Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos - PMR

Aula 5 – Feedback Linearization

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

TIPO 2) LINEARIZAÇÃO ENTRADA-SAÍDA (PARCIAL)

$$\begin{cases} \dot{\underset{\sim}{x}} = f(\underset{\sim}{x}, u) \\ y = h(\underset{\sim}{x}) \end{cases}$$

OBJETIVO PROJETAR $u(t)$ - CONTROLE PARA QUE A SAÍDA $y(t)$ SIGA TRAJETÓRIA $y_D(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$y = x_1 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 x_3 + (x_2+1)\dot{x}_3$$

$$\ddot{y} = (x_1^5 + x_3)(\cos x_2 + x_3) + (x_2+1)(x_1^2+u) \leftarrow$$

$$\boxed{\ddot{y} = f(\underset{\sim}{x}) + g(\underset{\sim}{x}) \cdot u}$$

$$f(\underset{\sim}{x}) = (x_1^5 + x_3)(\cos x_2 + x_3) + (x_2+1)x_1^2$$

$$g(\underset{\sim}{x}) = (x_2+1)$$

$$u = \frac{1}{g(\underset{\sim}{x})} \cdot \left[-f(\underset{\sim}{x}) + v\right]$$

com $v(t) = \ddot{y}_d - K_1 \dot{\tilde{y}} - K_0 \tilde{y}$

$$y = x_1 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 + \dot{x}_2 x_3 + (x_2+1)\dot{x}_3$$

$$\dddot{y} = (x_1^5 + x_3)(\cos x_2 + x_3) + (x_2+1)(x_1^2 + u)$$

$$\boxed{\ddot{y} = f(\underset{\sim}{x}) + g(\underset{\sim}{x}) \cdot u}$$

$$f(\underset{\sim}{x}) = (x_1^5 + x_3)(\cos x_2 + x_3) + (x_2+1)x_1^2$$

$$g(\underset{\sim}{x}) = (x_2+1)$$

$$u = \frac{1}{g(\underset{\sim}{x})} \cdot \left[-f(\underset{\sim}{x}) + v \right]$$

COM $v(t) = \ddot{y}_d - K_1 \dot{\tilde{y}} - K_0 \tilde{y}$

EM MALHA FECHADA

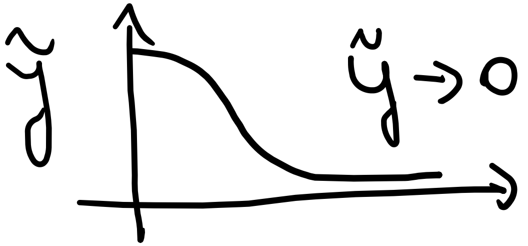
$$\ddot{y} = v$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}_d - K_1 \dot{\tilde{y}} - K_0 \tilde{y}$$

$$\tilde{y} = y - y_d \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\tilde{y}} + K_1 \dot{\tilde{y}} + K_0 \tilde{y} = 0}$$

erro $\tilde{y} \to 0$ se K_0, K_1 FOREM ESCOLHIDOS ADEQUADAMENTE



SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2+1)x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

CONTROLE

$$u = \frac{1}{g(\underset{\sim}{x})} \cdot \left[-f(\underset{\sim}{x}) + v \right]$$

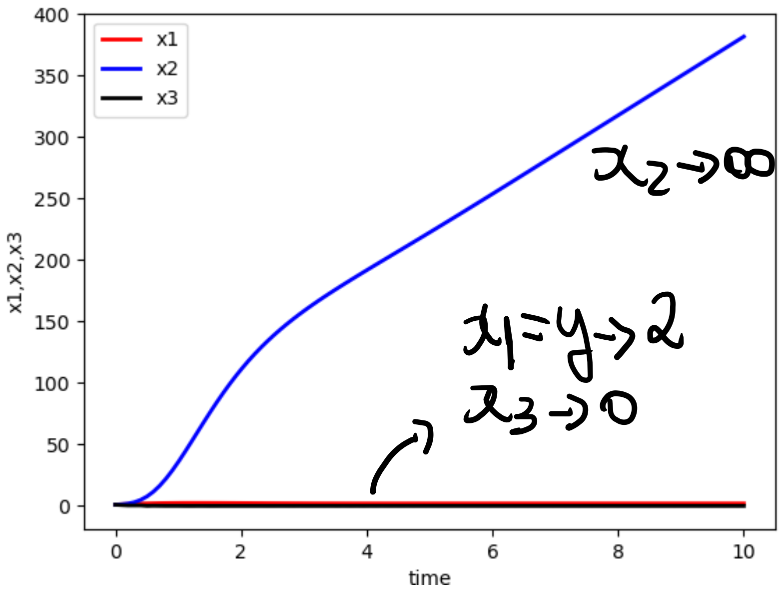
COM $v(t) = \ddot{y}_d - K_1 \dot{\tilde{y}} - K_0 \tilde{y}$

↳ GARANTE $\tilde{y} \to 0 \Rightarrow y \to y_d$

$$\boxed{\ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{y}} + 2\tilde{y} = 0}$$

OBS: SISTEMA 3º ORDEM (3 ESTADOS)

- CONTROLE FOI OBTIDO COM 2 DERIVADAS DE y $\Rightarrow$ GRAU RELATIVO 2
- HÁ $3-2=1$ ESTADO NÃO CONTROLADO
- DINÂMICA INTERNA QUE DEVE SER ESTUDADA POR SIMULAÇÃO



$x_2 \to \infty \Rightarrow$ DINÂMICA INTERNA INSTÁVEL

$x_1 = y \to 2$

$x_3 \to 0$

Ex) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases}$

- ORDEM 2 (2 ESTADOS)
- G.R = 1
- ⇒ 2 − 1 = 1 ESTADO NA DINÂMICA INTERNA

$y = x_1$

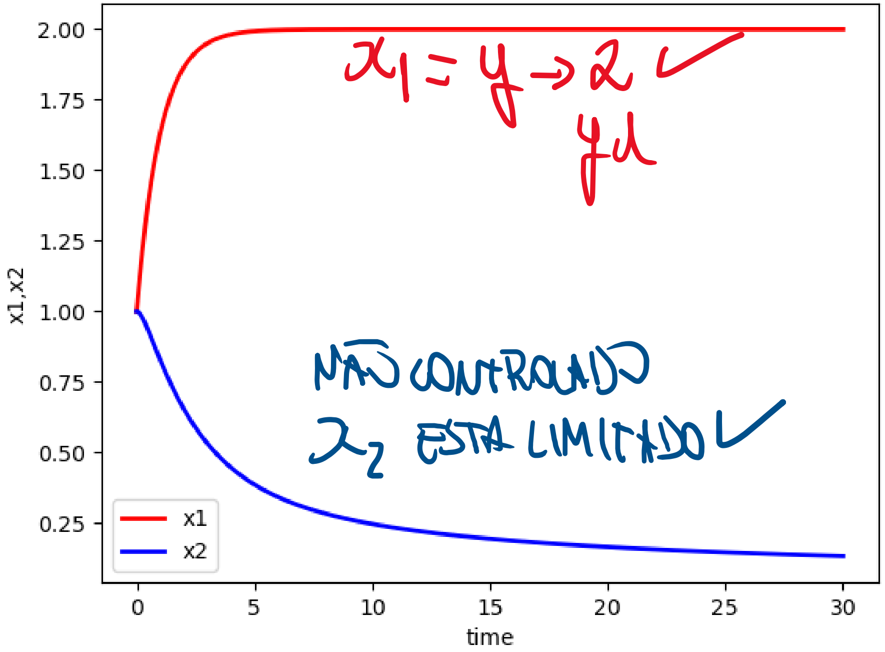
$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^3 + u$ → APARECEU u NA 1ª DERIVADA DE y ⇒ GRAU RELATIVO 1

$\Rightarrow \begin{cases} u = -x_2^3 + v \\ v = \dot{y}_d(t) - K.\tilde{y} \end{cases}$

EM MALHA FECHADA

$\dot{y} = v \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_d - K\tilde{y} \Rightarrow \boxed{\dot{\tilde{y}} + K.\tilde{y} = 0}$

$\tilde{y} \to 0$ se $K > 0$



Ex) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u = -x_2^3 + v \\ v = \dot{y}_d(t) - K \cdot \tilde{y} \end{cases}$ 1

DINÂMICA INTERNA

$\dot{x}_2 = u$

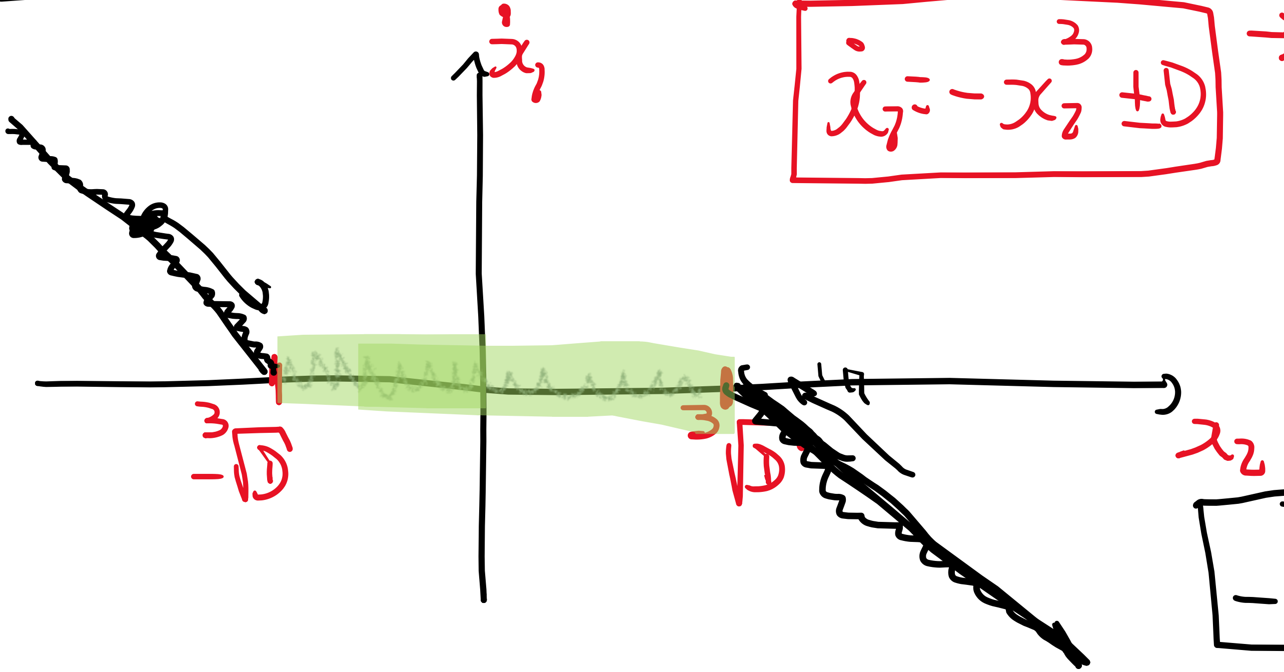
$\dot{x}_2 = -x_2^3 - \tilde{y} + \dot{y}_d$

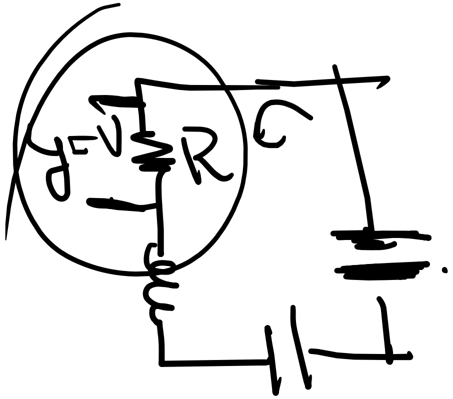
$$\boxed{\dot{x}_2 + x_2^3 = -\tilde{y} + \dot{y}_d}$$

$\tilde{y} \to 0$; $\dot{y}_d$: LIMITADO

$|-\tilde{y} + \dot{y}_d| < D$ LIMITADA

$$\boxed{\dot{x}_2 = -x_2^3 \pm D}$$





$$\boxed{-\sqrt[3]{D} \leq x_2 \leq \sqrt[3]{D}} \Rightarrow \underline{x_2 \text{ É LIMITADO}}$$

MAS SE)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ x_2 = -u \end{cases} \rightarrow \boxed{\dot{x}_2 - x_2^3 = \tilde{y} - \dot{y}_d} \rightarrow \text{INSTÁVEL}$$

→ OU SEJA, O SISTEMA TEORICAMENTE ACOMPANHA A TRAJETÓRIA $\underline{y_d}$ MAS UM DOS ESTADOS EXPLODE

É MUITO DIFÍCIL ESTUDAR A DINÂMICA INTERNA → NÃO LINEAR

NÃO AUTÔNOMA

EXCITADA DINÂMICA DE MALHA FECHADA

→ SIMULAÇÃO

SIST. NÃO LINEAR

FORMALIZAR STATE-OUTPUT LINEARIZATION

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1^4 - x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_3 + 8x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_3 + 8\dot{x}_2 = -x_3 + x_1^4 - x_1^2 + u - 8x_2 + 8x_3$$

$$\boxed{\ddot{y} = x_1^2(x_1^2 - 1) - 8x_2 + 7x_3 + u}$$

⇒ ORDEM 3

⇒ GRAU RELATIVO 2

⇒ DINÂMICA INTERNA 1

FORMA NORMAL

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{r-1} \end{bmatrix}$$

$r =$ G. R.

FORMA NORMAL

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{r-1} \end{bmatrix}$$

$r = G.R.$

$$\begin{cases} \dot{\underset{\sim}{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \alpha(\mu, \psi) + \beta(\mu, \psi).u \end{bmatrix} \\ \dot{\underset{\sim}{\psi}} = w(\mu, \psi) \\ \mu, \psi = \text{ESTADOS NORMAIS} \\ \psi = \text{DINÂMICA INTERNA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1^4 - x_1^2 + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$r = 2$

$$\mu = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 + 8x_2 \end{bmatrix}$$

ESTADOS CONTROLADOS

ψ = ESTADOS NÃO CONTROLADOS DEVE SATISFAZER

1) $\nabla \psi \cdot g = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0}$$

2) $z = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 + 8x_2 \\ \psi \end{bmatrix}$ JACOBIANO NÃO SINGULAR P/ $\forall x$

2) $z = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 + 8x_2 \\ \psi \end{bmatrix}$ JACOBIANO NÃO SINGULAR P/ $\forall x$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \neq 0$$

COND(1)

$$\cancel{8 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}}^{\to 0} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \neq 0$$

$$(1) \text{ e } (2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \neq 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\psi = 8x_2} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_3 + 8x_2 \\ \psi = 8x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

TRANSF. VARIÁVEIS

$$\begin{cases} \mu_1 = x_1 \\ \mu_2 = x_3 + 8x_2 \\ \psi = 8x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \mu_1 \\ x_2 = \psi/8 \\ x_3 = \mu_2 - \psi \end{cases}$$

TRANSF. VARIÁVEIS

TRANSF. INVERSA

$$\Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 + 8x_2 \\ 8\dot{x}_2 \end{pmatrix} \ldots \Rightarrow$$

DIN. CONTROLADA

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_1^2(\mu_1^2 - 1) + 7\mu_2 - 8\psi + u \\ 8\mu_2 - 9\psi \end{bmatrix}$$

INTERNA

DIN. CONTROLADA

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_1^2(\mu_1^2-1)+7\mu_2-8\psi+u \\ 8\mu_2-9\psi \end{bmatrix}$$

INTERNA

E A DINÂMICA INTERNA??

$$\boxed{\dot{\psi} = -9\psi + 8\mu_2}$$

DINÂMICA ZERO $\rightarrow \mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$

$\Rightarrow \dot{\psi} = -9\psi \rightarrow$ É ESTÁVEL

DINÂMICA INTERNA É LIMITADA

$\Rightarrow$ CONTROLE u:

$$\begin{cases} u = v - \mu_1^2(\mu_1^2-1) - 7\mu_2 + 8\psi \\ v = -K_1\dot{y} - K_0 y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v$$

$\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$ se K_1, K_0 FOREM BEM PROJETADOS

BACKSTEPPING

$$\begin{cases} \dot{y} = v & \leftarrow \text{SAIDA DE INTERESSE} \\ \ddot{z} + \dot{z}^3 + yz = 0 & \leftarrow \text{DINAMICA INTERNA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = y \\ \psi_1 = z \\ \psi_2 = \dot{z} \end{cases}$$ FORMA NORMAL

PASSO 1) DEFINIR μ PARA ESTABILIZAR A DINÂMICA INTERNA

$$y_0 = z^2 \Rightarrow \underbrace{\ddot{z} + \dot{z}^3 + z^3 = 0}_{\text{ESTÁVEL}}$$

Pg 259-261

$$V_0 = \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{4}z^4 \quad \text{(P.D.)}$$

$$\dot{V}_0 = \dot{z}\ddot{z} + z^3\dot{z} = -\dot{z}^4 \quad \text{(SND)}$$

PASSO 2) $\dot{V}_0$ P/ SISTEMA COMPLETO

$$\dot{V}_0 = \dot{z}\ddot{z} + z^3\dot{z} = \dot{z}\left(-\dot{z}^3 - yz\right) + z^3\dot{z} =$$

$$= -\dot{z}^4 - z\dot{z}\left(y - z^2\right)$$

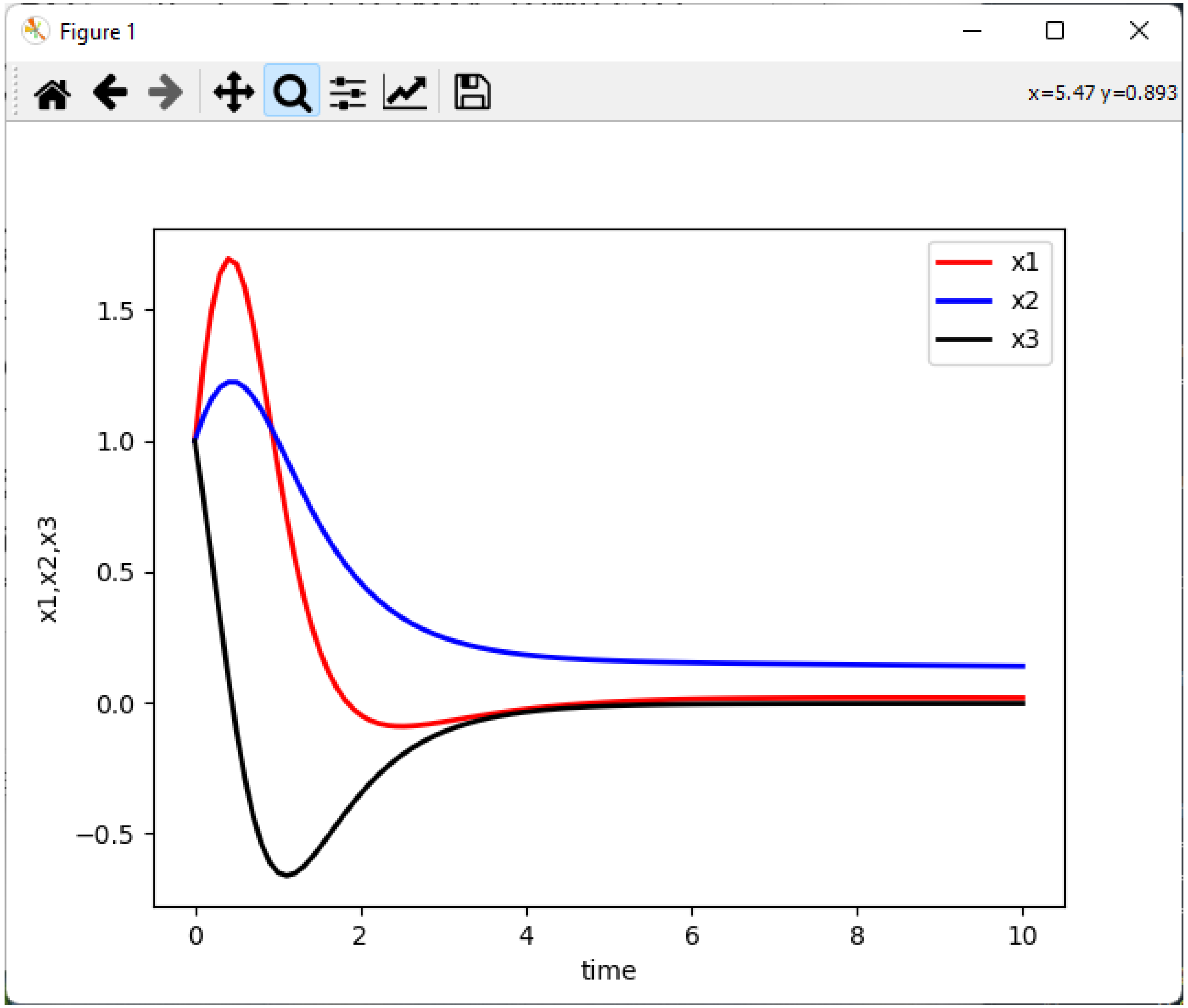
PASSO 3) INCLUIR PARCELA ERRO EM V_0

$$\boxed{V = V_0 + \frac{1}{2}\left(y - z^2\right)^2} \quad \text{É PD}$$

$$\dot{V} = -\dot{z}^4 + \left(y - z^2\right)\left(v - 3z\dot{z}\right)$$

se $\boxed{v = 3z\dot{z} - \left(y - z^2\right)} \Rightarrow \dot{V} = -\dot{z}^4 - \left(y - z^2\right)^2$

SND !!!



- CONTROLAMOS TODOS OS ESTADOS

- PERMITE RECURSIVIDADE
  Pg 259-261

FORMALIZAÇÃO DA LINEARIZAÇÃO ENTRADA ESTADO

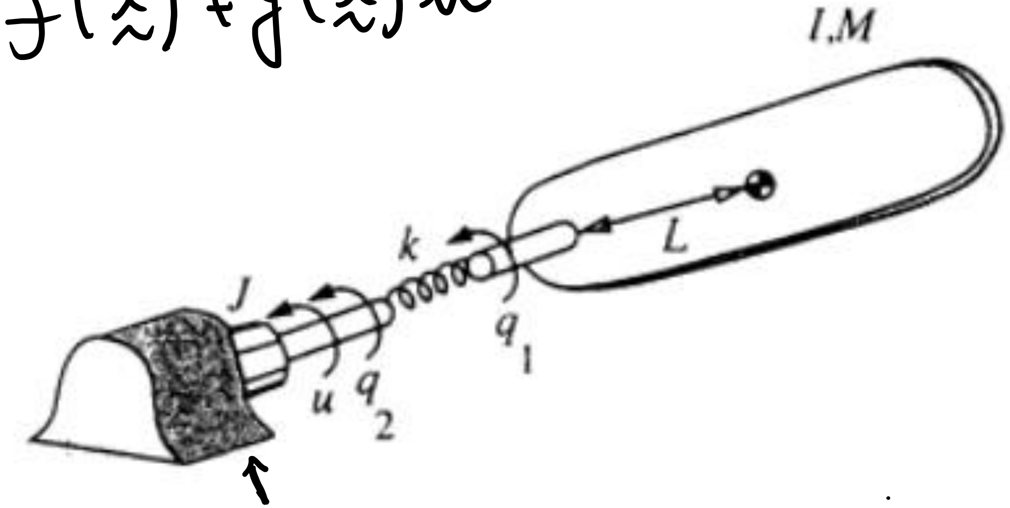
DEFINIÇÃO

$$ad_{\underset{\sim}{f}}\,\underset{\sim}{g} = \nabla \underset{\sim}{g} \cdot \underset{\sim}{f} - \nabla \underset{\sim}{f} \cdot \underset{\sim}{g}$$

$$L_{\underset{\sim}{f}}\, h = \nabla \underset{\sim}{h} \cdot \underset{\sim}{f}$$

$$(0)\quad \begin{cases} I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{cases}$$

$$(1)\quad \left[\ \dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})\,u \right.$$



$$\underset{\sim}{x} = [q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2]$$

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I}\,\text{sen}\,x_1 - \frac{K}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ K/J\,(x_1 - x_3) \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix}$$

1) CONTROLABILIDADE

$\tilde{x} = [\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2]$ $\qquad \dot{x} = f(\tilde{x}) + g(\tilde{x})u$

$$f = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{MgL}{I}\operatorname{sen} x_1 - \frac{K}{I}(x_1 - x_3) \\ x_4 \\ K/J\,(x_1 - x_3) \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g & ad_f g & ad_f^2 g & ad_f^3 g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -K/IJ \\ 0 & 0 & K/IJ & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & K/J^2 \\ \frac{1}{J} & 0 & \frac{-K}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

→ RANK 4

↳ CONTROLÁVEL

∇f

$$ad_f g = \cancel{\nabla g \cdot f} - \nabla f\, g = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{MgL}{I}\cos x_1 - \frac{K}{I} & 0 & \frac{K}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J} & 0 & -\frac{K}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/J \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_f(ad_f g) =$$

PASSO 2) $z = z(x)$ QUE LEVA O

SISTEMA A SER LINEAR EM z_1, z_2, z_3

E NÃO LINEAR EM z_4

$$\boxed{\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = f(z) + g(z) \cdot u \end{cases} \qquad u = \frac{1}{g(z)} \cdot \left[-f(z) + v \right]}$$

$$\begin{cases} \nabla z_1 \cdot ad_f^i g = 0 \quad p/\ i = 0, 1, 2 \\ \nabla z_1 \cdot ad_f^3 g \neq 0 \end{cases}$$

$$\nabla z_1 = \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1} \ \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \ \frac{\partial z_1}{\partial x_3} \ \frac{\partial z_1}{\partial x_4} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -K/IJ \\ 0 & 0 & K/IJ & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} & 0 & K/J^2 \\ \frac{1}{J} & 0 & \frac{-K}{J^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$=0 \quad =0 \quad =0 \quad \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial x_4} = 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = x_1}$$

$z_1 = x_1$

CONT.) $$z_2 = L_f z_1 = \nabla z_1 \cdot f = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{Mgl}{I}\,\mathrm{sen}\,x_1 - \frac{K}{I}(x_1-x_3) \\ x_4 \\ K/J\,(x_1-x_3)\end{bmatrix} = \underline{x_2}$$

$$z_3 = L_f^2 z_1 = \nabla z_2 \cdot f = \ldots = -\frac{Mgl}{I}\,\mathrm{sen}\,x_1 - \frac{K}{I}\,x_1 x_3$$

$$z_4 = L_f^3 z_1 = \nabla z_3 \cdot f = -\frac{Mgl}{I}\,x_2 \cos x_1 - \frac{K}{I}\,x_2 + \frac{K}{I}\,x_4$$

SISTEMA FICARÁ ASSIM

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \dot z_2 = z_3 \\ \dot z_3 = z_4 \\ \dot z_4 = f(z) + g(z)\cdot u \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{g(z)} \cdot \left[-f(z) + v\right] \rightarrow$$

v é OBTIDO POR ALOCAÇÃO DE POLOS SIST. 4º ORDEM