Aula 2 – Análise de Sistemas Não Lineares

Sistemas Não Lineares – Plano de Fase

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

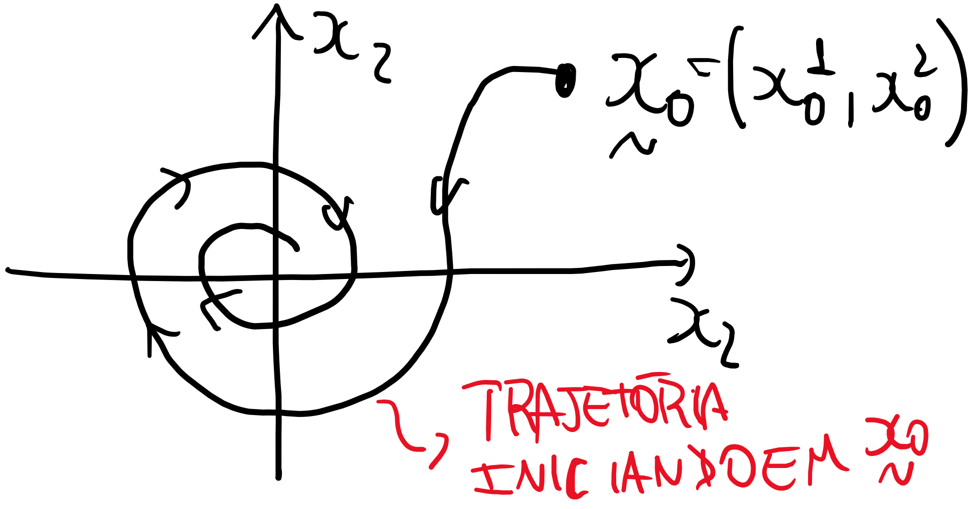
Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

ANÁLISE SIST. NÃO LINEARES

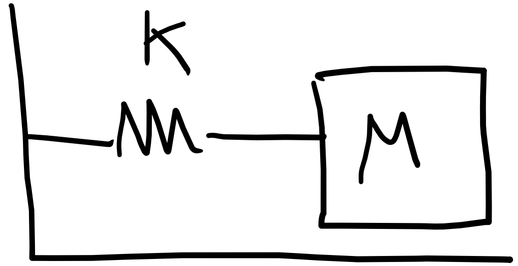
- PLANO DE FASE
- TEORIA DE LYAPUNOV
- FUNÇÃO DESCRITIVA

PLANO DE FASE

$$\begin{rcases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{rcases} f_1, f_2 \to \text{NÃO LINEARES DOS ESTADOS } x_1, x_2$$



Ex)



$$\boxed{\ddot{x} + x = 0}$$ EQ DIF. 2º ORDEM

$$\begin{cases} x_1 = \text{velocidade} = \dot{x} \\ x_2 = \text{posição} = x \end{cases}$$

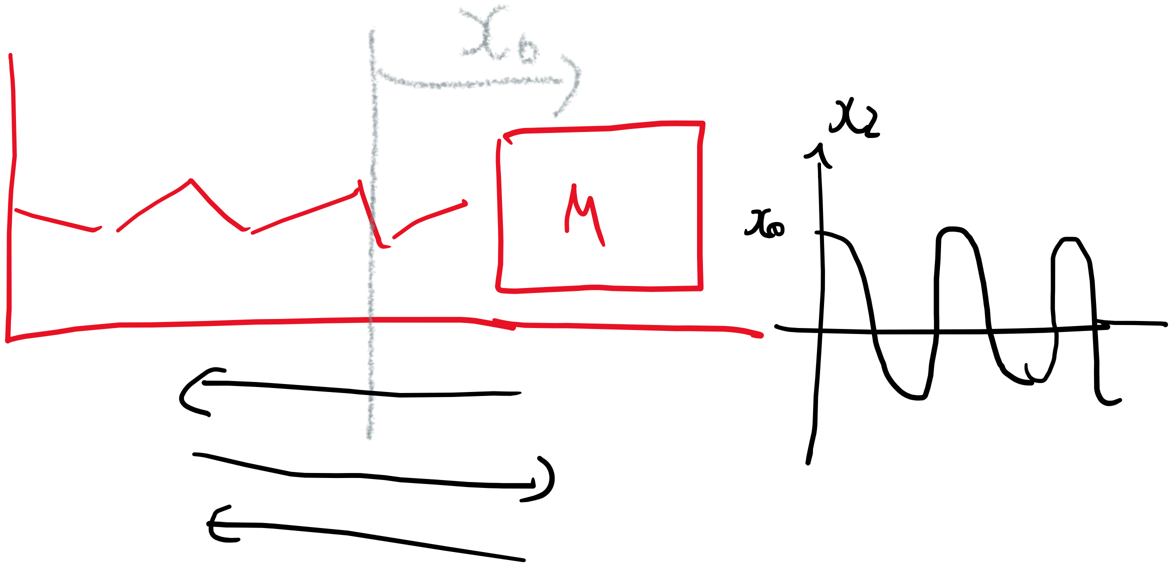
$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}}$$ → 2 EQs DE 1º ORDEM

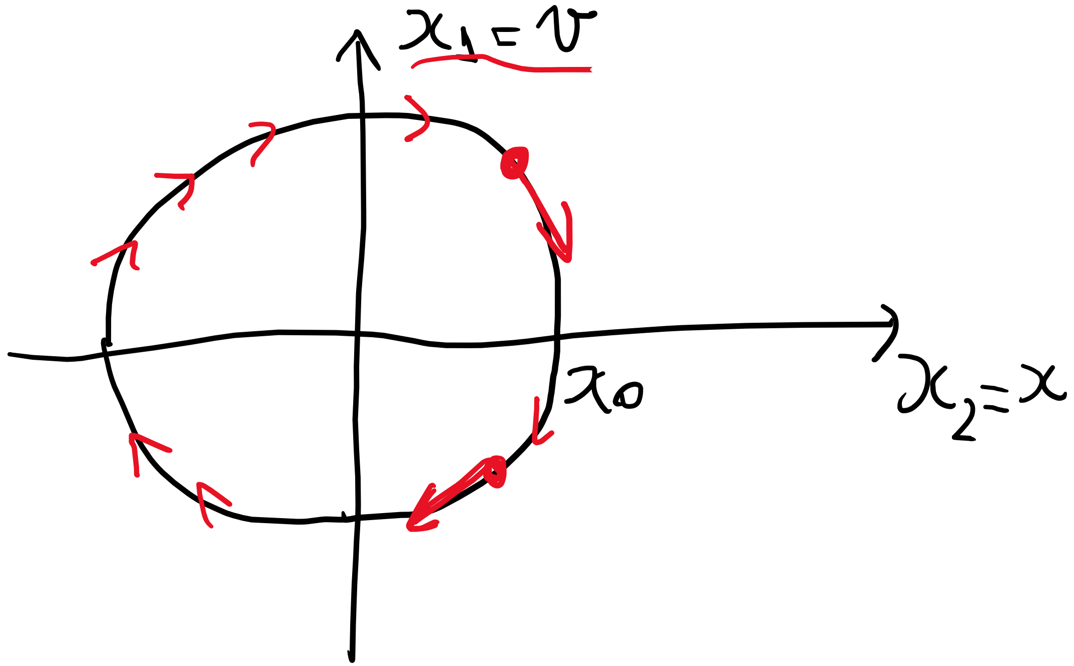
$$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$$

→ SOLUÇÃO

$$\boxed{\begin{aligned} x_2(t) &= x_0 \cos wt \\ x_1(t) &= -x_0 \,\text{sen}\, wt \end{aligned}}$$

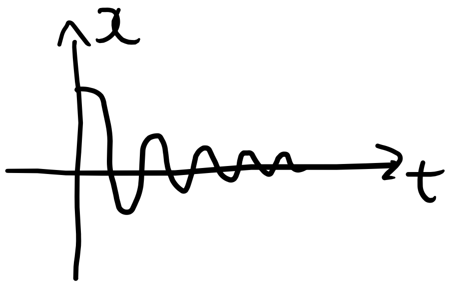
p/ $\underset{\sim}{x}(0) = [0; x_0]$

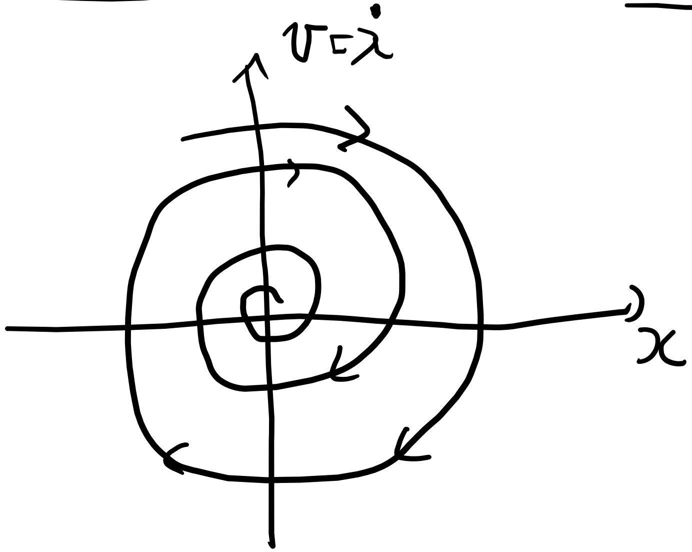


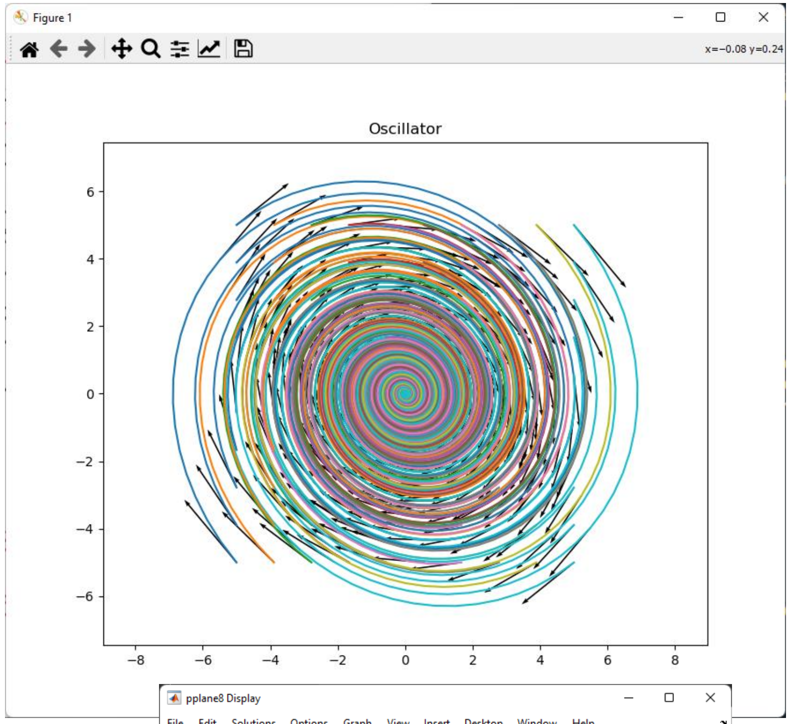


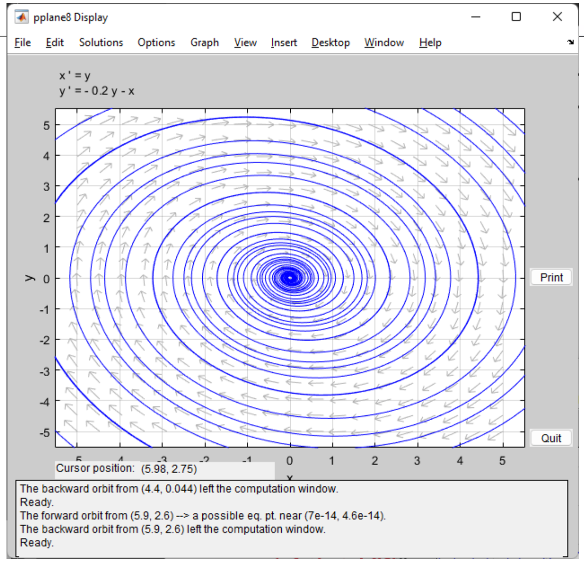
COLOCANDO AMORTECIMENTO

$$\boxed{\ddot{x} + 0{,}2\,\dot{x} + x = 0}$$









PLANO DE FASE

$$\begin{cases} x_1 = \text{POSIÇÃO} \\ x_2 = \text{VELOC.} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0{,}2\,x_2 - x_1 \end{cases}$$

PONTOS SINGULARES (= EQUILÍBRIO)

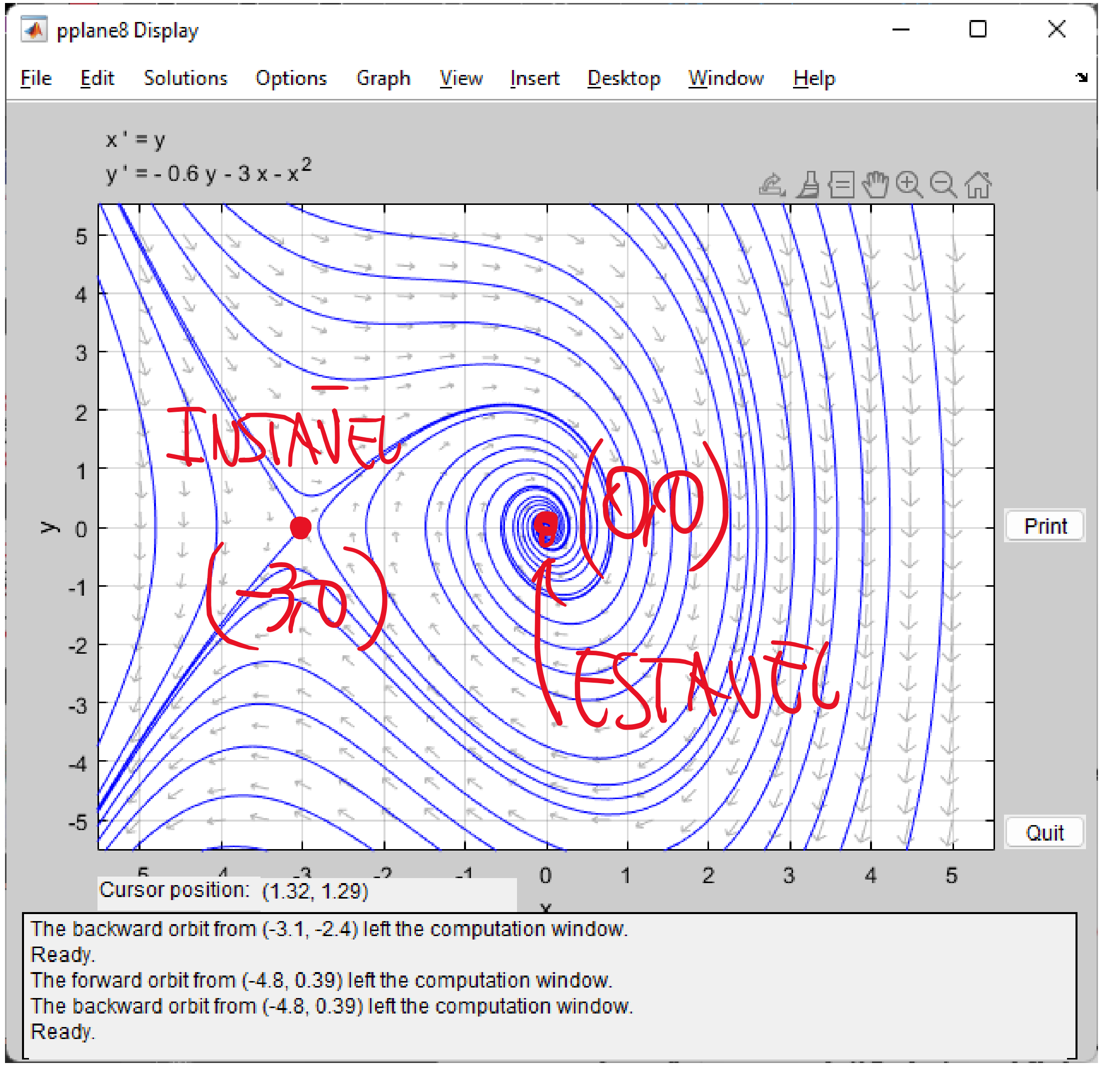
$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2)=0 \\ f_2(x_1,x_2)=0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + 0{,}6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$$

$x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1 \\ \dot{x}_2 = -0{,}6x_2 - 3x_1 - x_1^2 = f_2 \end{cases}$$

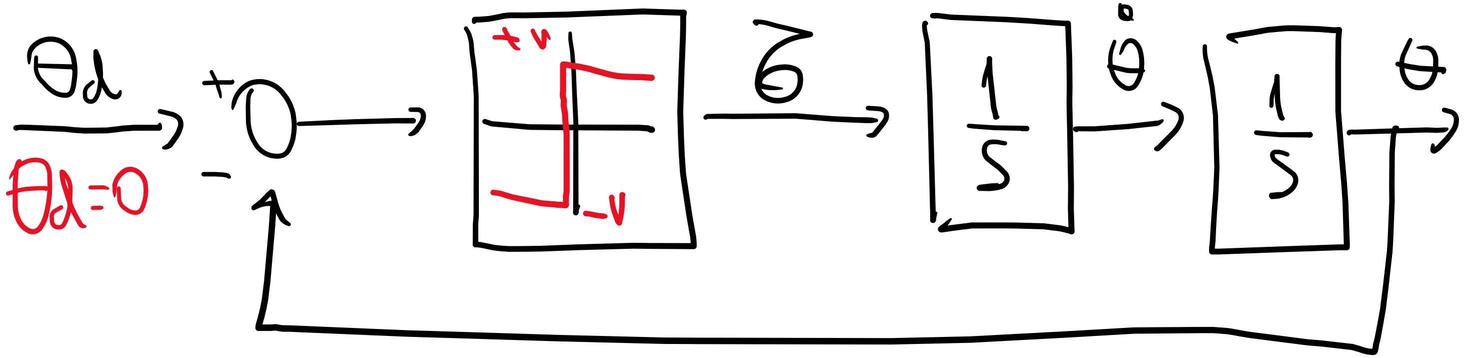


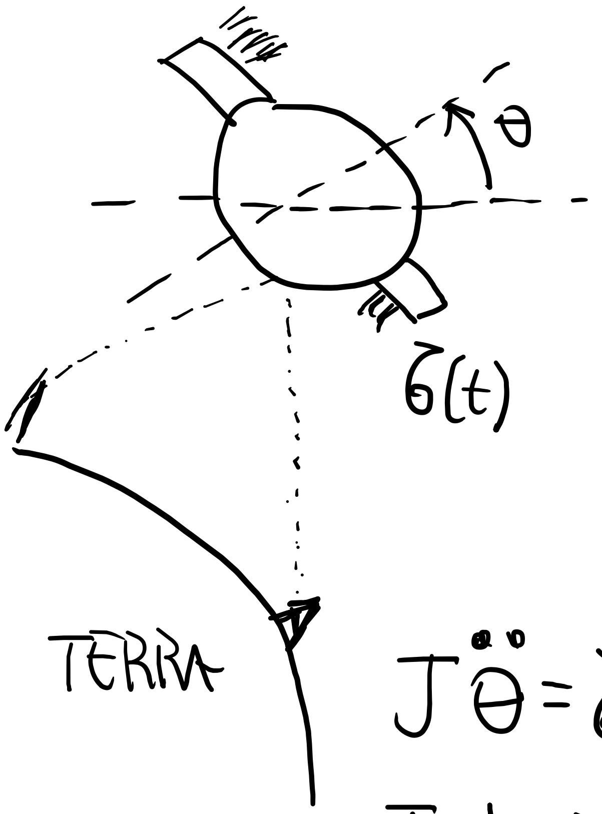
PTOS EQUILÍBRIO

2 PTOS EQ.

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 \cdot (-3 - x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1,x_2) = (0,0) \\ (x_1,x_2) = (-3,0) \end{cases}$$

Ex)



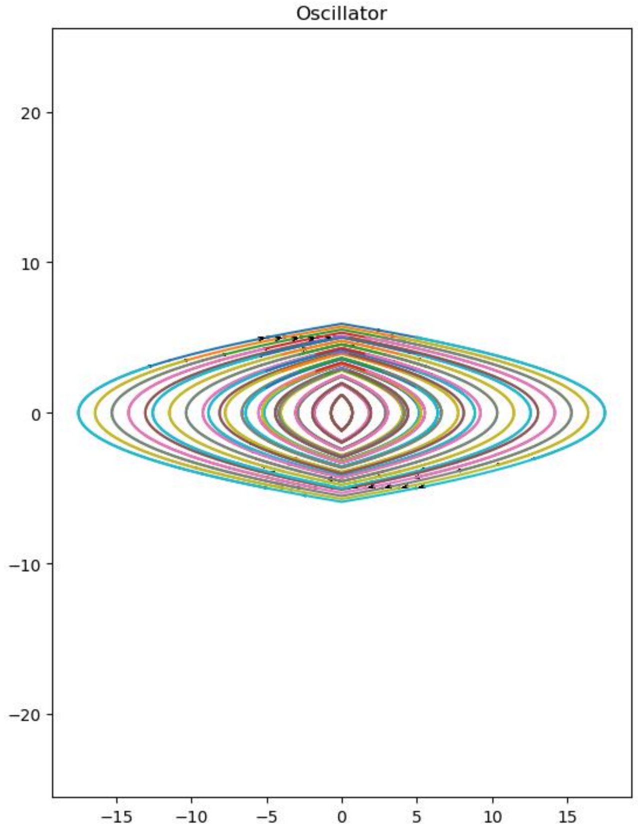


$$J\ddot{\theta} = \sigma \quad \text{(TMA)}$$

$$J = 1 \Rightarrow \ddot{\theta} = \sigma$$

$$\left[\begin{aligned} &\ddot{\theta} = \sigma \\ &\sigma = \begin{cases} -1 & \text{se } \theta > 0 \\ +1 & \text{se } \theta < 0 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = -\mathrm{sgn}(x_1) \end{aligned}\right. \quad \ldots \quad x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}$$



PLANO FASE SIST. LINEAR

- $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$
- $\begin{cases}\dot{x}_1 = c_1x_1 + c_2x_2 \\ \dot{x}_2 = c_3x_1 + c_4x_2\end{cases}$

λ_1, λ_2 AUTOVALORES $\boxed{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}}$

OU SOLUÇÃO

$$\boxed{s^2 + as + b = 0}$$

EQ. CARACTERÍSTICA

se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\boxed{x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}}$

1) PONTO DE NÓ

λ_1, λ_2 REAIS E MESMO SINAL

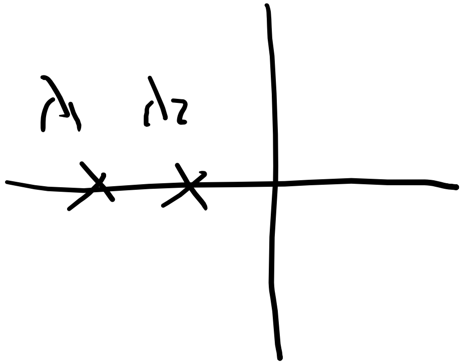
$\lambda_1 = -2$

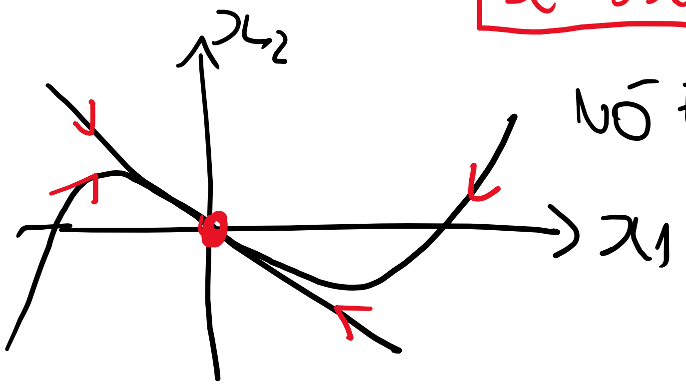
$\lambda_2 = -3$

$(s+2)(s+3) =$

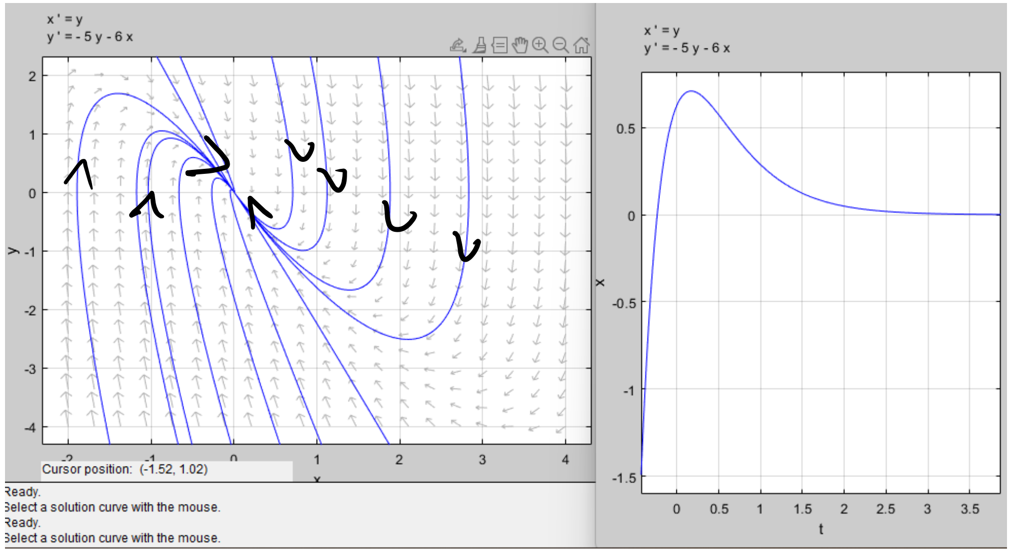
$s^2 + 5s + 6$

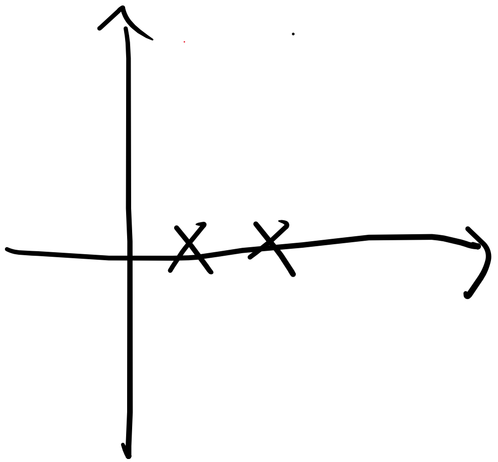
$$\boxed{\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0}$$





NÓ ESTÁVEL





NO INSTÁVEL

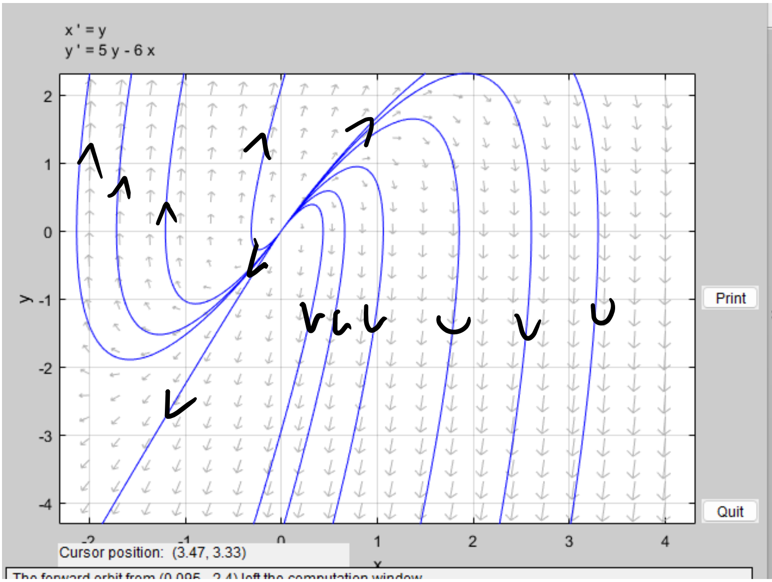
Ex) $\lambda_1 = 2$

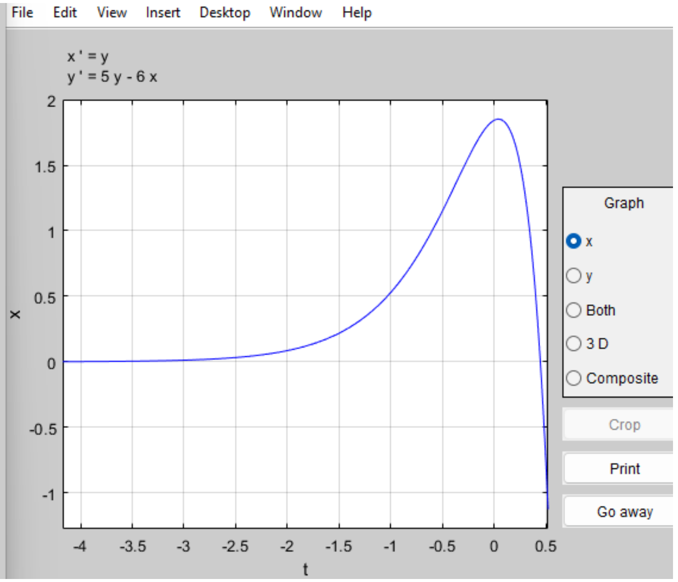
$\lambda_2 = 3$

$(s-2)(s-3) =$

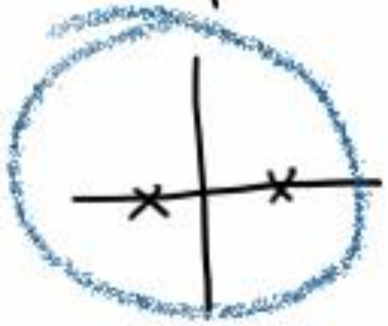
$s^2 - 5s + 6 \Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0}$$





2) λ_1, λ_2 reais e opostos SELA

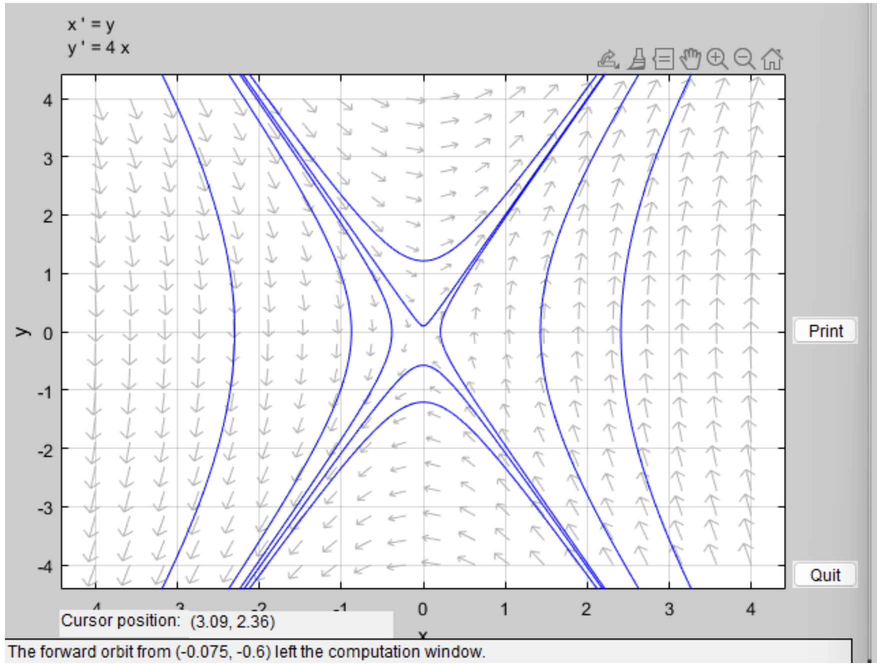


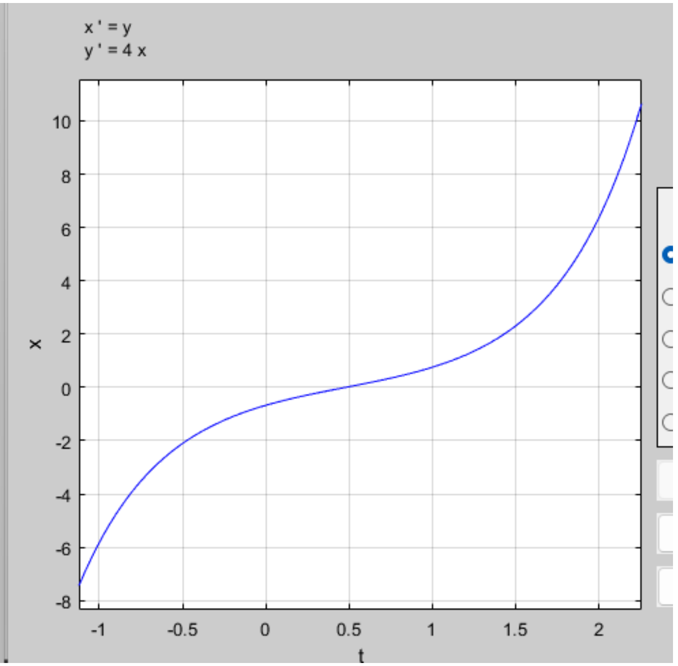
Ex) $\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -2$

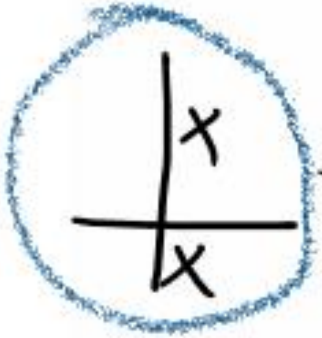
$(s-2)(s+2) = s^2 - 4$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} - 4x = 0}$

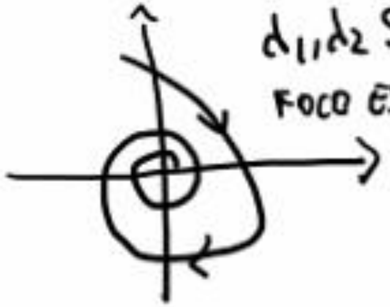




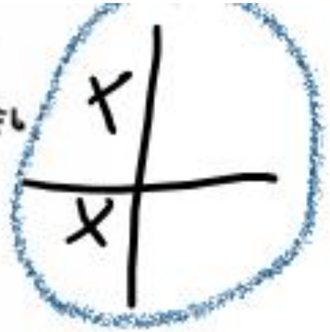
3) λ_1, λ_2 COMPLEXOS CONJUGADOS



λ_1, λ_2 SPD
FOCO INST.

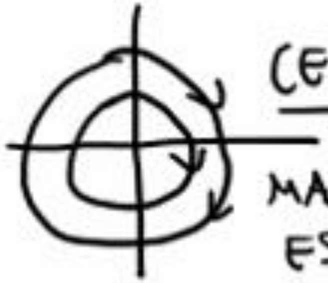


λ_1, λ_2 SPE
FOCO ESTÁVEL



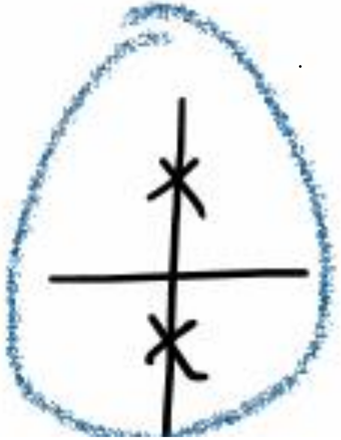
→ VER EXEMPLO COMEÇA AULA

4) λ_1, λ_2 IMAGINÁRIO PURO



CENTRO

MARGINAL.
ESTÁVEL



EX: $\lambda_1 = 2j$
$\lambda_2 = -2j$

$$\Rightarrow (s-2j)(s+2j)$$

$$s^2+4=0$$

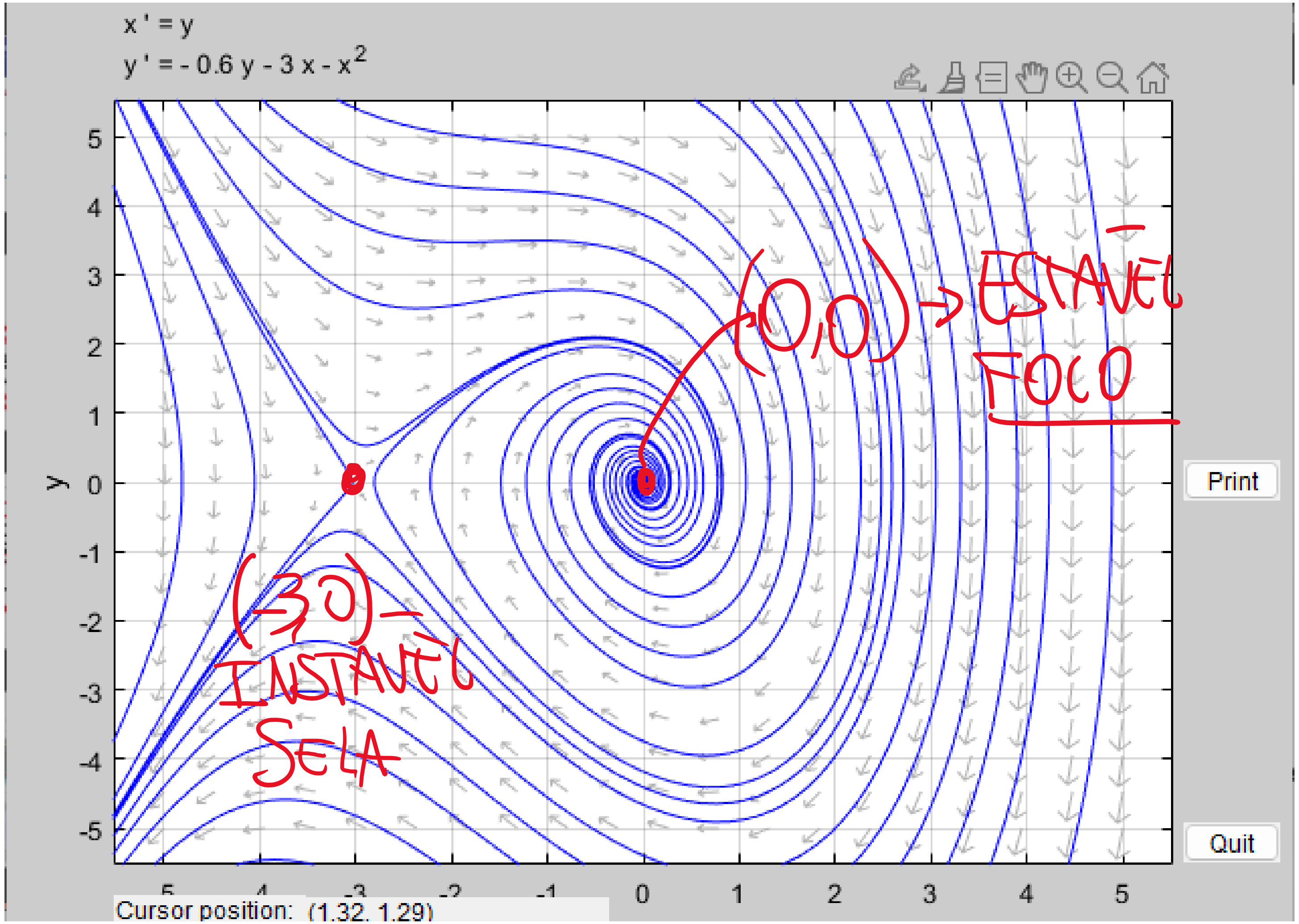
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}+4x=0}$$

MASSA MOLA
(VIMOS COMEÇO AULA)

SIST. NÃO LINEAR

- VÁRIOS PTOS EQUILIBRIO
- LOCAL/E APROX. POR SIST. LINEARES
- PODEM APRESENTAR CICLO LIMITE

EX. PASSADO



COMPORTAMENTO LOCAL → LINEARIZAÇÃO

SÉRIE TAYLOR EM TORNO DO EQUILÍBRIO $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \end{cases}$$

$$f_1(x_1, x_2) \cong \underbrace{f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}_{0} + \underbrace{\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}_{C_1} \overbrace{(x_1 - \bar{x}_1)}^{x_1^d} + \underbrace{\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}}_{C_2} \overbrace{(x_2 - \bar{x}_2)}^{x_2^d} + O(2)$$

$$\begin{cases} x_1^d = x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2^d = x_2 - \bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1^d = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2^d = \dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1^d = C_1 \cdot x_1^d + C_2 x_2^d \\ \dot{x}_2^d = C_3 x_1^d + C_4 x_2^d \end{cases}$$

→ SIST. LINEARIZADO EM TORNO DE $\bar{x}_1, \bar{x}_2$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^d \\ \dot{x}_2^d \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_1^d \\ x_2^d \end{pmatrix} *$$

$$\begin{cases} x_1^d = x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2^d = x_2 - \bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1^d = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2^d = \dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1^d = C_1 \cdot x_1^d + C_2 x_2^d \\ \dot{x}_2^d = C_3 x_1^d + C_4 x_2^d \end{cases}$$

C_1 C_2

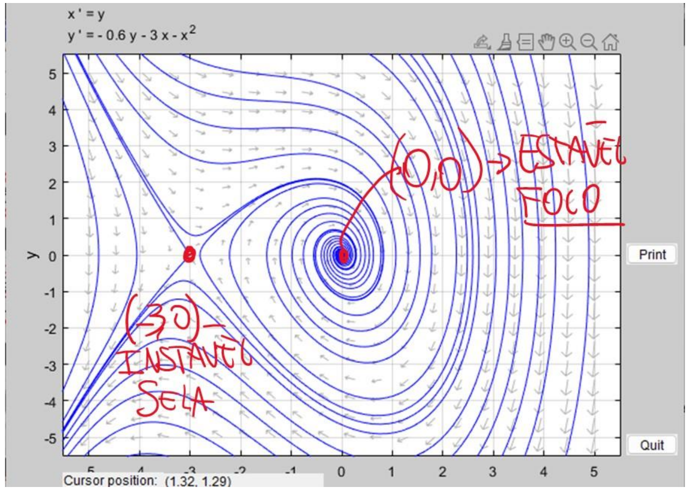
SIST. LINEARIZADO EM TORNO DE $\bar{x}_1, \bar{x}_2$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^d \\ \dot{x}_2^d \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_1^d \\ x_2^d \end{pmatrix}$$

COM J = JACOBIANO DO SISTEMA

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$$

Ex) $\ddot{x} + 0{,}6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0{,}6x_2 - 3x_1 - x_1^2 \end{cases} \rightsquigarrow \text{2 EQUILÍBRIOS } (-3;0) \text{ e } (0;0)$$

$$(-3;0) \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3-2x_1 & -0{,}6 \end{pmatrix}_{(-3;0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$$

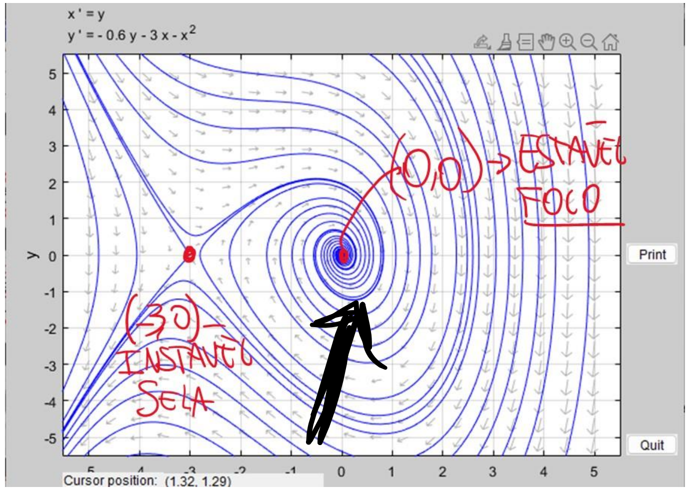
$$\Rightarrow \text{AUTOVALORES } J \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1{,}4 \\ \lambda_2 = -2{,}0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{SELA}}{\text{INSTÁVEL}}$$

LOCALMENTE EM TORNO DE $(-3;0)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^d \\ \dot{x}_2^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^d \\ x_2^d \end{pmatrix}$$

Ex) $\ddot{x} + 0,6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -0,6x_2 - 3x_1 - x_1^2 \end{cases} \rightsquigarrow \text{2 EQUILÍBRIOS } (-3;0) \text{ e } (0;0)$$



$$(0;0) \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3-2x_1 & -0,6 \end{pmatrix}_{(0;0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,6 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$$

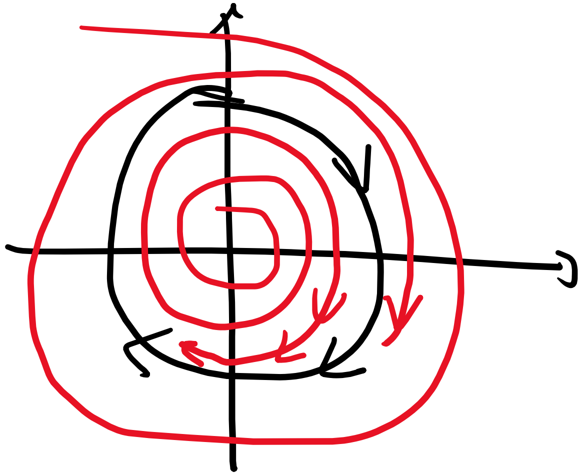
$$\Rightarrow \text{AUTOVALORES } J \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -0,3 + 1,7i \\ \lambda_2 = -0,3 - 1,7i \end{cases}$$

LOCALMENTE EM TORNO DE $(0;0)$

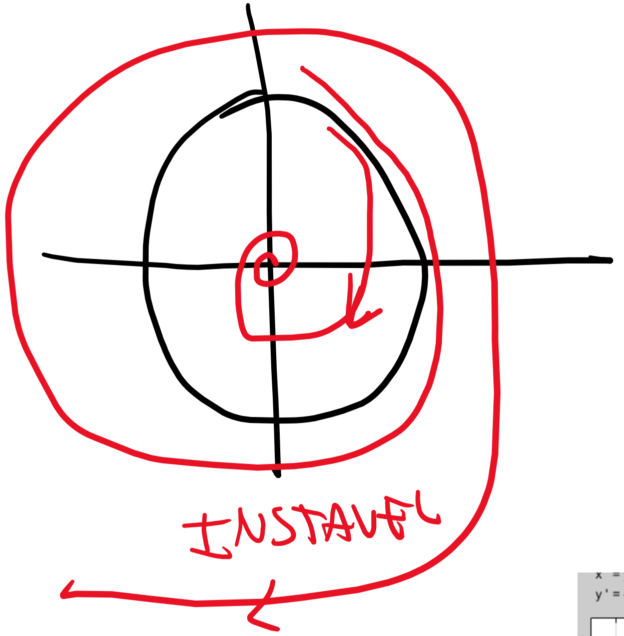
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^d \\ \dot{x}_2^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^d \\ x_2^d \end{pmatrix}$$

FOCO ESTÁVEL

CICLOS LIMITES

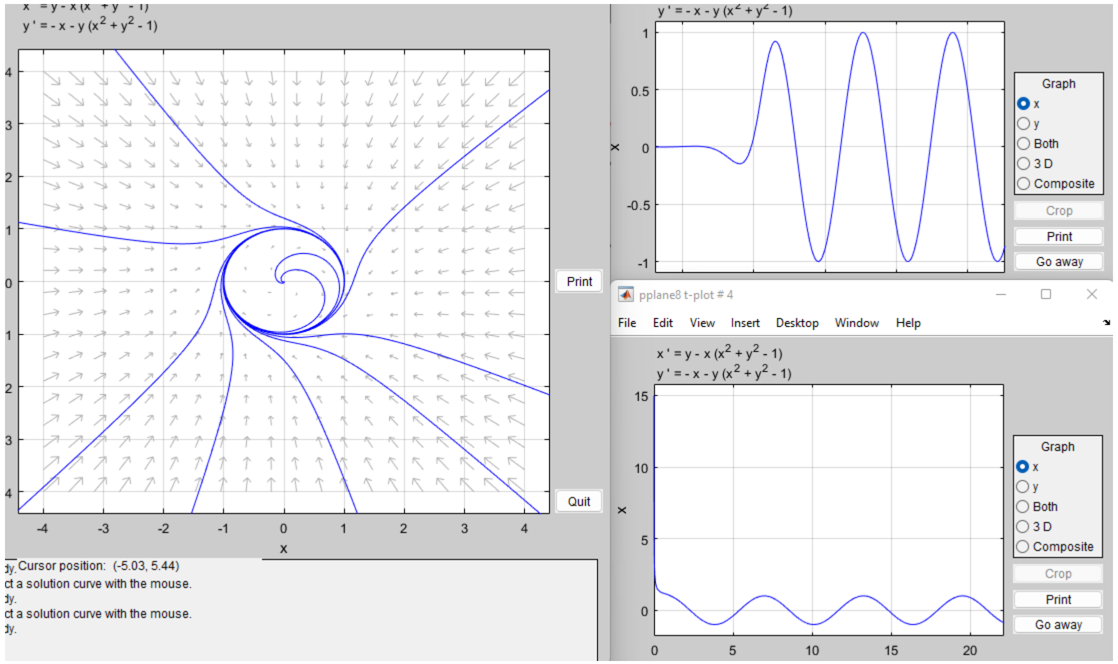


ESTÁVEL



INSTÁVEL

Ex) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$



CICLO LIMITE ESTÁVEL!

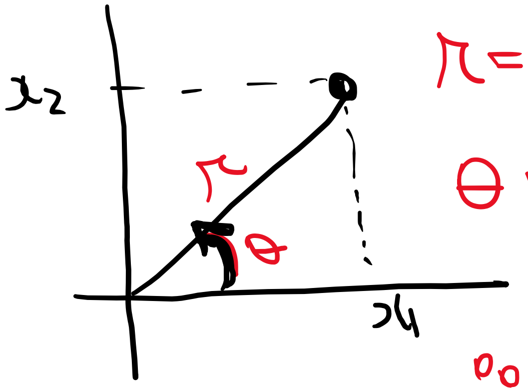
Ex) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -r(r^2 - 1) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -1 \Rightarrow \boxed{\theta = -t} \end{cases}$

2 RAIOS EQUILÍBRIO

$\begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$

MUDANÇA DE COORDENADAS

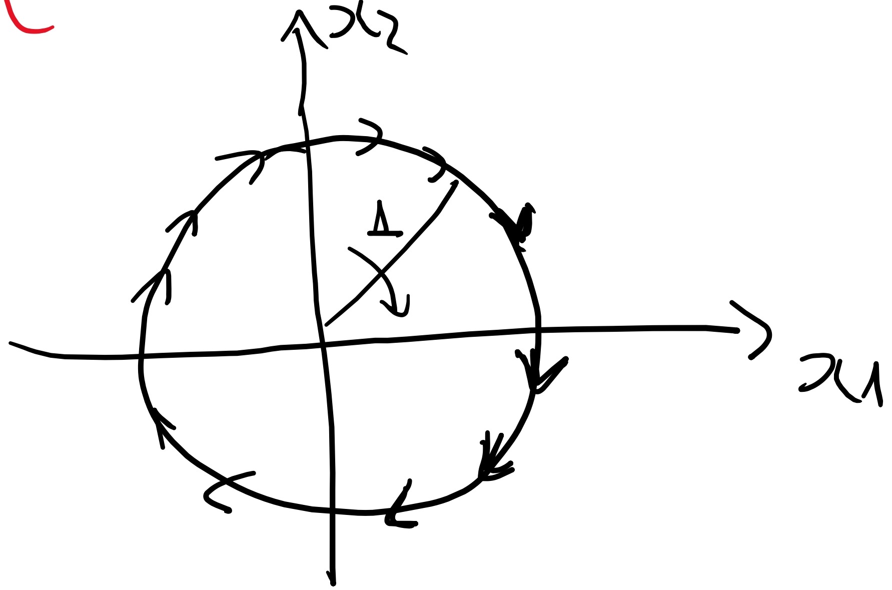
$(x_1, x_2) \to (r; \theta)$



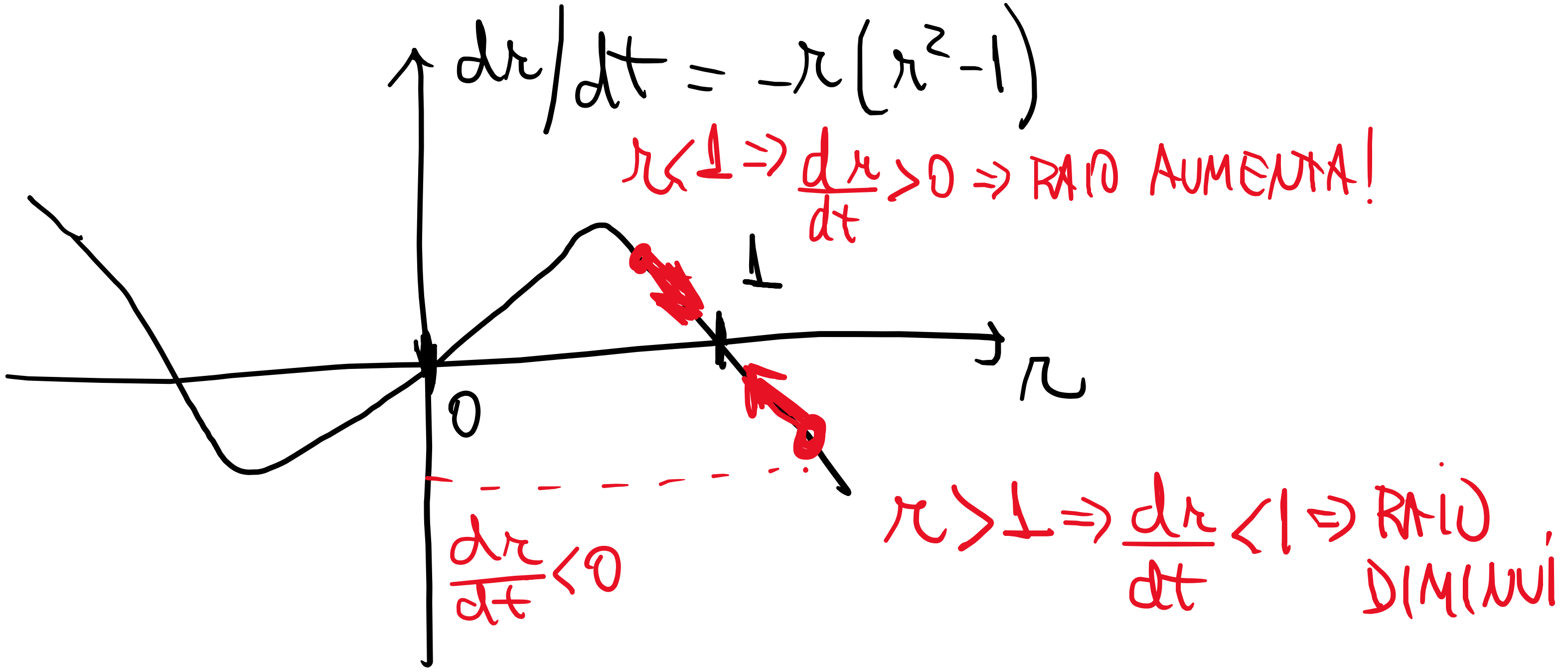
$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$

$\theta = \operatorname{atan}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$

$\circ\circ\circ \quad \dfrac{d(\operatorname{atan}(x))}{dx} = \dfrac{1}{1+x}$



$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \boxed{-r(r^2-1)} \\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos - PMR

Aula 2 – Análise de Sistemas Não Lineares

Sistemas Não Lineares – Teoria de Lyapunov (Parte.1)

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

CAP. 3 (LIVRO)

AVALIAÇÃO ESTABILIDADE LYAPUNOV

↳ 1º LINEARIZAÇÃO

↳ 2º MÉTODO DIRETO (ENERGIA)

SIST. NÃO LINEAR

$$\boxed{\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, t)} \rightarrow \underset{\sim}{x}(t) \text{ SOL. EQ. DIFERENCIAL}$$

↳ TRAJETÓRIA

SIST. C/ ENTRADAS EXTERNAS

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, t, \underset{\sim}{u})$$

↳ ENTRADA $\begin{cases} \text{CONTROLE} \\ \text{DISTÚRBIOS} \end{cases}$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u_c}(t) + \underset{\sim}{u_d}(t)$$

$$\text{SE } \begin{cases} \underset{\sim}{u_d} = 0 \\ \underset{\sim}{u_c} = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}, t) \end{cases}$$

↳ LEI DE REALIM.

DINÂMICA EM MALHA FECHADA

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x}, t), t)$$

$$\boxed{\dot{x} = f_{MF}(\underset{\sim}{x}, t)}$$

↳ f_{MF} = COMBINAÇÃO $\underline{\underline{f}}$ e $\underline{\underline{g}}$

PARTICULARIZANDO

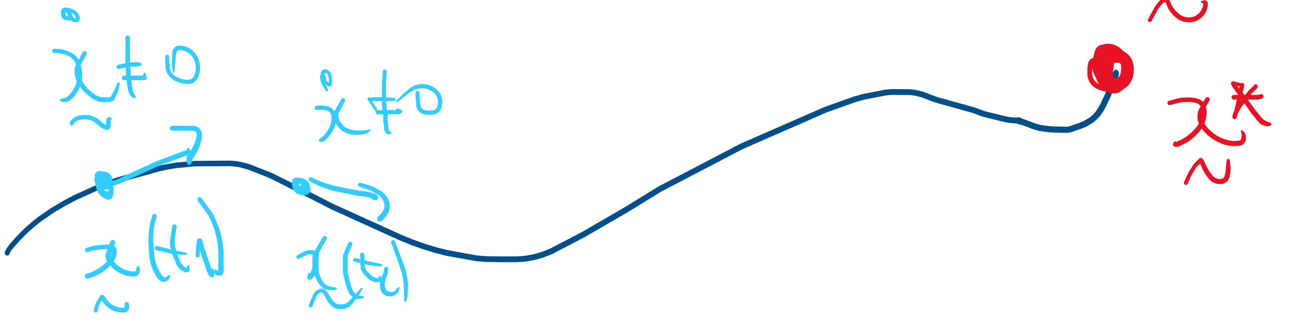
$$\dot{\underset{\sim}{x}} = f(\underset{\sim}{x}) \rightarrow \text{NÃO DEPENDE DE } t$$

PONTOS DE EQUILÍBRIO

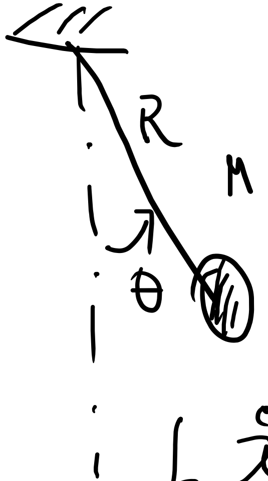
$\underset{\sim}{x}^*$ / SE O ESTADO DO SISTEMA $\underset{\sim}{x}(t)$ SE TORNAR IGUAL A $\underset{\sim}{x}^*$, O SISTEMA PERMANECE EM $\underset{\sim}{x}^*$

OU SEJA $\boxed{\dot{\underset{\sim}{x}} = 0 \quad p/ \ \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^*}$

$$\boxed{\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}^*) = \underset{\sim}{0}}$$



Ex)



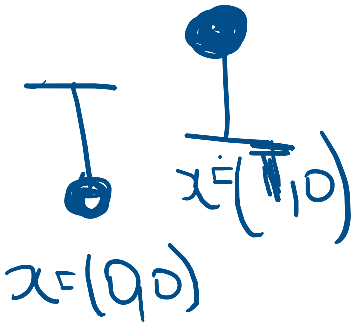
$$mR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgR\sin\theta = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases}$$

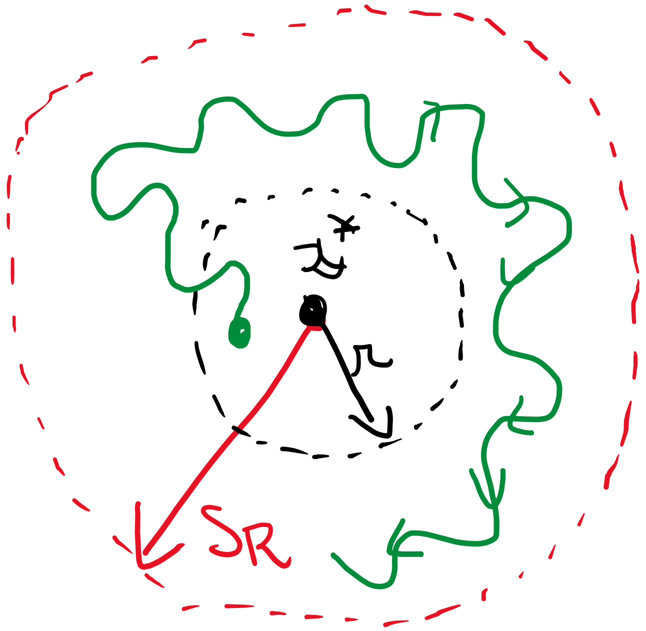
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{b}{mR^2} x_2 - \dfrac{g}{R}\sin x_1 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f(\underset{\sim}{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\dfrac{b}{mR^2} x_2 - \dfrac{g}{R}\sin x_1 \end{pmatrix}}$$

$$f(\underset{\sim}{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \text{ ou } \pi \end{cases}$$



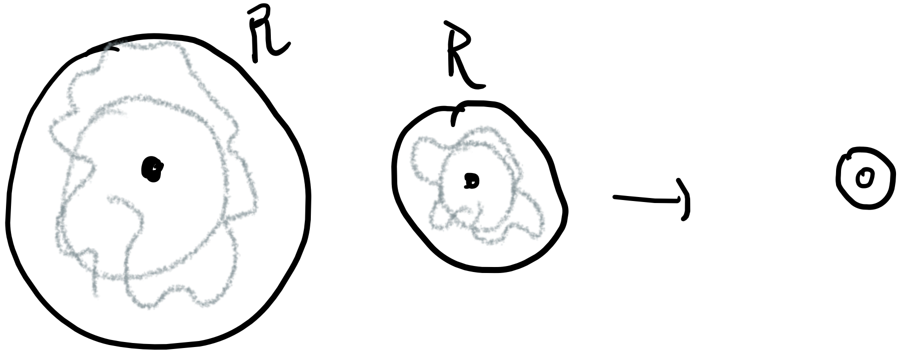
ESTABILIDADE DE LYAPUNOV



S_R = "ESFERA" R

S_r = "ESFERA" r

x^* = pto EQUIL.



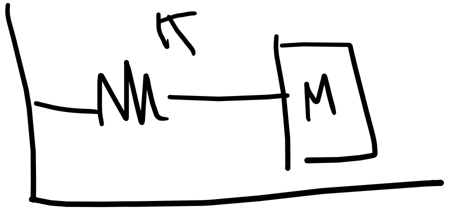
x^* É LYAPUNOV ESTÁVEL SE, PARA,

$\forall R>0,\ \exists r>0$ / SE $|\underset{\sim}{x}(0)-\underset{\sim}{x}^*|<r$,

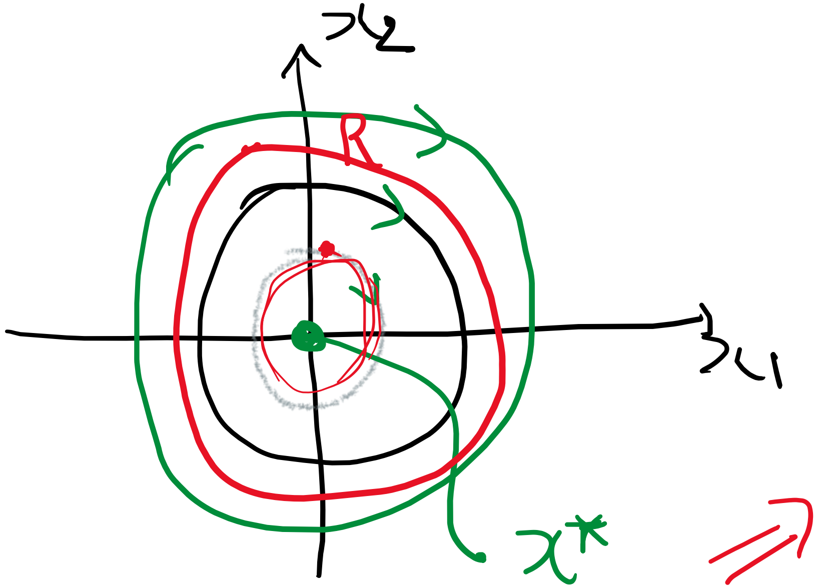
ENTÃO $|x(t)-x^*|<R$, p/ $\forall t>0$

"SE COMEÇA PRÓXIMO x^*, CONTINUA PRÓXIMO x^*"

EX1)



(0,0) DO SIST. MASSA MOLA É ESTÁVEL POR LYAPUNOV?

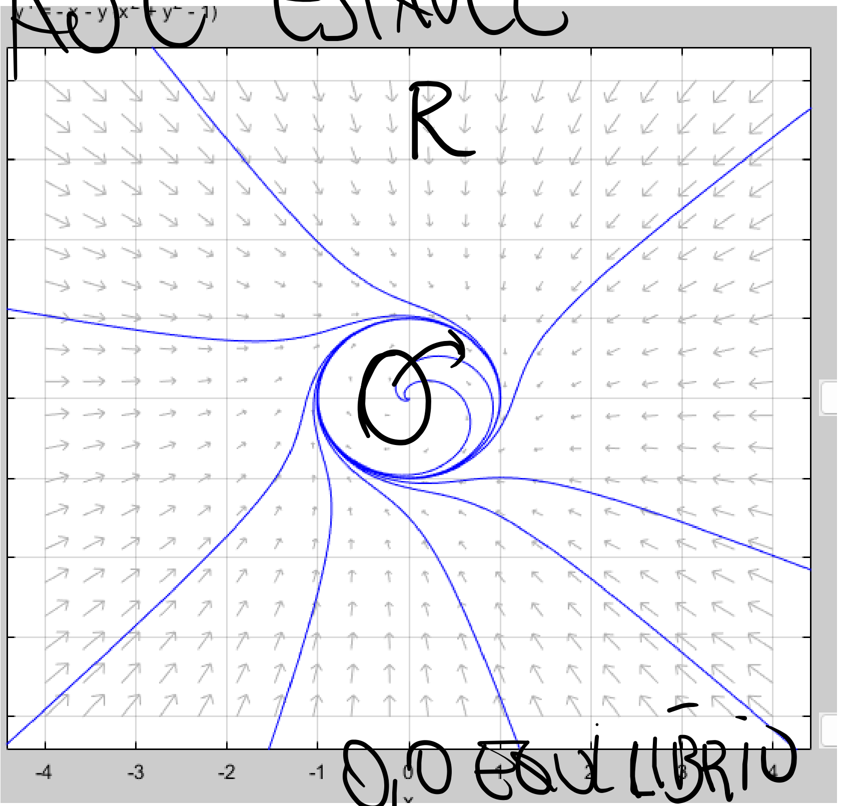


(0,0) É ESTÁVEL!

$\forall R>0$, PODEMOS ESCOLHER UM $r<R$, E A AFIRMAÇÃO É SATISFEITA

EX2) OSCILADOR c/ CICLO LIMITE

(0,0) NÃO É ESTÁVEL



0,0 EQUILÍBRIO

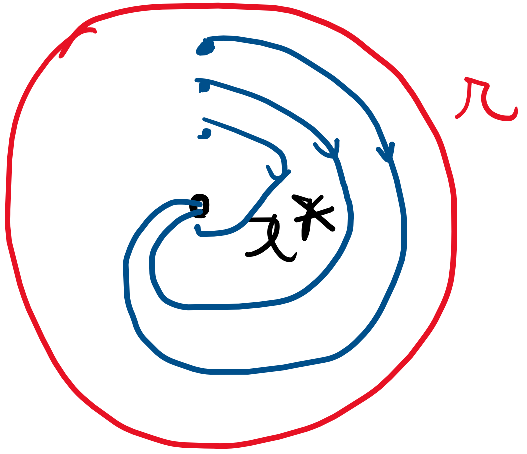
se $R>1$, OK CONSIGO DEFINIR r

se $R<1$, NÃO HÁ $r>0$ DE FORMA A MANTER A TRAJ. EM R!!

ESTABILIDADE ASSINTÓTICA

$\exists\, r > 0 \;|\;$ SE $|\underset{\sim}{x}(0) - x^*| < r$, ENTÃO

$x(t) \to x^*$ p/ $t \to \infty$



OBS)

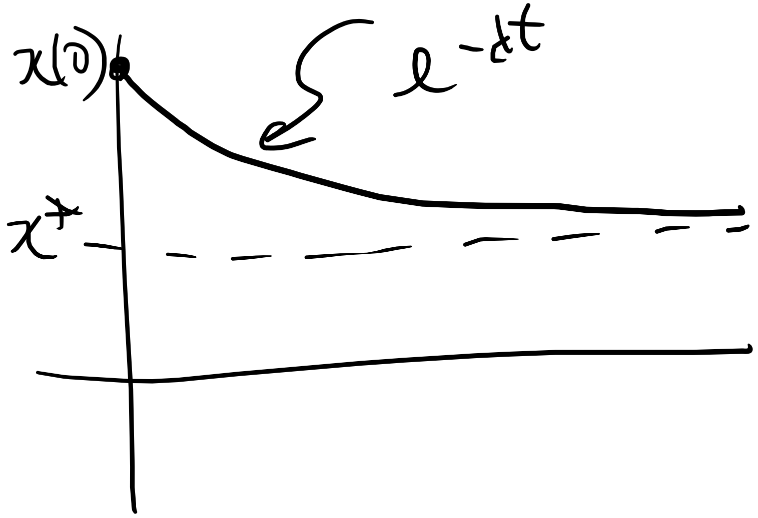
1) O MAIOR r PARA O QUAL ISTO É VÁLIDO É A BACIA DE ATRAÇÃO DO PTO DE EQUILÍBRIO

2) PONTOS ESTÁVEIS POR LYAPUNOV, MAS NÃO ASSINTÓTICOS, SÃO MARGINALMENTE ESTÁVEIS

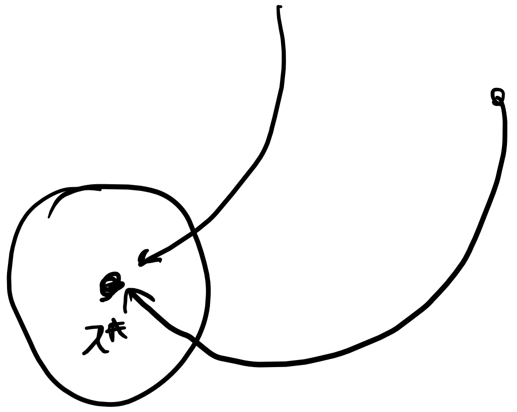
ESTABILIDADE EXPONENCIAL

$$|x(t)-x^*| \leq \alpha \cdot |x(0)-x^*|\, e^{-\lambda t}$$

↳ A DISTÂNCIA A x^* DECRESCE MAIS RAPIDAMENTE QUE UMA EXPONENCIAL



ESTABILIDADE LOCAL E GLOBAL



SE O CONCEITO DE ESTAB. ASSINTÓTICA VALE P/ $\forall \underset{\sim}{x}(0)$, ENTÃO O PONTO É GLOBALMENTE ESTÁVEL

MÉTODO DA LINEARIZAÇÃO

RECORDANDO → SIST. LINEAR POSSUI $\begin{cases} \text{MARG. ESTÁVEL} \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ IMAG. PURO} \\ \text{INSTÁVEL} \rightarrow Re(\lambda_1 \text{ ou } \lambda_2) > 0 \\ \text{ESTÁVEL} \rightarrow Re(\lambda_1 \text{ E } \lambda_2) < 0 \end{cases}$

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$$

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \left.\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{x}}\right|_{x=x^*} \cdot (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}^*) + O(2)$$

↳ JACOBIANO

$$\boxed{\dot{\underset{\sim}{x}} = J \cdot (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}^*)}$$

↳ SIST. LINEARIZADO

TEOREMA LYAPUNOV

- SE J É ESTÁVEL ⇒ x^* É ASSINT. ESTÁVEL
- SE J É INSTÁVEL ⇒ x^* É INSTÁVEL
- SE J FOR MARG. ESTÁVEL ⇒ NADA SE CONCLUI SOBRE x^*

TEOR. LYAPUNOV

JACOBIANO SIST. LINEAR	x^* (SIST. NÃO LINEAR)
ESTÁVEL	ESTÁVEL (ASSINT.)
INSTÁVEL	INSTÁVEL
λ_1, λ_2 IMAG. PURO	NADA SE CONCLUI

EX) $\dot{x} = a \cdot x + b \cdot x^5$

PTOS EQUILÍBRIO

$ax + bx^5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = (-a/b)^{1/4} \end{cases}$

$x = 0 \rightarrow$ ESTABILIDADE

$\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} \cdot (x-0) = a \cdot x$

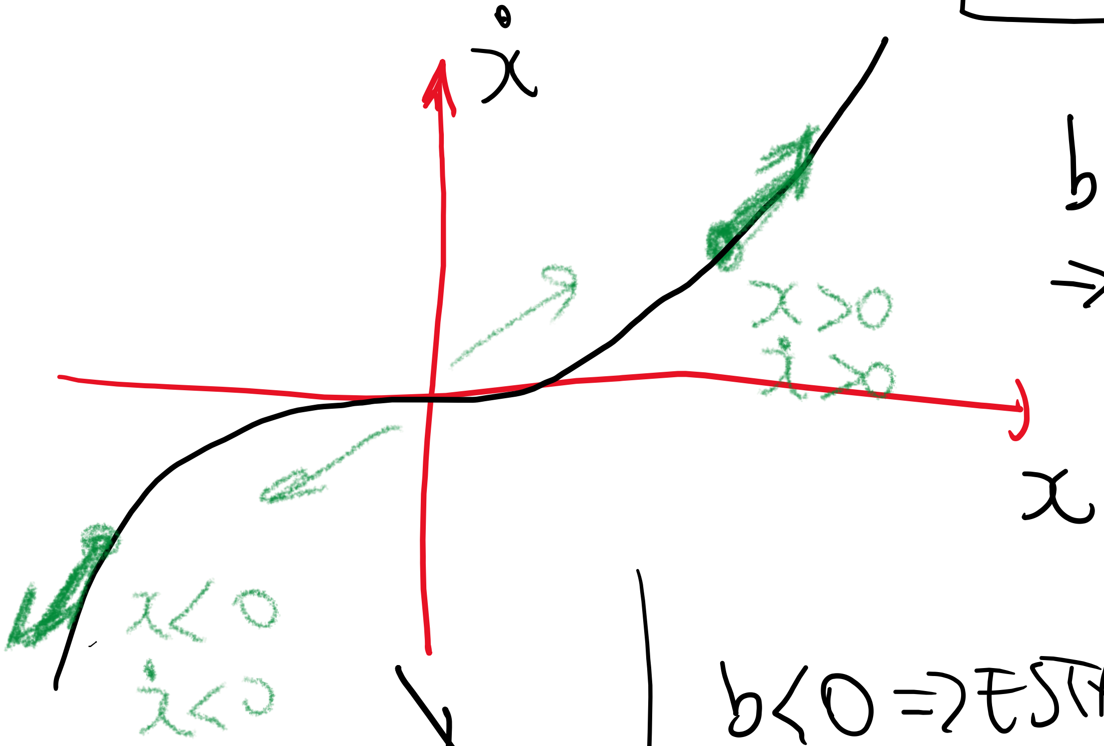
$\Rightarrow$ SIST. LINEARIZADO $\rightarrow$ $\dot{x} = a \cdot x \begin{cases} a > 0 \rightarrow \text{INSTÁVEL} \\ a < 0 \rightarrow \text{ESTÁVEL} \\ a = 0 \rightarrow \text{NÃO CONCLUIR} \end{cases}$

$\dot{x} = 0$!!!

Ex) ⇒ NESTE CASO, VOLTAMOS À PARTE NÃO LINEAR

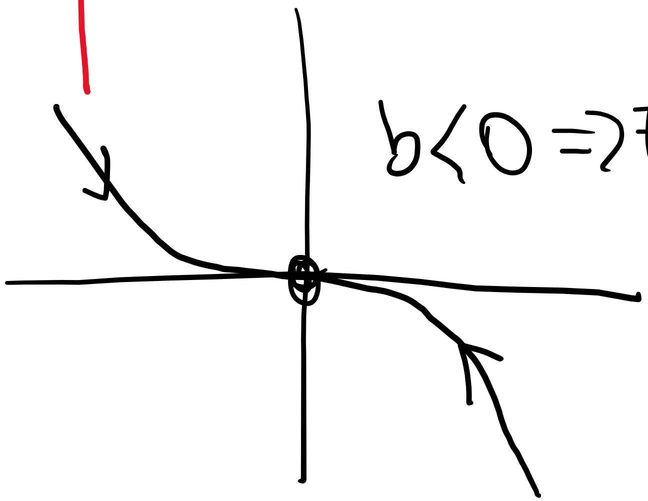
$$\boxed{\dot{x} = b x^5}$$

(ESTUDAR ESTE SISTEMA)



$b>0$
⇒ INSTÁVEL

→ $b<0$



$b<0$ ⇒ ESTÁVEL