sigma^T\Sigma)}_{Id} V^T\hat{x} = [(\Sigma^T\Sigma)^{-1}\Sigma^T]U^T\vec{b}$$
$$V^T\hat{x} = \Sigma^+ U^T\vec{b}$$

E finalmente, multiplicando à esquerda por V, temos

$$VV^T\hat{x} = V\Sigma^+ U^T\vec{b}$$
$$\boxed{\hat{x} = A^+\vec{b}}$$

■

5)

x_i	0	0,06	0,14	0,25	0,31	0,47	0,60	0,70
y_i	0	0,08	0,14	0,20	0,23	0,25	0,28	0,29

a) Queremos encontrar os coeficientes do polinômio de grau 2, $P_2(x)$, que aproxima o conjunto de pontos acima, ou seja, $f(x) \cong P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}06 & 0{,}0360 \\ 1 & 0{,}14 & 0{,}0196 \\ 1 & 0{,}25 & 0{,}0625 \\ 1 & 0{,}31 & 0{,}0961 \\ 1 & 0{,}47 & 0{,}2209 \\ 1 & 0{,}60 & 0{,}3600 \\ 1 & 0{,}70 & 0{,}4900 \end{bmatrix}}_{\substack{X_{m \times (p+1)} \\ \text{(matriz de Vandermond)}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_{(p+1)\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}08 \\ 0{,}14 \\ 0{,}20 \\ 0{,}23 \\ 0{,}25 \\ 0{,}28 \\ 0{,}29 \end{bmatrix}}_{y_{m \times 1}}$$

m: quantidade de pontos x_i, $i = 1, ..., m$.
p: grau do polinômio

b) Sistema sobredeterminado, pois possui mais equações do que incógnitas: 8 equações (m); 3 incógnitas $(p+1)$

c) Sistema de equações normais: $X^T X \vec{a} = X^T y$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 8 & 2{,}53 & 1{,}2527 \\ 2{,}53 & 1{,}2527 & 0{,}7112 \\ 1{,}2527 & 0{,}7112 & 0{,}4320 \end{bmatrix}; \quad X^T y = \begin{bmatrix} 1{,}47 \\ 0{,}6342 \\ 0{,}3348 \end{bmatrix}$$

O sistema possui solução única, uma vez que $B = X^T X$ é não-singular ($\det(X^T X) = 0$)

d) Resolvendo $(X^T X)\vec{a} = X^T y$, temos $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0{,}018426 \\ 0{,}889101 \\ -0{,}739870 \end{bmatrix}$,

ou seja $P_2(x) = 0{,}018426 + 0{,}889101\,x - 0{,}739870\,x^2$ //

6)

	natação	bicicleta	corrida	tempo	colocação final
A1	3	3	2	8	1
A2	5	1	3	9	2

$m = 2$ (atletas)
$n = 3$ (modalidades)

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad b_{m\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Sistema $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

b) Sistema subdeterminado ($m < n$)
Note que há menos equações do que incógnitas!

c) Sistema de equações normais: $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 14 & 21 \\ 14 & 10 & 9 \\ 21 & 9 & 13 \end{bmatrix}; \quad A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

O sistema $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ não possui solução única pois $A^T A$ é matriz singular ($\det(A^T A) = 0$)

d) Solução que minimiza $\|\hat{x}\|_2$

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, tal que, segundo a decomposição SVD $A = U \Sigma V^T$

• $A^TA = \begin{bmatrix} 34 & 14 & 21 \\ 14 & 10 & 9 \\ 21 & 9 & 13 \end{bmatrix}$ $\Bigg\}$ $\lambda_1 = 53{,}365$; $\lambda_2 = 3{,}635$, $\lambda_3 = 0$

$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}793 \\ 0{,}358 \\ 0{,}493 \end{bmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}344 \\ -0{,}931 \\ 0{,}123 \end{bmatrix}$ $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}503 \\ 0{,}072 \\ -0{,}862 \end{bmatrix}$

(pol. característico: $-\lambda^3 + 57\lambda^2 - 194\lambda = 0$)

• $AA^T = \begin{bmatrix} 22 & 24 \\ 24 & 35 \end{bmatrix}$ $\Big\}$ $\lambda_1 = 53{,}365$; $\lambda_2 = 3{,}635$

$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}608 \\ 0{,}794 \end{bmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}794 \\ 0{,}608 \end{bmatrix}$

(pol. característico: $\lambda^2 - 57\lambda + 194 = 0$)

Portanto, $V = \begin{bmatrix} 0{,}793 & 0{,}344 & 0{,}503 \\ 0{,}358 & -0{,}931 & 0{,}072 \\ 0{,}493 & 0{,}123 & -0{,}862 \end{bmatrix}$ // ; $U = \begin{bmatrix} 0{,}608 & -0{,}794 \\ 0{,}794 & 0{,}608 \end{bmatrix}$ //

• Calculando Σ : $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$ sendo: $\begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{53{,}365} = 7{,}305 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3{,}635} = 1{,}907 \end{cases}$

Portanto, $\Sigma = \begin{bmatrix} 7{,}305 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}907 & 0 \end{bmatrix}$ //

Ou seja, encontramos U, V, Σ tais que $A = U \Sigma V^T$ ■

• Calculando a pseudoinversa : $A^+ = V \Sigma^+ U^T$, sendo

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7{,}305 & 0 \\ 0 & 1/1{,}907 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}137 & 0 \\ 0 & 0{,}525 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora podemos calcular $A^+ = V \Sigma^+ U^T$:

$$\text{Portanto, } A^+ = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}793 & 0{,}344 & 0{,}503 \\ 0{,}358 & -0{,}931 & 0{,}072 \\ 0{,}493 & 0{,}123 & -0{,}862 \end{bmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}137 & 0 \\ 0 & 0{,}525 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma^+} \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}608 & 0{,}794 \\ -0{,}794 & 0{,}608 \end{bmatrix}}_{U^T}$$

$$\Rightarrow A^+ = \begin{bmatrix} -0{,}077 & 0{,}200 \\ 0{,}418 & -0{,}258 \\ -0{,}010 & 0{,}093 \end{bmatrix} //$$

e portanto a solução do sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, pode ser calculada fazendo $\vec{x} = A^+\vec{b}$

$$\therefore \vec{x} = \begin{bmatrix} 0{,}314 \\ -0{,}098 \\ 0{,}175 \end{bmatrix} \leftarrow //$$

Portanto, a natação foi a prova que teve um impacto mais significativo na colocação final.