Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos - PMR

Aula 6 – Sliding Mode Control

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

ROBUSTO + NÃO LINEAR

⇓

FEEDBACK LINEARIZATION

\+ TERMOS LIDAM COM IMPRECISÕES

SUPERFÍCIE DE ESCORREGAMENTO

SLIDING SURFACE

$$x^{(n)} = f(\underset{\sim}{x}) + b(\underset{\sim}{x})u \quad (SISO)$$

↳ x É POSIÇÃO

ENTRADA CONTROLE

$f(\underset{\sim}{x})$: NÃO CONHECIDO EXATAMENTE

$b(\underset{\sim}{x})$: " " "

↳ CONHEÇO SINAL

SEJA $\underset{\sim}{\tilde{x}} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x_d}$

$\tilde{\ }$ → ERRO

↳ VETOR

$$\underset{\sim}{x_d} = (x_d, \dot{x}_d, \ldots, x_d^{n-1})^T$$

↳ DESEJADO, REFERENCIA, SET-POINT

OBJETIVO $\underset{\sim}{\tilde{x}} \to \underset{\sim}{0}$

A SUPERFÍCIE S EM $\mathbb{R}^{(n)}$ DEFINIDA POR

$s(\underset{\sim}{x}, t) = 0$ COM

$$\boxed{s(\underset{\sim}{x}, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x}} \quad (\lambda > 0)$$

A SUPERFÍCIE S EM $\mathbb{R}^{(n)}$ DEFINIDA POR

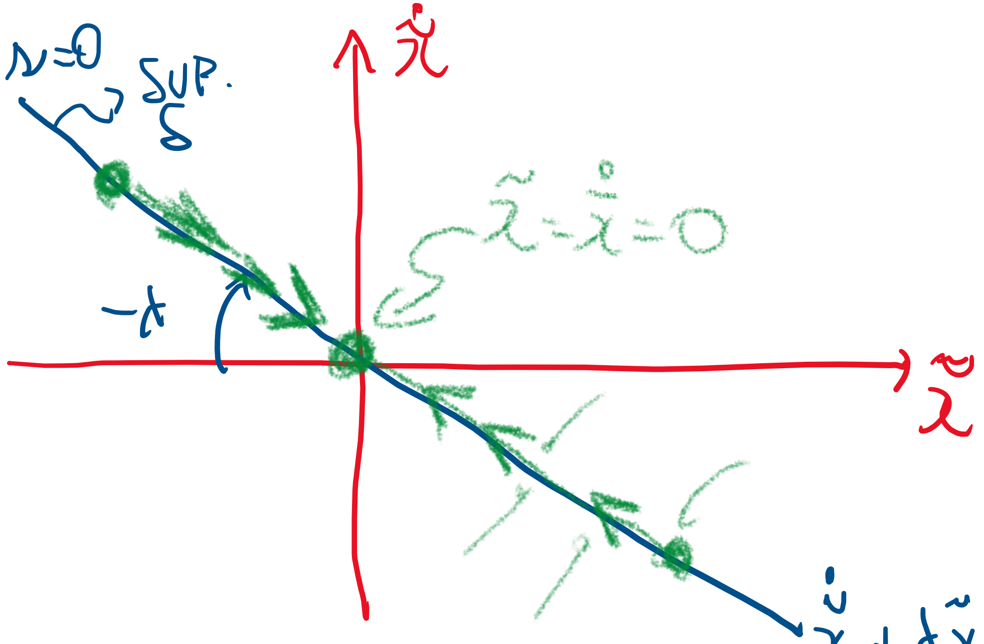
$s(\tilde{x},t)=0$ COM

$$\boxed{s(\tilde{x},t)=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n-1}\tilde{x}}\qquad(\lambda>0)$$

P/ n=2 $\quad s=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{1}\tilde{x}=\underline{\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x}}=0$

P/ n=3 $\quad s=\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{2}\tilde{x}=\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\lambda\frac{d}{dt}+\lambda^2\right)\tilde{x}=$

$$s=\ddot{\tilde{x}}+2\lambda\dot{\tilde{x}}+\lambda^2\tilde{x}$$

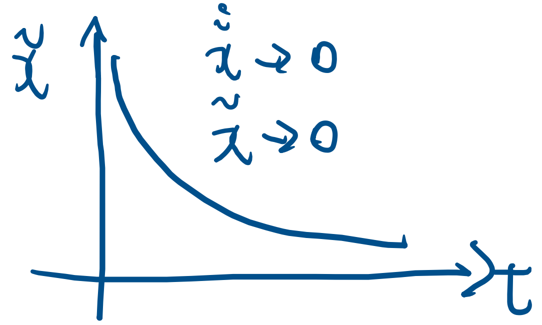


$\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x}=0$

$\dot{\tilde{x}}=-\lambda\tilde{x}$

SE UM PONTO ATINGIR A SUP. ESCORREGAMENTO

$\dot{\tilde{x}}+\lambda\tilde{x}=0 \Rightarrow \tilde{x}\to 0$



OU SEJA, O PROBLEMA DE MANTER $\tilde{\underset{\sim}{x}}=0$ É EQUIVALENTE A MANTER A TRAJETORIA EM $\underline{S}$ POIS $s(\underset{\sim}{x},t)=0$ É UMA EQUAÇÃO DIFENCIAL ESTÁVEL CUJA SOLUÇÃO É $\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{0}$

$\Rightarrow$ O PROBLEMA ORIGINAL DE CONTROLE DE $\underset{\sim}{x}\to\underset{\sim}{0}$ EQUIVALE A MANTER O ESCALAR s EM 0

$\Rightarrow$ O PROBLEMA QUE ERA $\underline{n}$-DIMENSIONAL DE MANTER $\underset{\sim}{x}\to 0$ FOI REDUZIDA AO PROBLEMA DE 1º ORDEM EM $\underline{s}$

$\Rightarrow$ DE FATO DERIVANDO $\underline{s}$ UMA VEZ APARECE O $\underline{u}$, E PODEMOS PROJETAR O CONTROLE

Ex) $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t)$

$$\ddot{x} = \underbrace{\frac{1}{m}\left(-c\dot{x} - Kx\right)}_{f(\underset{\sim}{x})} + \underbrace{\frac{1}{m}}_{b(\underset{\sim}{x})} \cdot \underbrace{F(t)}_{u}$$

$\rightarrow s(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, t) = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} \quad (\lambda > 0)$

$\rightarrow \dot{s} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = (\ddot{x} - \ddot{x}_d) + \lambda(\dot{x} - \dot{x}_d)$

$$\boxed{\dot{s} = \frac{1}{m}\left(-c\dot{x} - Kx\right) - \ddot{x}_d + \frac{1}{m}\underbrace{\boxed{F(t)}}_{u(t)} + \lambda \cdot \dot{\tilde{x}}}$$

DINAMICA VARIÁVEL $\underline{s}$

$$\dot{s} = \frac{1}{m}\left(-c\dot{x} - Kx\right) - \ddot{x}_d + \frac{1}{m}\underbrace{\boxed{F(t)}}_{u(t)} + \lambda \cdot \dot{\tilde{x}}$$

DINAMICA VARIÁVEL s

PROPOSTA DE CONTROLE

CONSTANTE

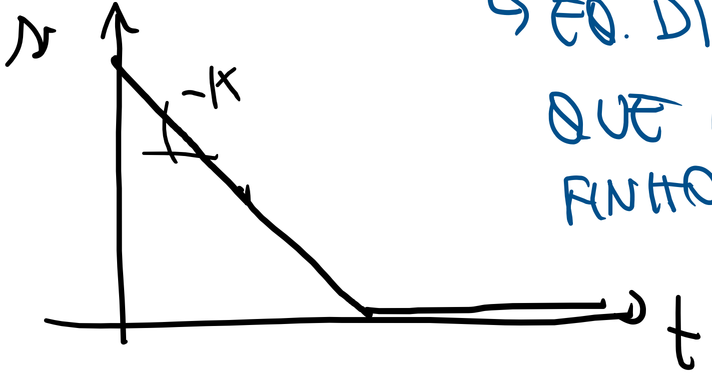
$$F(t) = c\dot{x} + Kx + \left(\ddot{x}_d + \lambda\dot{\tilde{x}}\right)m - K \cdot \text{SINAL}(s)$$

EM MALHA FECHADA

$$\boxed{\dot{s} = -K \cdot \text{sinal}(s)}$$

"ON-OFF"

EQ. DIF. EM s, DE 1ª ORDEM, QUE LEVA $s \to 0$ NUM TEMPO FINITO, E POR CONSEQUÊNCIA $\tilde{x} \to 0$



MAS QUAL A RELAÇÃO ENTRE O ERRO E s E $\tilde{x}$?

PODE-SE MOSTRAR QUE

$$\boxed{s(x,t) \le \phi \Rightarrow |\tilde{x}| \le \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}}$$

OU SEJA, UM ERRO E s É DIRETAMENTE RELACIONADO A UM ERRO EM x

$$s \to \boxed{\frac{1}{s+\lambda}} \to \boxed{\frac{1}{s+\lambda}} \to \cdots \to \boxed{\frac{1}{s+\lambda}} \to \tilde{x}$$

$$s = \left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)^{n-1}\tilde{x} = (s+\lambda)^{n-1}\tilde{x} \Rightarrow \boxed{\tilde{x} = \frac{1}{(s+\lambda)^{n-1}}\cdot s}$$

SE $s \to \phi$ PELO TVF

$$\lim_{t\to 0}\tilde{x} = \lim_{s\to 0} s\tilde{X}(s)$$

$$s = \frac{\phi}{s} \Rightarrow \boxed{\tilde{x} \to \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}}$$

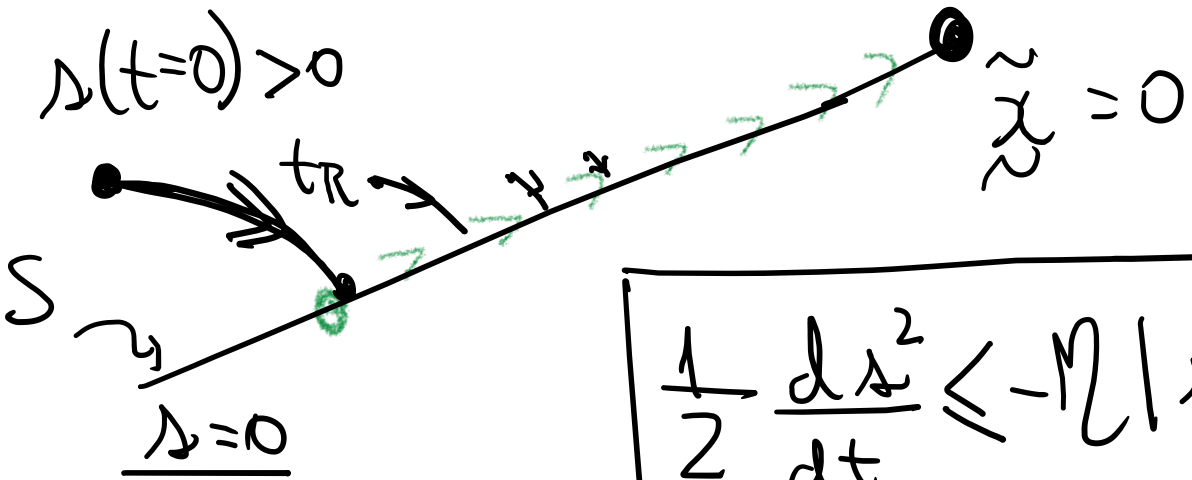
s é um degrau de amplitude ϕ

$\Downarrow$

O PROBLEMA ORIGINAL DE TRACKING DE ORDEM n É SUBSTITUÍDO POR UM PROBLEMA DE ESTABILIZ. DE ORDEM 1 $s \to 0$

ALÉM DISSO, TEMOS QUE GARANTIR QUE AS TRAJETÓRIAS QUE SAÍREM DE $\underline{S}$, VOLTEM RAPIDAMENTE P/ $\underline{S}$

P/ ISSO, DEFINIMOS A CONDIÇÃO DE ESCORREGAMENTO:

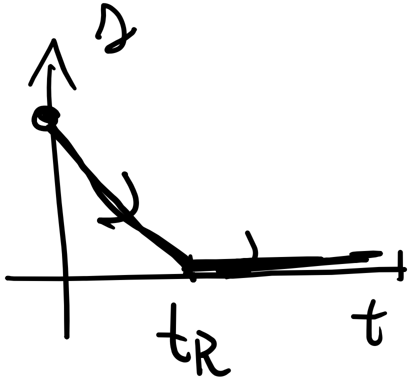


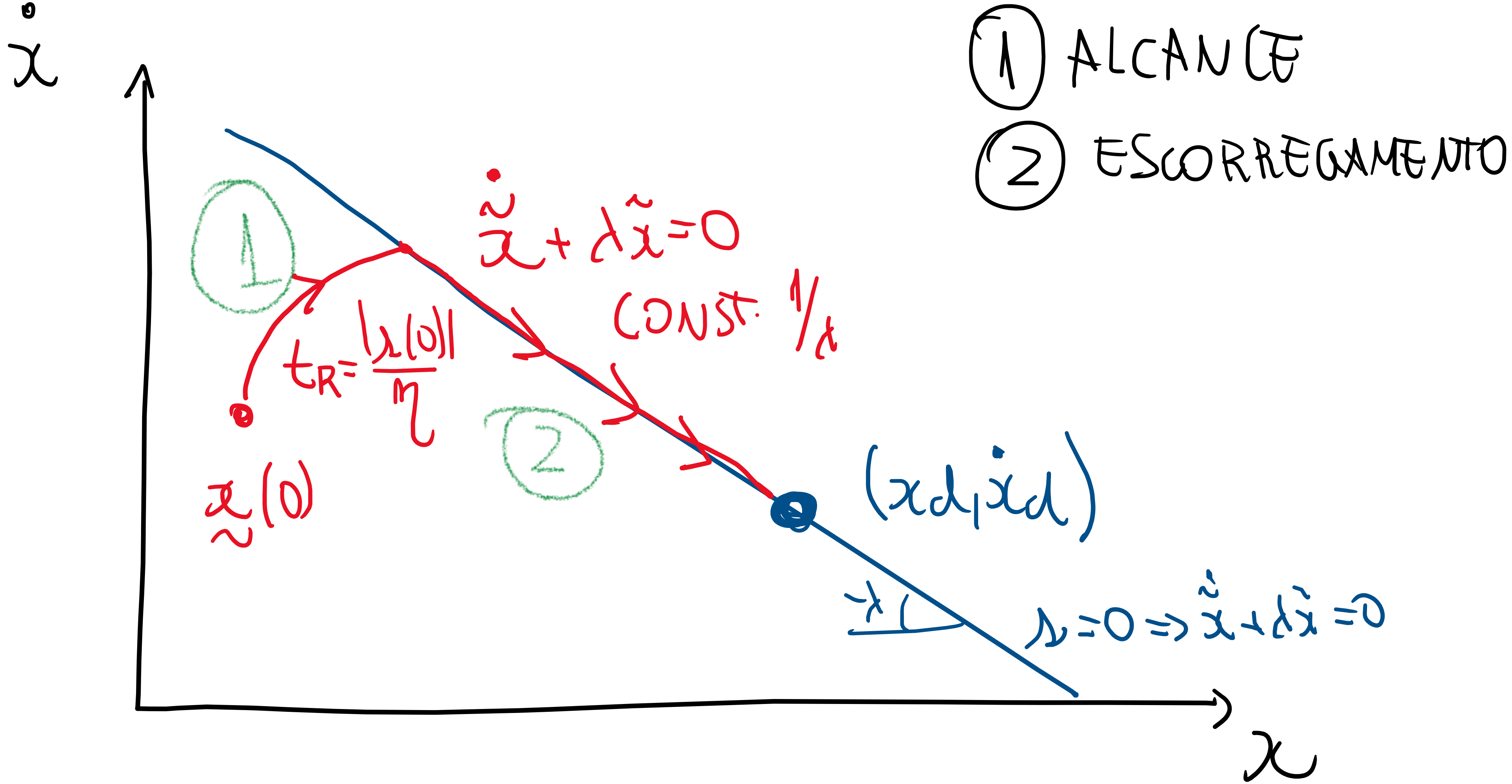
$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt} \le -\eta |s|} \Longrightarrow \boxed{t_R \le \frac{s(0)}{\eta}}$$

OU SEJA, AS TRAJETÓRIAS SÃO ATRAÍDAS P/ $\underline{S}$, E PERMANECEM LÁ, $\tilde{x} \to 0$!!!

$t_{ALCANCE} \to$ TEMPO P/ TRAJETÓRIA ATINGIR $\underline{S}$

$s(t=0) \neq 0 > 0 \leadsto t_R$ É O TEMPO EM QUE $s(t_R)=0$





1 ALCANCE
2 ESCORREGAMENTO
$\dot{x}$
x
1
2
$t_R = \frac{|s(0)|}{\eta}$
$\tilde{x}(0)$
$\dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x} = 0$
CONST. $1/\lambda$
$(x_d, \dot{x}_d)$
$-\lambda$
$s = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{x}} + \lambda\tilde{x} = 0$

$$\ddot{x} = \underbrace{f(x, \dot{x})} + u$$

- f NÃO CONHECIDA
- ESTIMATIVA $\hat{f}$
- ERRO ESTIMATIVA $|f - \hat{f}| \leq F$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a(t)\,\dot{x}^2 \cos 3x + u \\ 1 \leq a(t) \leq 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \hat{f} = -1{,}5\,\dot{x}^2 \cos 3x \\ F = 0{,}5\,|\dot{x}^2 \cos 3x| \end{array}\right.$$

$$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}$$

$$\dot{s} = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}$$

$$\left[\dot{s} = f + \cancel{u} - \ddot{x}_d + \lambda \dot{\tilde{x}}\right.$$

$\hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}$ (u EQUIVALENTE)

VAMOS INTRODUZIR UM TERMO DESCONTÍNUO EM s PARA GARANTIR A CONDIÇÃO DE ESCORREGAMENTO

$$\boxed{u = \hat{u} - K\,\mathrm{sgn}(s)}$$

$\Rightarrow$ EM MALHA FECHADA

$$\underline{\dot{s} = f - \hat{f} - K\,\mathrm{sgn}(s)}$$

$$\dot{s} = f - \hat{f} - K\,\mathrm{sgn}(s)$$

P/ GARANTIR A CONDIÇÃO DE ESCORREGAMENTO

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}s^2 \leq -\eta|s|$$

$$s\cdot\dot{s} = (f - \hat{f} - K\,\mathrm{sgn}(s))\cdot s$$

$$\underbrace{(f-\hat{f})}_{\leq F}s - K\cdot\underbrace{|s|}_{\mathrm{sgn}(s)s=|s|} \leq -\eta\cdot|s|$$

$$K|s| \geq \eta|s| + F\cdot s$$

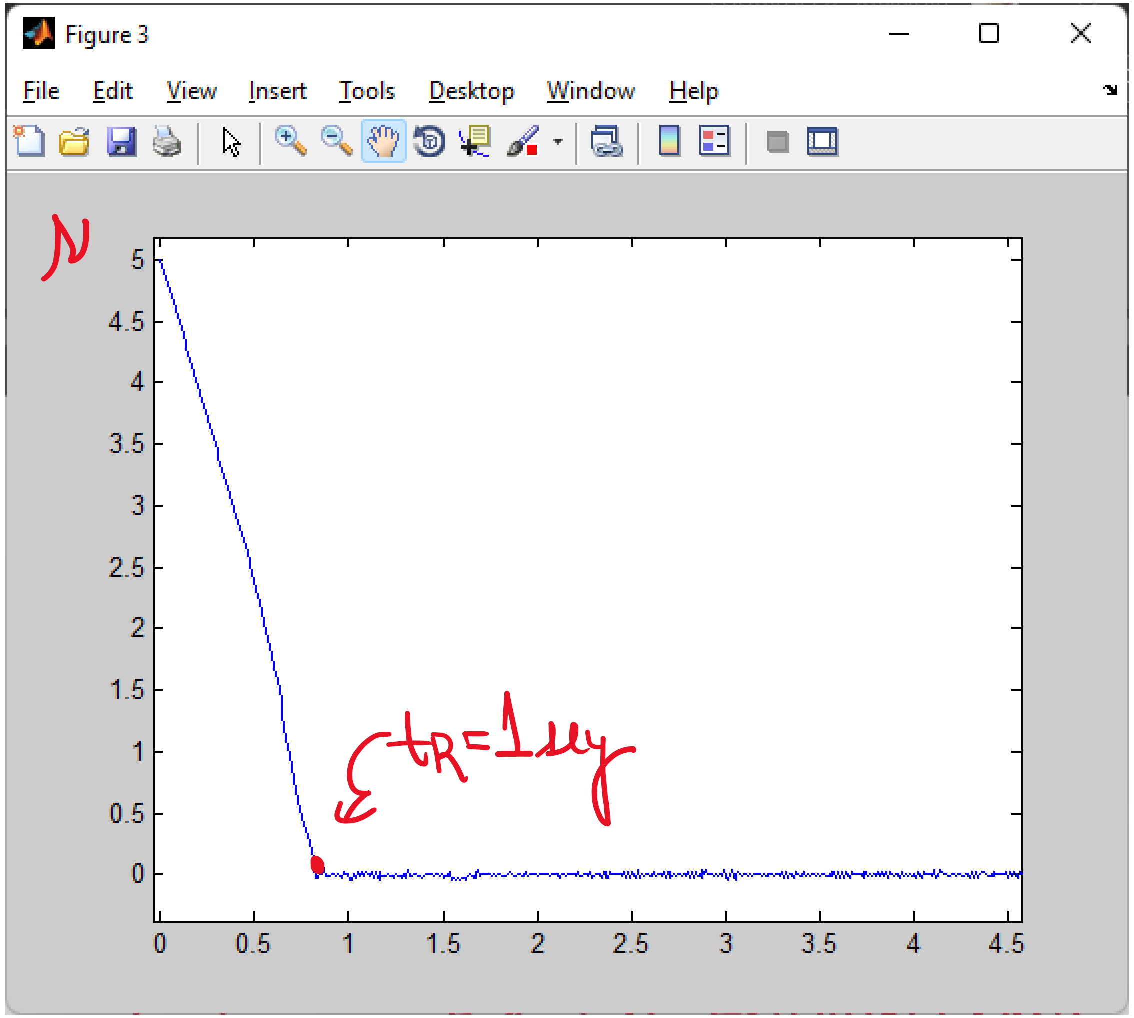
$$\Downarrow$$

$$\text{se } \boxed{K \geq \eta + F}$$

SERÁ SEMPRE SATISFEITA

TERMO DESCONTÍNUO $K\,\mathrm{sgn}(s)$ DEPENDE DO ERRO DE MODELAGEM (F) E DO TEMPO DE ALCANCE REQUERIDO

$\uparrow F \Rightarrow \uparrow$ TERMO DESCONTÍNUO



$\lambda = 1 \Rightarrow \quad \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0$

$M = 5$

↳ DINAMICA ESCORREGAMENTO

SIST. 1º ORDEM $T = 1/\lambda = 1$

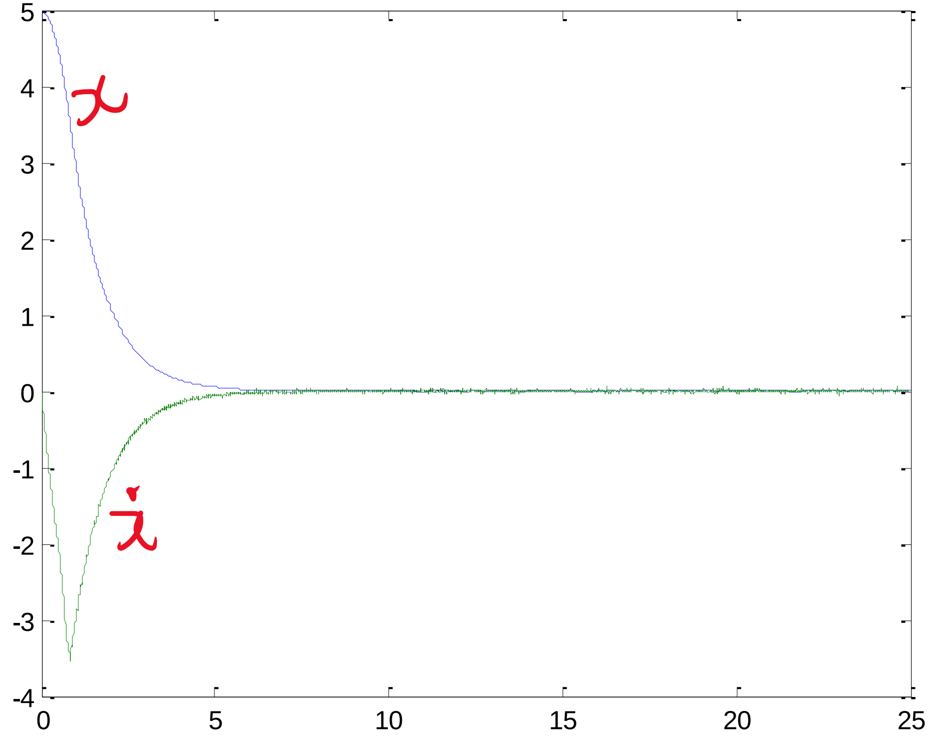
$\Rightarrow$ ESTABIL. 2% $= 4.T = 4$ seg

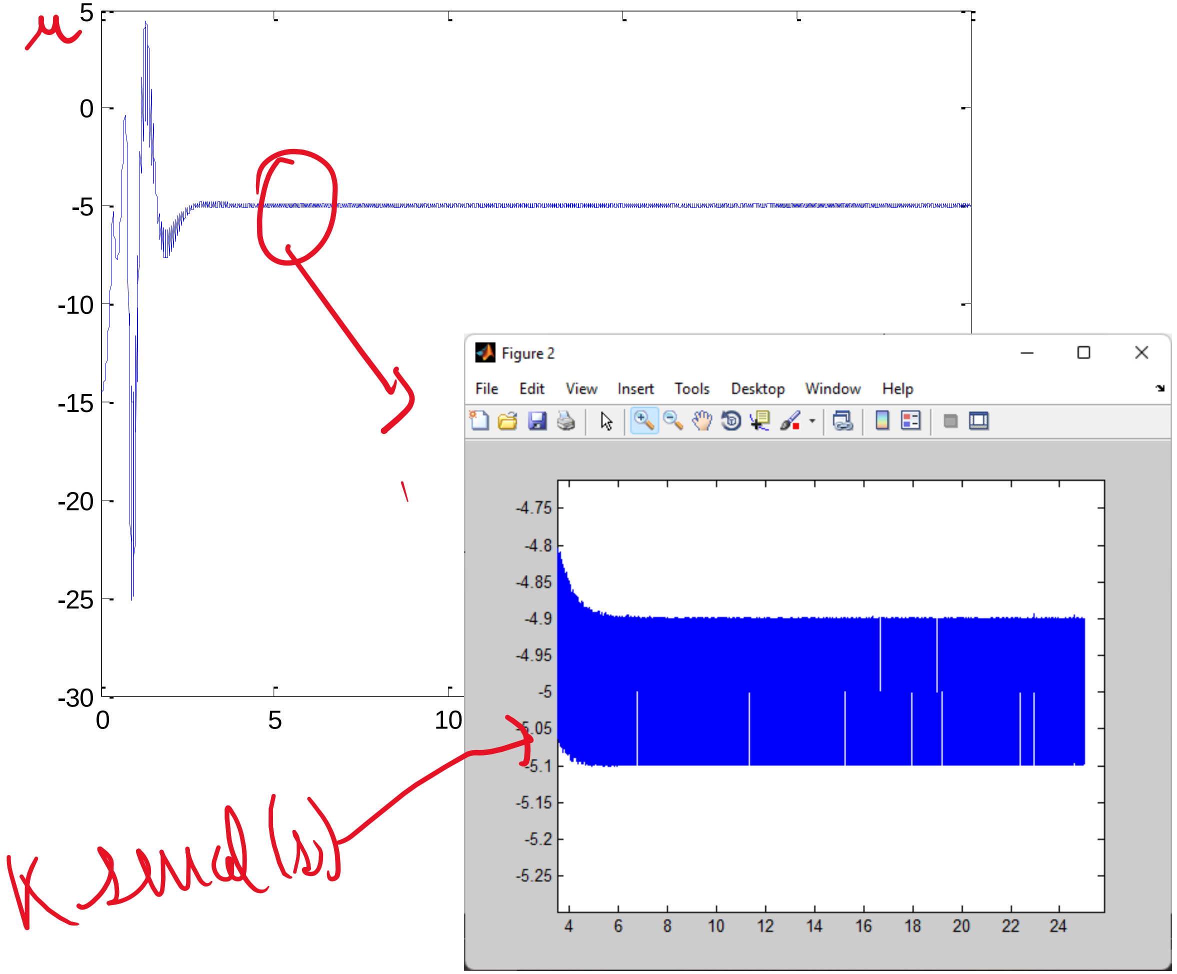
$x(0) = 5$

$\dot{x}(0) = 0$

$\Rightarrow s(0) = \dot{\tilde{x}}(0) + \lambda \tilde{x}(0) = 5$

$t_R = \dfrac{s(0)}{M} = \dfrac{5}{5} = 1$ seg





OSCILAÇÃO EM ALTA
FREQ. CHATTERING

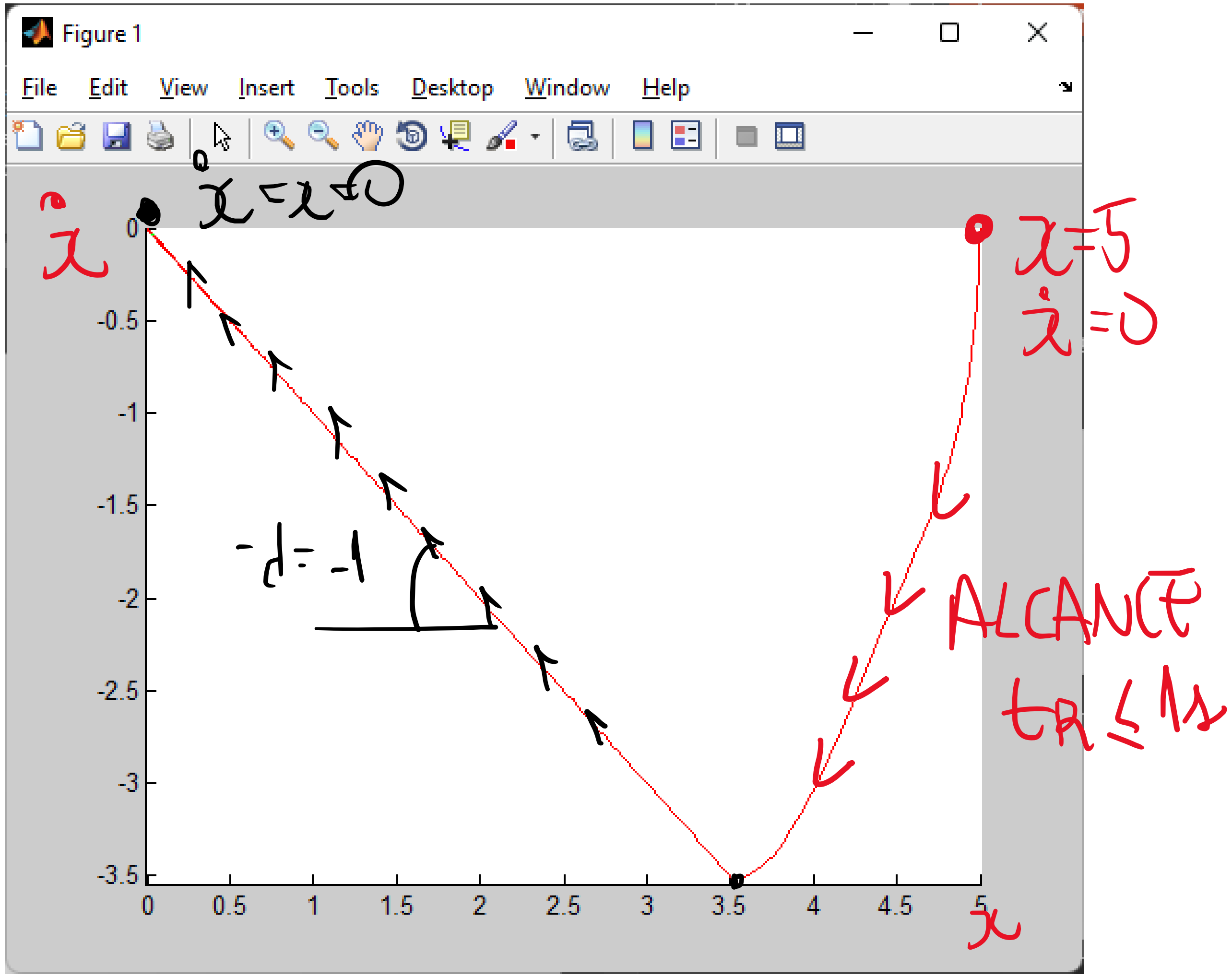
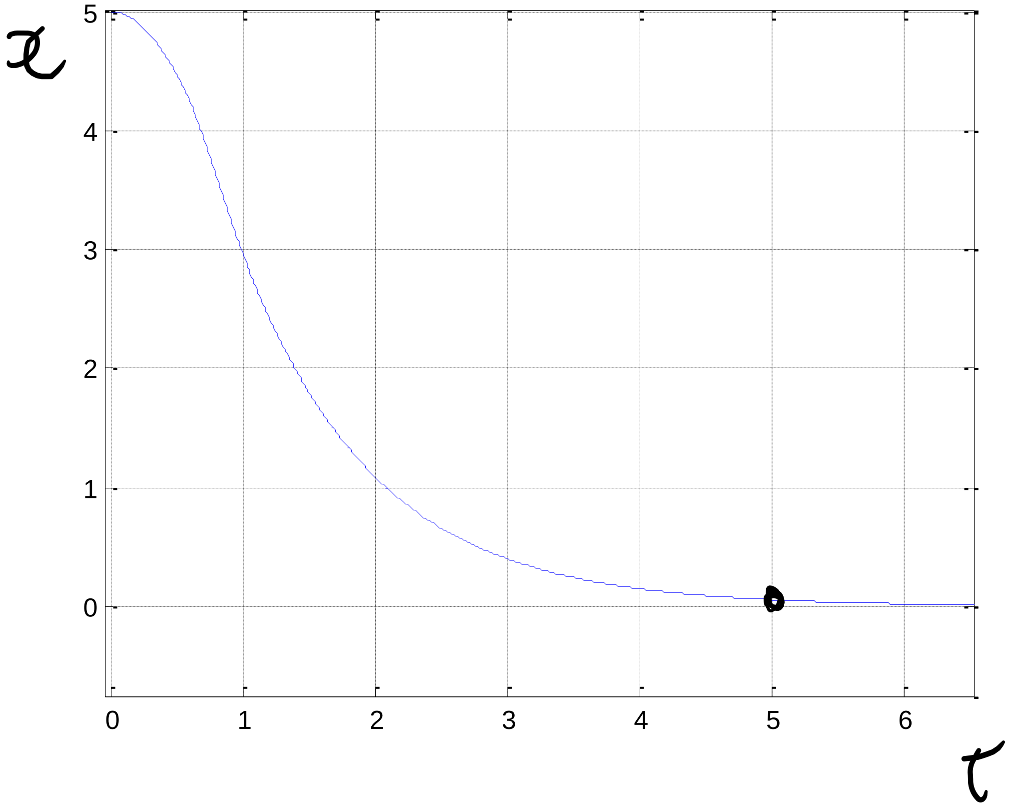
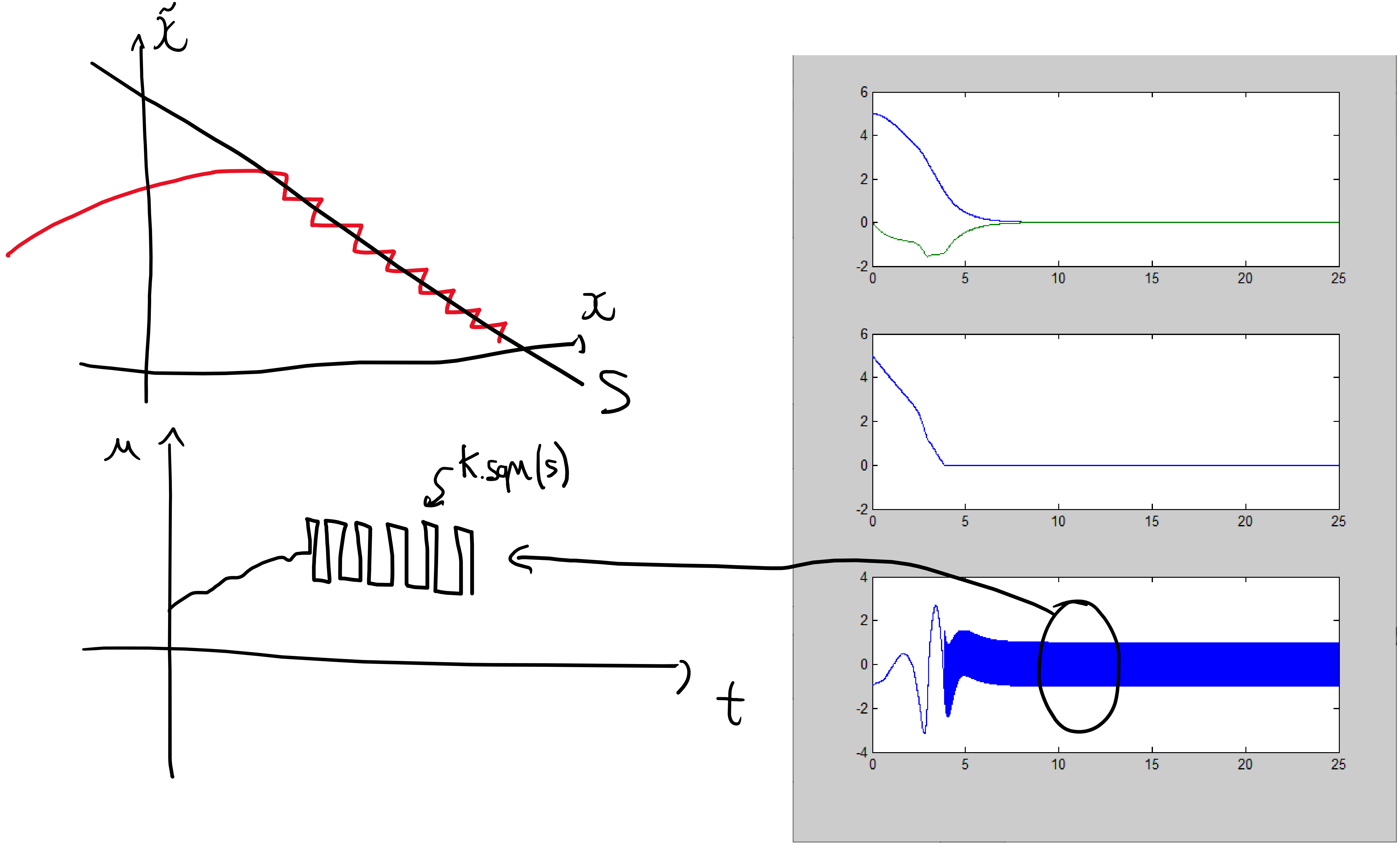


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
ALCANCE
tR ≤ 1s
x = 5
ẋ = 0
x = x = 0
-d = -1

$t_R = 1$ seg $4T = 4$ seg $= t_s^{2\%}$ ESCORREGANDO



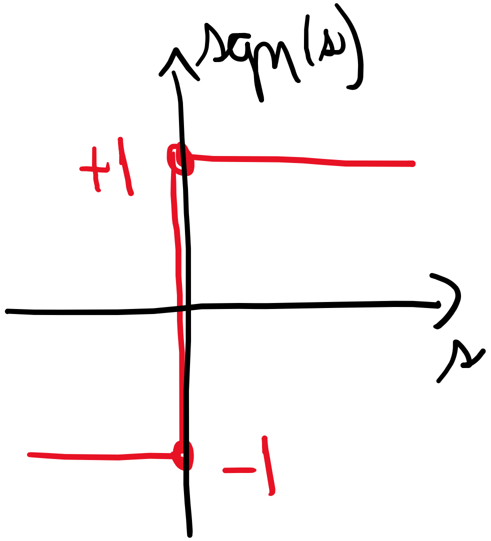


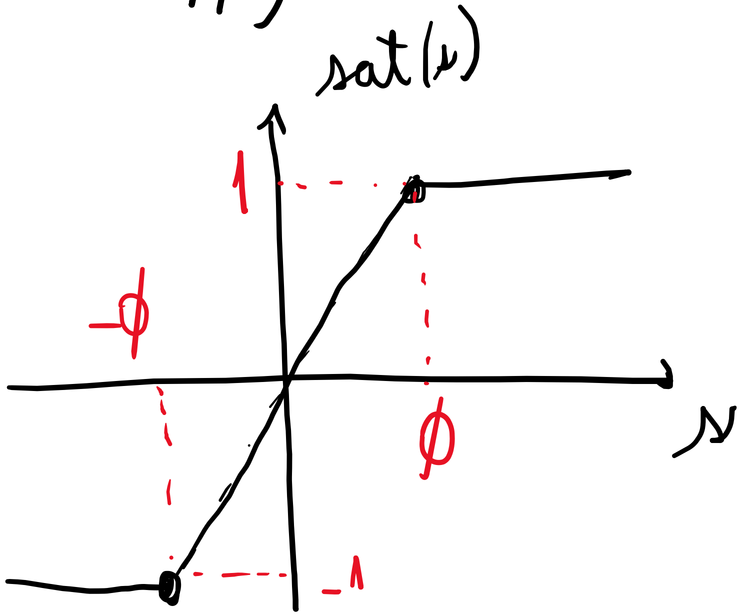
$\tilde{x}$
x
S
u
t
k.sgn(s)
6
4
2
0
-2
0
5
10
15
20
25
4
-4

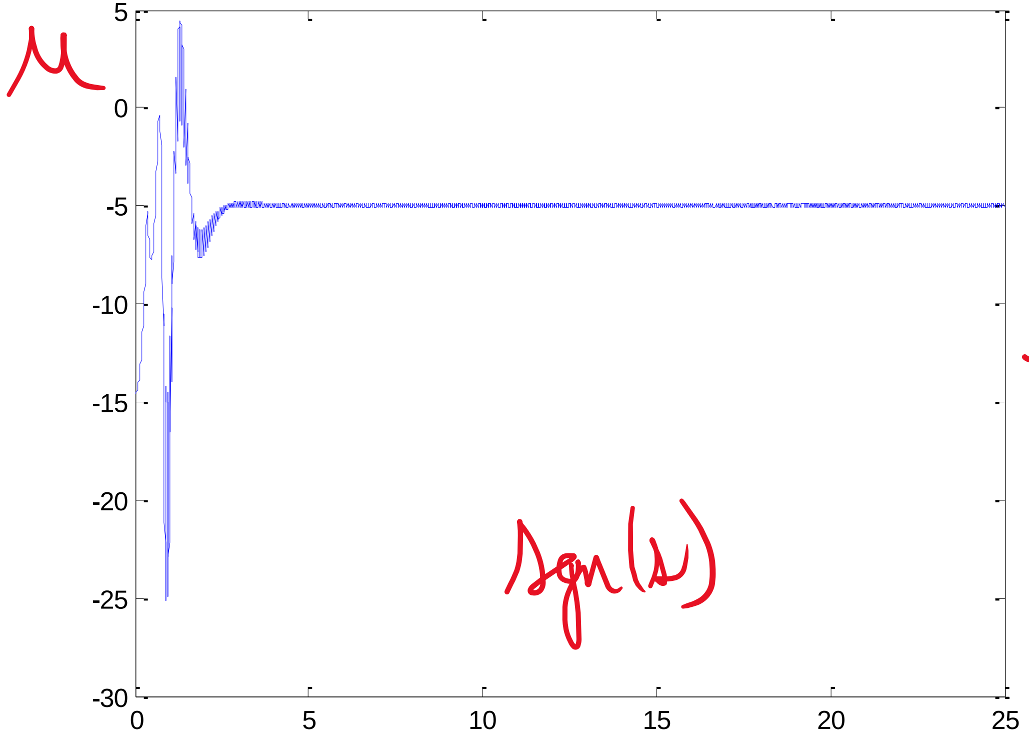
SOLUÇÃO

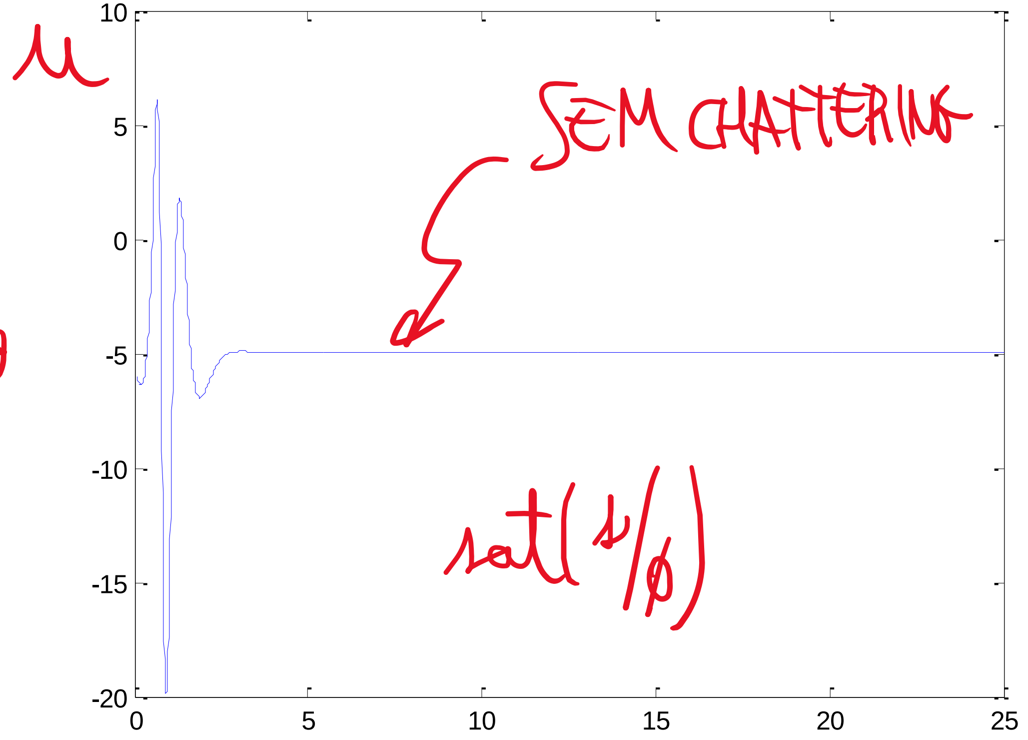
TROCAR

$$\mathrm{sgn}(s) \rightsquigarrow \mathrm{sat}(s/\phi)$$

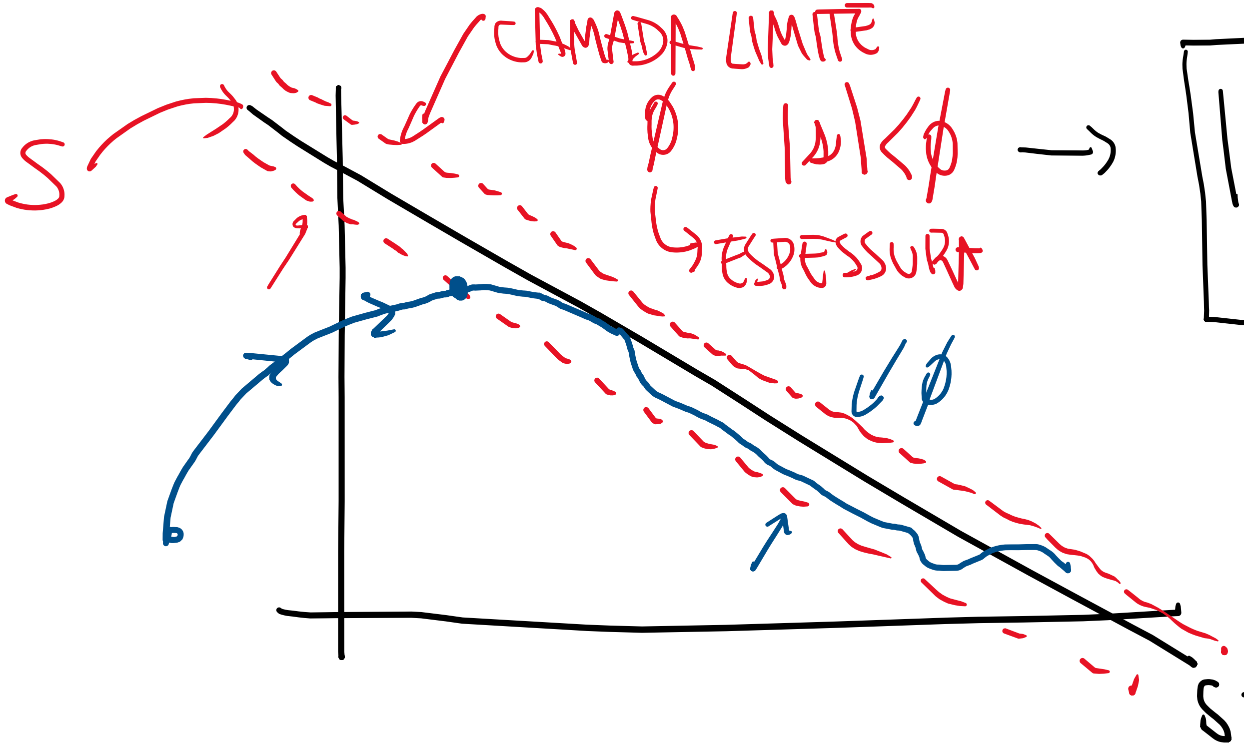








$\phi = 0{,}1$



$$\boxed{|\tilde{x}| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}}$$

$\phi = 0{,}1$

$\lambda = 1 \Rightarrow$

$\tilde{x} \leq 0{,}1$

A CAMADA LIMITE INTRODUZ UM ERRO DE POSICIONAMENTO MAS ELIMINA O CHATTERING

CONTROLE INTEGRAL

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n} \cdot \int \tilde{x}\, d\tau$$

POR EXEMPLO P/ $n=2$

$$s = \dot{\tilde{x}} + 2\lambda\tilde{x} + \lambda^2 \cdot \int \tilde{x}\, d\tau$$

- s é limitado por $\phi \Rightarrow \tilde{x} \to 0$
- ELIMINA ERRO REGIME
- SE ASSOCIADO sat$(1/\phi)$, ELIMINA CHATTERING

AJUSTE PARÂMETROS

α, η, ϕ

α → LARGURA DE BANDA RESPOSTA MALHA FECHADA APÓS ATINGIR CAMADA LIMITE

$M = 2 \Rightarrow \dot{\tilde{x}} + \alpha \tilde{x} = 0$ → α REGULA O TEMPO RESPOSTA

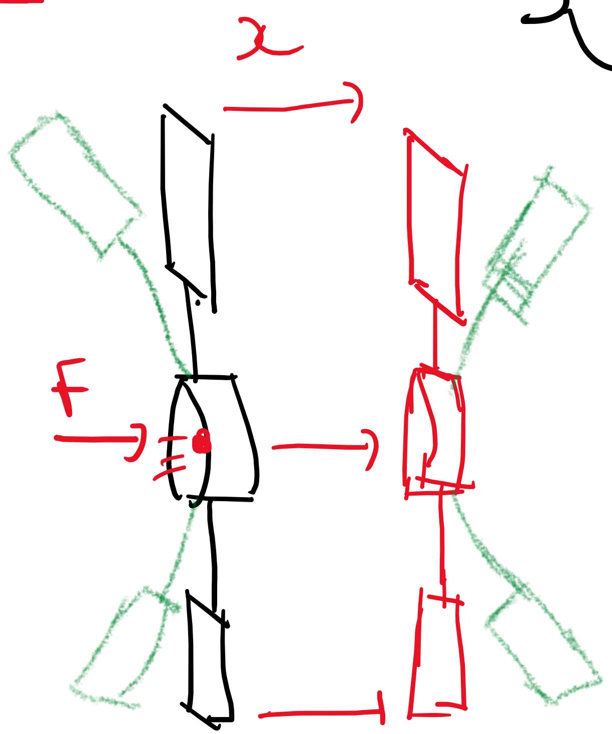
3 REGRAS SINTONIZAR $\underline{\lambda}$

1) λ DEVE SER MENOR QUE O 1º MODO RESSONANTE NÃO MODELADO

$$\underline{\lambda} < \lambda_R = \frac{2\pi\nu_R}{3}$$

ν_R 1º MODO VIBRAR Hz

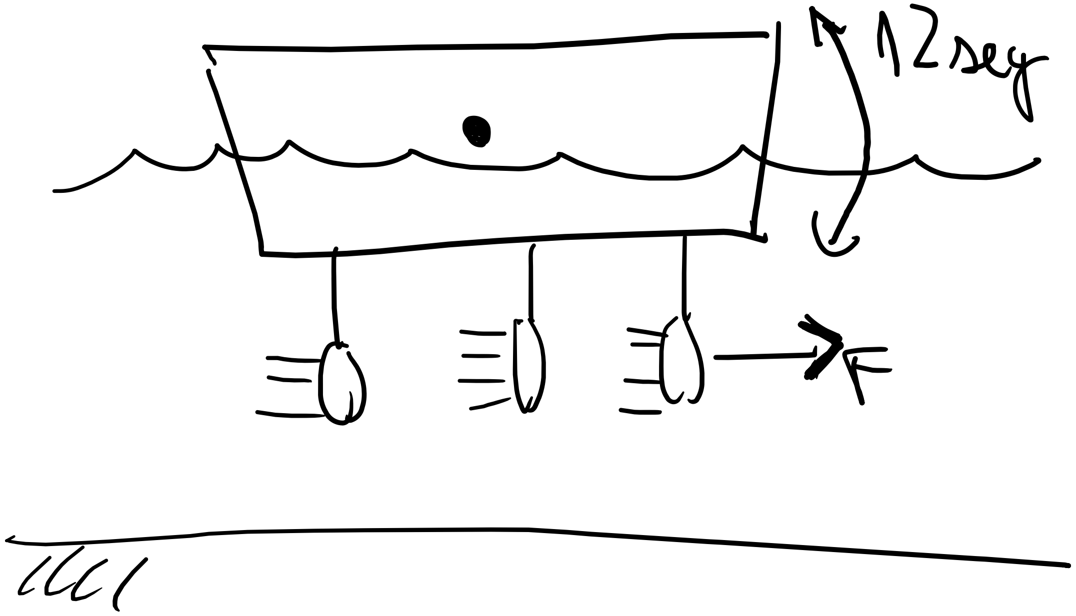
3 → 1/3 POR SEGURANÇA

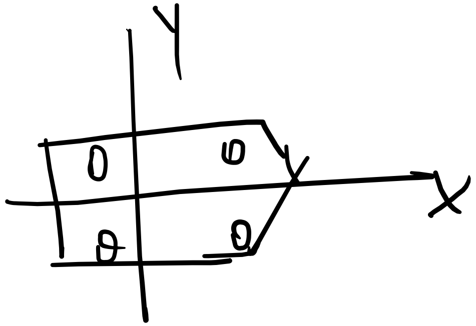


$\underline{m\ddot{x} = F}$

↑ CORPO RÍGIDO

Ex)





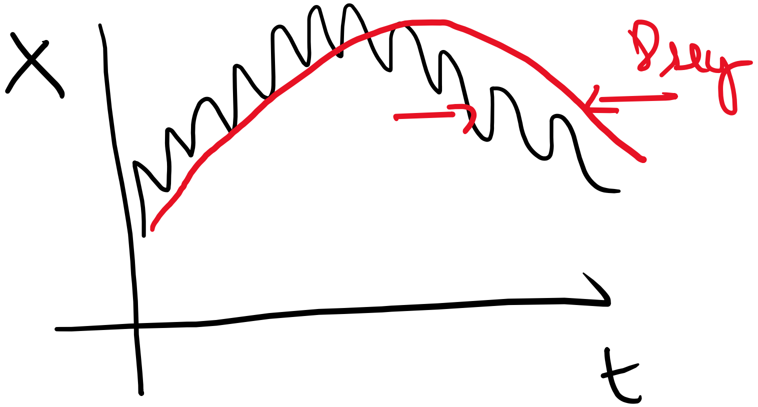
$$m\ddot{x} + c\dot{x} = F$$

$$\nu_R = 0{,}5 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \alpha < \frac{0{,}5}{3} = \underline{\underline{0{,}16 \text{ rad/s}}}$$

REGRA 2) ATRASO DE TRANSPORTE / MEDIDA

$$\lambda < \lambda_A = \frac{1}{3T_A}$$



8 seg atraso entre POSIÇÃO REAL E A POSIÇÃO MEDIDA FILTRADA

$$\lambda < \frac{1}{3 \cdot 8} = \frac{1}{24} = 0{,}042\ rad/s$$

3) AMOSTRAGEM

$\lambda < \lambda_s = \frac{1}{5} \varphi_{SAMPLE}$

NAVIOS DP = 1 seg

$\lambda < \frac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}2$ rad/s

1) MODOS NÃO MODELADOS $\lambda < 0{,}16$ rad/s

2) ATRASO $\boxed{\lambda < 0{,}042 \text{ rad/s}} \rightarrow \boxed{\lambda < 0{,}042 \text{ rad/s}}$

3) AMOSTRAGEM $\lambda < 0{,}2$ rad/s

DINÂMICA MALHA FECHADA LAR. BANDA 0,042 rad/s

$0{,}042 \rightarrow t_s^{2\%} = \frac{4}{\lambda} = 95$ seg

2) η → tempo de alcance

$$t_R = \frac{s(0)}{\eta} \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{s(0)}{t_R}}$$

3) ϕ → ESPESSURA DA CAMADA LIMITE

$$\tilde{x} = \frac{\phi}{\lambda^{m-1}}$$

bom REGIME TOLERAVEL