Álgebra Linear para Engenharia II
Aula 18
Prof. Pedro L. Fagundes

Operadores Simétricos

Operadores Simétricos

Def. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $T: V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é simétrico se, para todo $u, v \in V$, temos $< T(u), v > = < u, T(v) >$.

Prop. Seja B é uma base ortonormal de V. $T: V \to V$ é simétrico se, e só se, $[T]_B$ for uma matriz simétrica.

OBS: $A \in M_n(R)$ é simétrica se $A^t = A$.

Operadores Simétricos

Ex. Verifique se o operador linear dado é simétrico.

a) $T: R^2 \to R^2$**, dado por** $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$**.**

Como a base canônica de R^2 **é ortonormal, vamos calcular** $[T]_{Can}$**.**

$T(1,0) = (1,2), T(0,1) = (2,3)$ **, assim** $[T]_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **que é uma matriz simétrica, logo** T **é simétrico.**

Operadores Simétricos

b) $T: R^2 \to R^2$, dada pela matriz $[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, sendo $B = \{(1,1),(1,0)\}$ base de R^2.

B é ortonormal?

$< (1,1),(1,0) > = 1.1 + 1.0 = 1 \neq 0$, B não é ortogonal

Precisamos encontrar a matriz de T em uma base ortonormal.

Podemos escolher a base canônica de R^2.

Operadores Simétricos

$$[T(u)]_B = [T]_B . [u]_B$$

Vamos encontrar $[(1,0)]_B$ e $[(0,1)]_B$.

$(1,0) = 0.(1,1) + 1.(1,0) = (0,1)_B$.

$(0,1) = 1.(1,1) - 1.(1,0) = (1,-1)_B$.

Agora podemos usar a fórmula acima:

Operadores Simétricos

$$[T(1,0)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(1,0) = (1,3\ )_B = 1.(1,1) + 3.(1,0) = (4,1)$$

$$[T(0,1)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(0,1) = (1,-2)_B = 1.(1,1) - 2.(1,0) = (-1,1)$$

Assim, $[T]_{Can} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, que não é simétrica, logo T não é um operador simétrico.

Operadores Simétricos

Prop. Um operador linear $T: V \rightarrow V$ é simétrico se, e só se, existe uma base $\boxed{\text{ortonormal}}$ de V formada por autovetores de T.

Ex. Seja $T: R^2 \rightarrow R^2$ o operador linear dado pela matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ na base canônica. Vamos diagonalizar T.

$$det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 4-t \end{pmatrix} = (1-t)(4-t) - 4 =$$

$$= t^2 - 5t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \end{cases}$$

Operadores Simétricos

$V(0) = N(T)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

$V(0) = \{(-2y, y), y \in R\}$, $B = \{(-2, 1)\}$ é base de $V(0)$.

$V(5)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5x \\ 2x + 4y = 5y \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

$V(5) = \{(x, 2x), x \in R\}$, $B = \{(1, 2)\}$ é base de $V(5)$.

Operadores Simétricos

Seja $F=\{(-2,1),(1,2)\}$, note que F é ortogonal, pois:

$$<(-2,1),(1,2)>=-2.1+1.2=0$$

Mas não é ortonormal, pois $\|(-2,1)\|=\|(1,2)\|=\sqrt{5}$.

Considere, então, a seguinte base de R^2.

$E=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1),\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\right\}$, que é ortonormal, além disso temos:

$[T]_E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=M^{-1}AM$, onde $M=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Operadores Simétricos

Repare que:

$$M^t M = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo esta matriz M tem a propriedade de $M^t = M^{-1}$

Def. $M \in M_n(R)$ é chamada ortogonal se $M^t = M^{-1}$.

Operadores Simétricos

Prop. Um operador linear $T: V \rightarrow V$ é simétrico se, e só se, existe uma matriz ortogonal M, tal que:

$M^t[T]_B M = D$, onde D é uma matriz diagonal e B é uma base de V.

Em Particular.

Prop. Se T é simétrico, então T é diagonalizável.

Operadores Simétricos

Encontre uma matriz ortogonal M tal que M^tAM é uma matriz diagonal, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$det\begin{pmatrix} 1-t & 2 & 0 \\ 2 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (3-t)\left((1-t)^2 - 4\right) =$$

$$= (3-t)\left(1 - 2t + t^2 - 4\right) = (3-t)\left(t^2 - 2t - 3\right) = 0 \Rightarrow$$

Operadores Simétricos

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$V(-1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -x \\ 2x + y = -y \\ 3z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

$V(-1) = \{(x, -x, 0), x \in R\}$, $B = \{(1, -1, 0)\}$ é uma base para $V(-1)$.

Operadores Simétricos

$V(3)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 2x + y = 3y \Rightarrow y = x \\ \quad 3z = 3z \end{cases}$$

$V(3) = \{(x, x, z), x, z \in R\}$, $B = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base para $V(3)$.

A base $F = \{(1,-1,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$ é ortogonal, mas não ortonormal, vamos normalizá-la.

$$\|(1,-1,0)\| = \|(1,1,0)\| = \sqrt{2} \text{ e } \|(0,0,1)\| = 1$$

Operadores Simétricos

Seja $E = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}$ que é uma base ortonormal para R^3, assim a matriz procurada é:

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos verificar que M é uma matriz ortogonal

Operadores Simétricos

$$M^tM = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo $M^t = M^{-1}$

Operadores Simétricos

Prop. Sejam u e v autovetores de um operador simétrico T, associados aos autovalores α e β respectivamente. Se $\alpha \neq \beta$, então $u \perp v$.

Dem. Como $\alpha \neq \beta$, podemos supor que $\alpha \neq 0$, assim da igualdade, $T(u) = \alpha . u$, obtemos que $u = \frac{1}{\alpha} T(u)$.

$$< u, v > = < \frac{1}{\alpha} T(u), v > = \frac{1}{\alpha} < T(u), v > =$$
$$= \frac{1}{\alpha} < u, T(v) > = \frac{1}{\alpha} < u, \beta v > = \frac{\beta}{\alpha} < u, v >$$

Operadores Simétricos

$$< u, v > = \frac{\beta}{\alpha} < u, v > \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow < u, v > - \frac{\beta}{\alpha} < u, v > = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) < u, v > = 0$$

Como $\alpha \neq \beta$, temos que $1 - \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$, logo $< u, v > = 0$

Assim

$$u \perp v$$

Operadores Simétricos

Autovetores de um operador simétrico, associados a autovalores distintos, são sempre ortogonais.

Suponha que $dimV(\beta) = 2$, então podem existir autovetores LI, v e w em $V(\beta)$ que não são ortogonais, neste caso para achar uma base ortogonal formada por autovetores de T, aplicamos o processo de Gran-Schmidt ao conjunto $\{v, w\}$, os vetores obtidos continuam sendo autovetores de T associados a β.

Operadores Simétricos

3. Lista 3) Considere R^3 com o produto interno usual e seja $T: R^3 \to R^3$ tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em que $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

Considere as seguintes afirmações:

I) T não é simétrico, mas é diagonalizável

II) T é simétrico

III) T não é diagonalizável

Operadores Simétricos

A base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ não é ortonormal, pois $< (1,0,0),(1,1,0) > = 1 \neq 0$.

Vamos ver se é possível encontrarmos uma base ortogonal de autovetores de T.

$$p_T(t) = det\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (-1-t)\left((1-t)^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Operadores Simétricos

$V(-1) = Ker(T + I)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo $V(-1) = [(0,1,0)_B] = [(1,1,0)]$

$V(0) = KerT$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

Logo $V(0) = [(1,0,-1)_B] = [(0,-1,-1)]$

Operadores Simétricos

Assim, $V(-1) = [(1,1,0)]$ e $V(0) = [(0,-1,-1)]$, mas

$$< (1,1,0),(0,-1,-1) > = -1 \neq 0$$

Logo estes autovetores que estão associados à autovalores distintos não são ortogonais, assim T não é simétrico.

Apenas I) é verdadeira.

I) T não é simétrico, mas é diagonalizável

Reconhecimento de Quádricas

Quádrica:

Analiticamente são as raízes de um polinômio de grau dois em três variáveis, ou seja, são as soluções da equação:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz + dx + ey + fz + h = 0$$

Onde, $a, b, c, p, q, r\ d, e, f, h \in R$**.**

Esta equação é chamada equação geral da quádrica.

Reconhecimento de Quádricas

Para reconhecer uma quádrica, devemos encontrar a sua equação reduzida.

A equação de uma quádrica esta em sua forma reduzida se:

1) Só possui coeficientes de grau dois não misto e o coeficiente constante.

Ou

2) Se uma das variáveis possui coeficiente de grau um não nulo, então seu coeficiente de grau dois é zero.

Reconhecimento de Quádricas

Ex.

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ **é a equação reduzida de uma esfera de centro na origem e raio** $r = 2$**.**

2) $x^2 - y^2 - 9 = 0$ **é a equação reduzida de um cilindro hiperbólico.**

3) $x^2 + y^2 - 3z - 9 = 0$ **é a equação reduzida de um paraboloide.**

4) $x^2 - y^2 - z = 0$ **é a equação reduzida de uma sela.**

Reconhecimento de Quádricas

Dada a equação geral de uma quádrica, associamos a sua parcela de 2º grau, um operador linear simétrico de R^3, cuja matriz em relação à base canônica é:

$$L(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2pxy + 2qxz + 2ryz$$

$$A = \begin{pmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{pmatrix}$$

Reconhecimento de Quádricas

Ex. Encontre a equação reduzida das seguintes quádricas:

a) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy - 4 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$**, com autovalores** 3 **e** -1 **e**

$V(-1) = \{(x, -x, 0), x \in R\} = [(1, -1, 0)]$
$V(3) = \{(x, x, z), x, z \in R\} = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Assim, no novo sistema: $-x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2 - 4 = 0$.

Reconhecimento de Quádricas

b) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4x - 6z - 4 = 0$

Como os coeficientes dos termos mistos de 2º grau são nulos, só precisamos completar quadrados.

$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$

$3z^2 - 6z = 3\left(z^2 - 2z\right) = 3((z-1)^2 - 1)$. Substituindo,

$(x+2)^2 - 4 + y^2 + 3\left((z-1)^2 - 1\right) - 4 = 0$, se $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y \\ z' = z - 1 \end{cases}$

$x'^2 + y'^2 + 3z'^2 - 11 = 0$

Reconhecimento de Quádricas

c) $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 4x + 2y - 8 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **com autovalores** $0, -1$ **e** 2.

$V(0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$$

$V(0) = [(1, 0, -1)]$

Reconhecimento de Quádricas

$V(-1)$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=-x\\ -y=-y\\ x+z=-z\end{cases} \Rightarrow x=z=0$$

$V(-1)=[(0,1,0)]$

$V(2)$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=2x\\ -y=2y\\ x+z=2z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x\\ y=0\end{cases}$$

$V(2)=[(1,0,1)]$

Reconhecimento de Quádricas

A base $F = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é ortogonal.

$\|(1, 0, -1)\| = \|(1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$ e $\|(0, 1, 0)\| = 1$, assim,

$E = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), (0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)\right\}$ é ortonormal, seja então:

$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ que é uma matriz ortogonal.

Devemos fazer a seguinte mudança de coordenadas:

Reconhecimento de Quádricas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} & 0 & {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -{}^{1}\!/_{\sqrt{2}} & 0 & {}^{1}\!/_{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$, ou seja,

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + z') \end{cases}$$

Reconhecimento de Cônicas

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 4x + 2y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + z') \\ y = y' \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + z') \end{cases}$$

$$-4x + 2y - 8 = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + z')\right) + 2y' - 8 =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}}x' + 2y' - 4z' - 8 = 0$$

Reconhecimento de Quádricas

No novo sistema a equação da quádrica é:

$$0x'^2 - y'^2 + 2z'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' + 2y' - 4z' - 8 = 0$$ **ou**

$$-y'^2 + 2z'^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x' + 2y' - 4z' - 8 = 0$$

Ainda precisamos completar quadrados.

$$-y'^2 + 2y' = -\left(y'^2 - 2y'\right) = -((y' - 1)^2 - 1)$$

$$2z'^2 - 4z' = 2\left(z'^2 - 2z'\right) = 2((z' - 1)^2 - 1)$$

$$-\left((y' - 1)^2 - 1\right) + 2((z' - 1)^2 - 1) - \frac{4}{\sqrt{2}}x' - 8 = 0$$

Reconhecimento de Quádricas

$$-\left((y' - 1)^2 - 1\right) + 2((z' - 1)^2 - 1) - \frac{4}{\sqrt{2}}x' - 8 = 0$$

Fazendo $\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' - 1 \\ z'' = z' - 1 \end{cases}$, temos:

$$-y''^2 + 2z''^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}x'' - 9 = 0$$

ou

$$y''^2 - 2z''^2 + 2\sqrt{2}x'' + 9 = 0$$

Álgebra Linear para Engenharia II
Aula 18
Prof. Pedro L. Fagundes

Operadores Simétricos