Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos - PMR

Aula 1 – Análise de Sistemas Não Lineares

Sistemas Não Lineares - Comportamentos

Prof. Eduardo A. Tannuri

PMR 5014

Controle Não Linear Aplicado a Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos

SIST. NÃO LINEARES

RAZÕES P/ CONT. NÃO LINEAR

LINEAR

↓

- PEQUENAS VARIAÇÕES PONTO OPERAÇÃO
- BAIXAS VELOCIDADES

$\sim w^2$

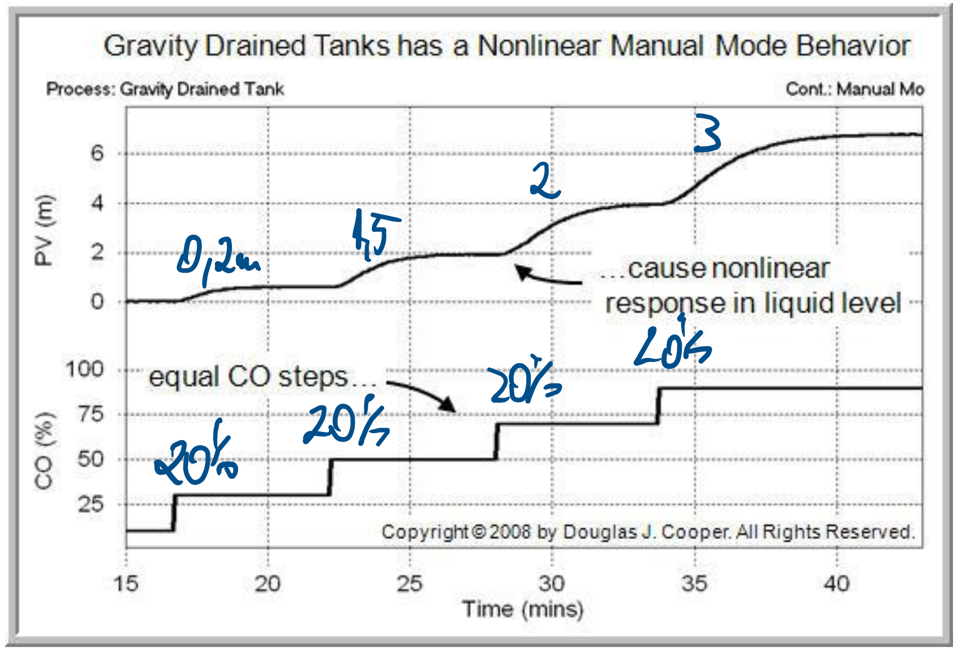
CO

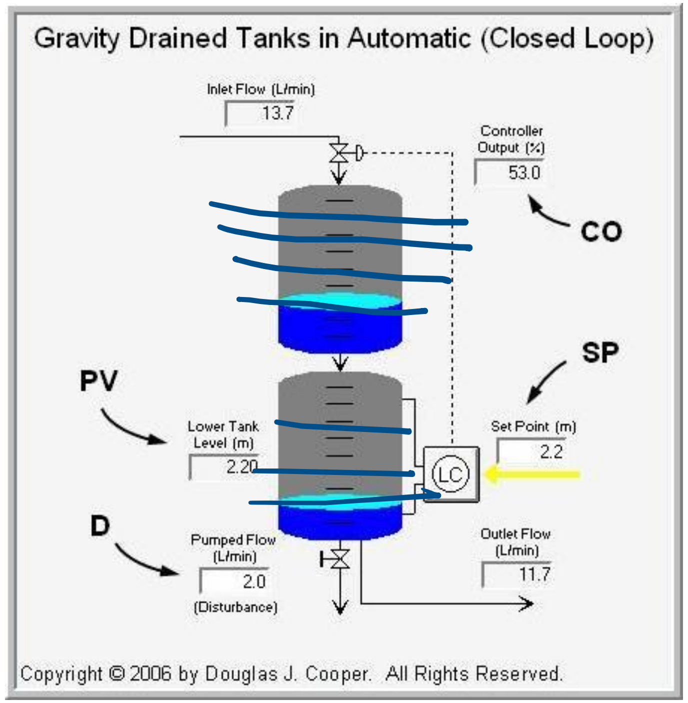
20% → "G(s)" → PV

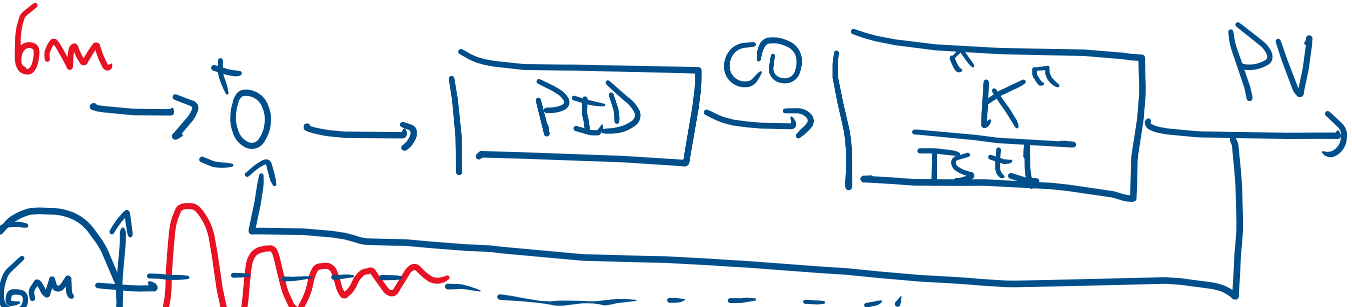
$$G(s) = \frac{K}{(s+p)^n}$$

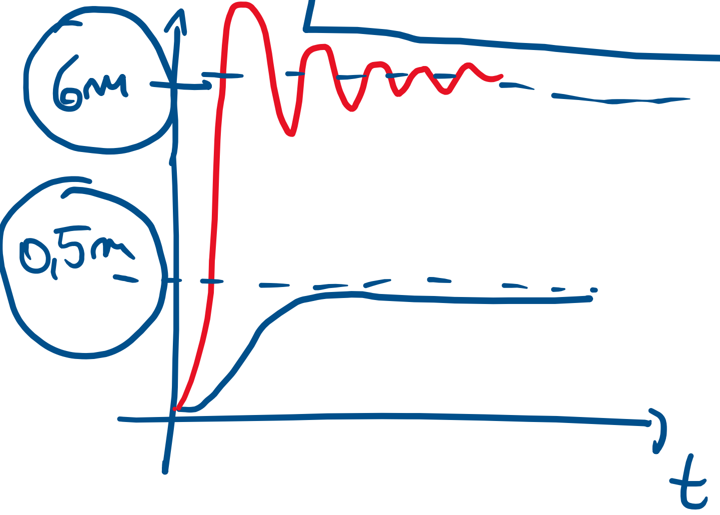
ESTE SISTEMA É NÃO LINEAR

K NÃO É CONSTANTE!

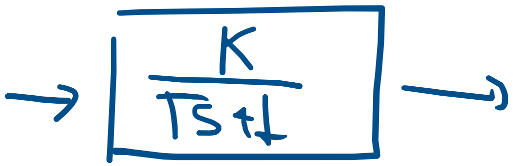








"MODELO"

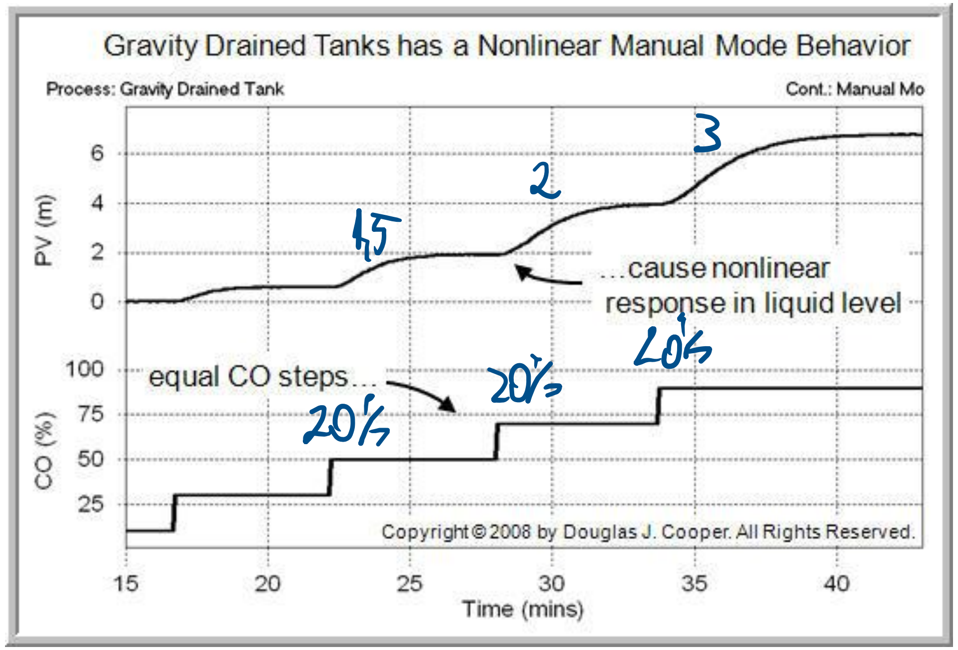


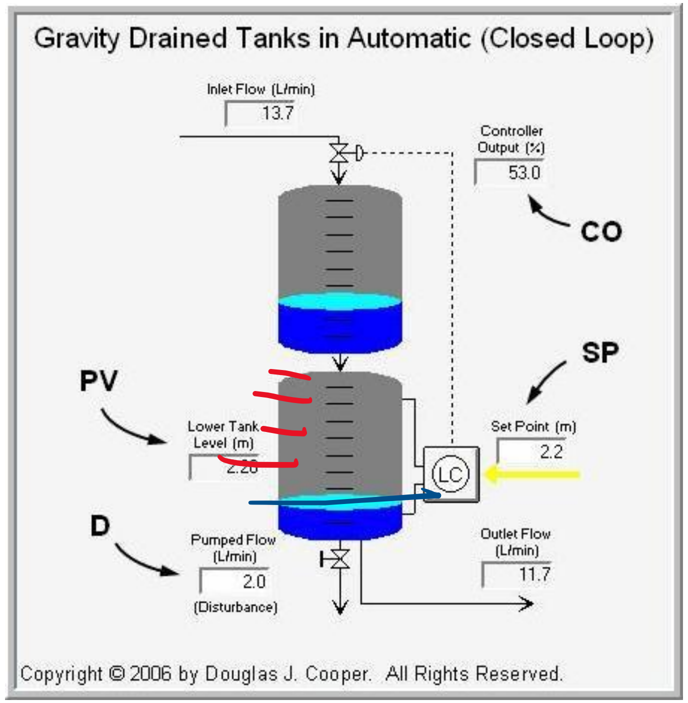
SP = 0,5m ⇒ K = PEQUENO

SP = 6m ⇒ K = ALTO

PID PROJETADO P/ PV = 0,5m

QUANDO AJUSTA SP = 6m
O PID PROJETADO P/ SP = 0,5m
APRESENTARÁ UM COMPORTAMENTO RUIM (OSCILATÓRIO)
POIS K_{PLANTA} É BEM MAIOR

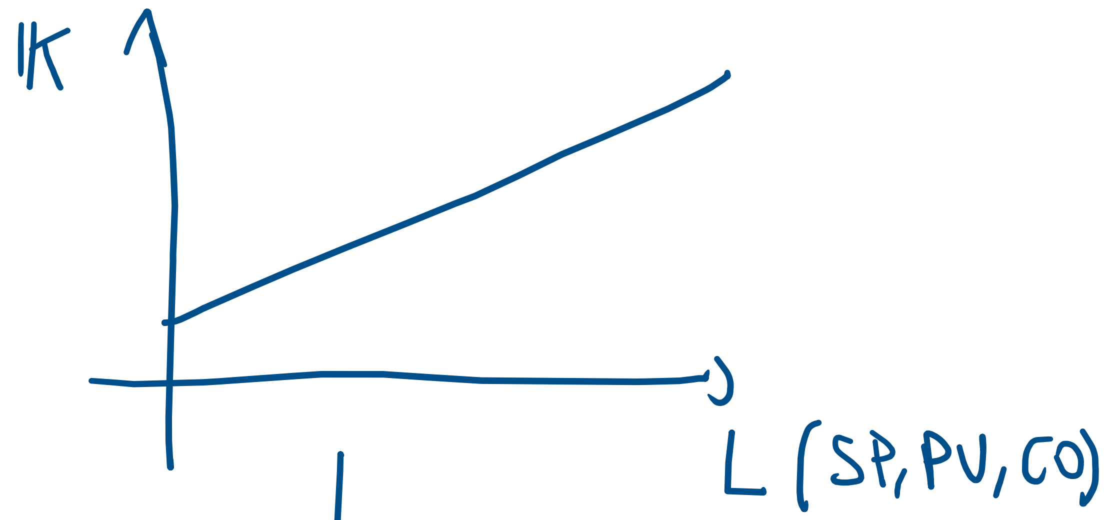


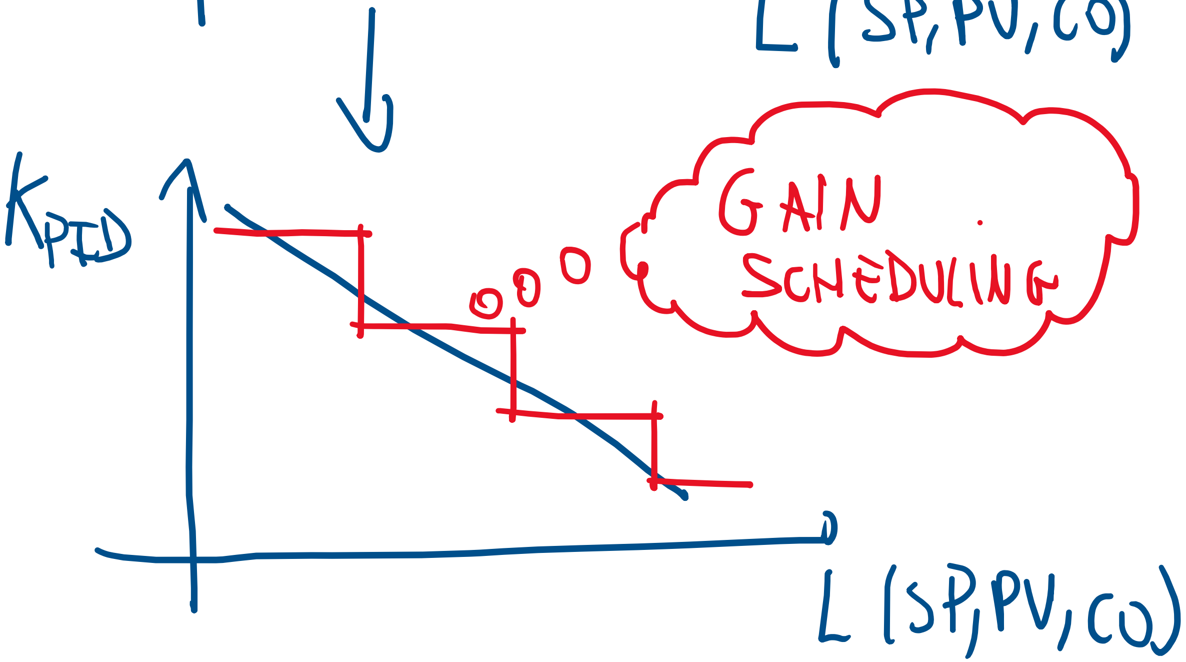


$$G(s) = \frac{K}{(s+p)^n}$$

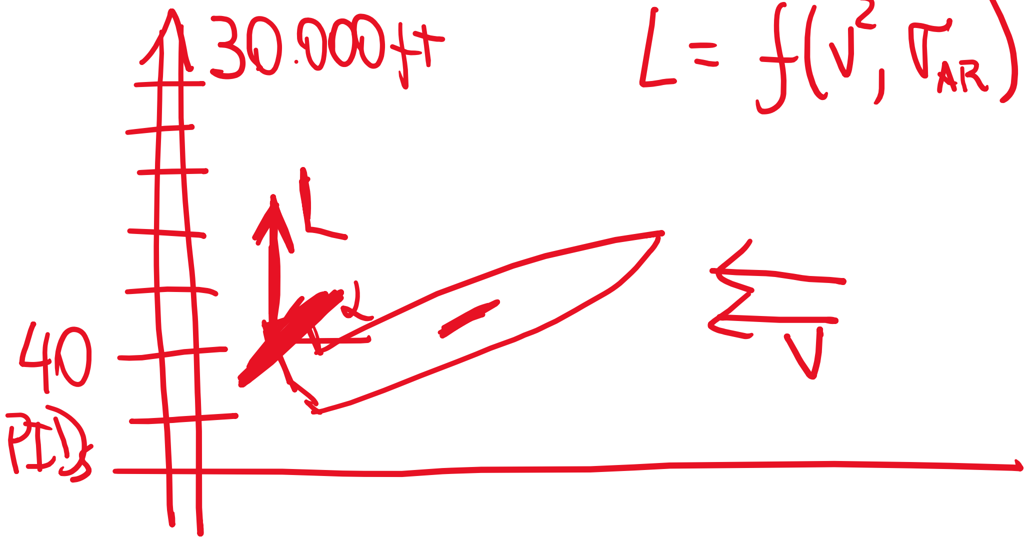
NÃO LINEARIDADE FRACA

K, P VARIAM COM PONTO DE OPERAÇÃO





$L = f(V^2, \rho_{AR})$



NÃO LINEARIDADES

↳ FRACAS (CONTÍNUAS)

↳ EX: FORÇA CENTRÍFUGA ω^2

ARRASTO $\sim v^2$

GANHO VARIÁVEL

↳ FORTES (DESCONTÍNUAS) → PODEMOS PROJETAR CONTROLE NÃO LINEAR P/ COMPENSAR

↳ • ATRITO COULOMP

• SATURAÇÃO

• ZONA MORTA

• FOLGA OU BACKLASK

SISTEMAS LINEAR

LTI

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \overset{\text{MATRIZ } n\times n \text{ SISTEMA}}{A}\, \underset{\sim}{x}$$

$\underset{\sim}{x}$ ↳ $n \times 1$ ESTADOS

- A NÃO SINGULAR
  ↳ 1 PONTO EQUILÍBRIO
  $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$
- EIG(A) → SPE → $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ É ESTÁVEL p/ $\forall\, \underset{\sim}{x}(0)$
- RESP. TRANSITÓRIA É UMA COMPOSIÇÃO DE MODOS NATURAIS E PODE SER OBTIDA ANALITICAMENTE

- NA PRESENÇA PERTUBAÇÃO EXTERNA

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underbrace{B}_{n\times m}\, \overset{m\times 1}{\underset{\sim}{u}}$$

- LINEARIDADE

Se $x_1(t)$ É SOLUÇÃO P/ ENTRADA $u_1(t)$
⇒ $\alpha \cdot x_1(t)$ É SOLUÇÃO P/ ENTRADA $\alpha \cdot u_1(t)$

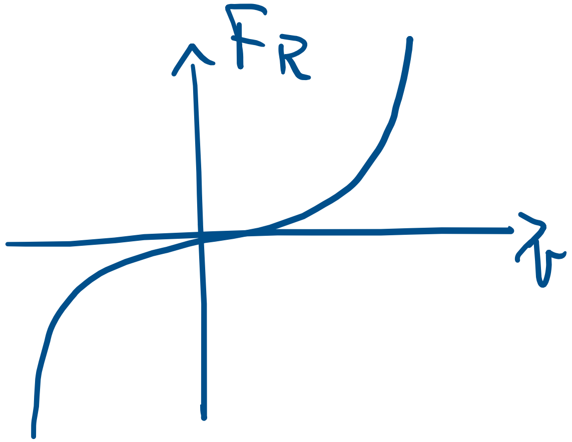
$x_1 \to u_1$
$x_2 \to u_2$ ⇒ $x_1 + x_2 \to u_1 + u_2$

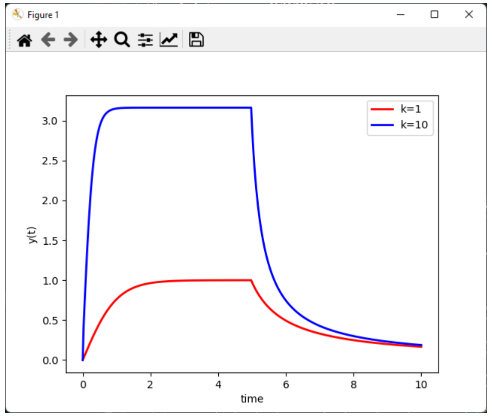
- Se $u(t)$ É SENOIDAL → $x(t)$ TENDE A SER SENOIDE NA MESMA FREQ.
- Se $u(t)$ FOR LIMITADO E SIST. ESTÁVEL $x(t)$ É LIMITADO → BIBO

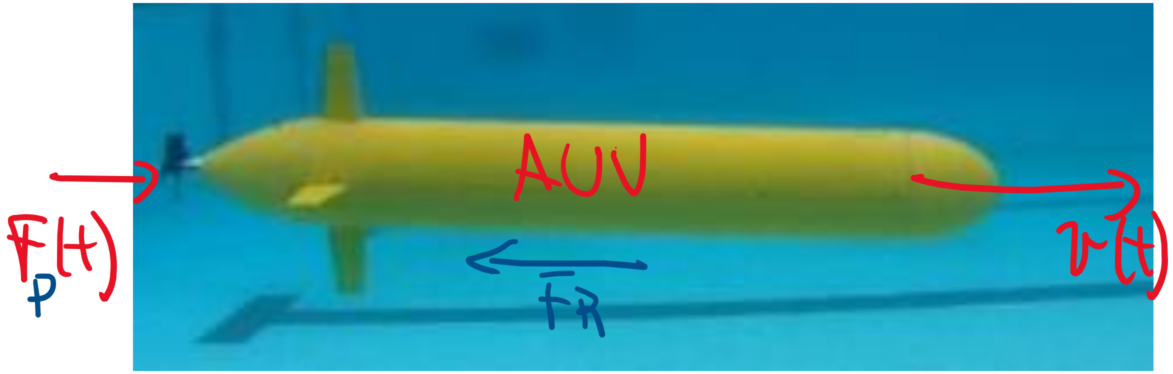
SIST. NÃO LINEARES

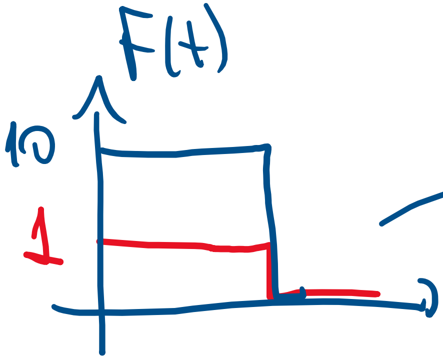
- NÃO VALE A LINEARIDADE

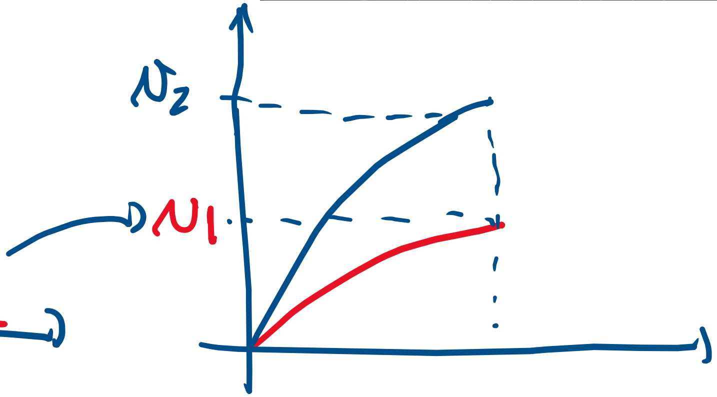
$x \to u$











$$M.\dot{v} = F_p - F_R$$

$$M\dot{v} = F_p - C.\,v.|v|$$

$$M=1,\ C=1 \Rightarrow \boxed{\dot{v} = -v|v| + F}$$

$$\dot{v} = -v|v| + F$$

equilibrio $\Rightarrow \dot{v} = 0$

$$v|v| = F \Rightarrow v^2 = F$$

$$v = \sqrt{F}$$

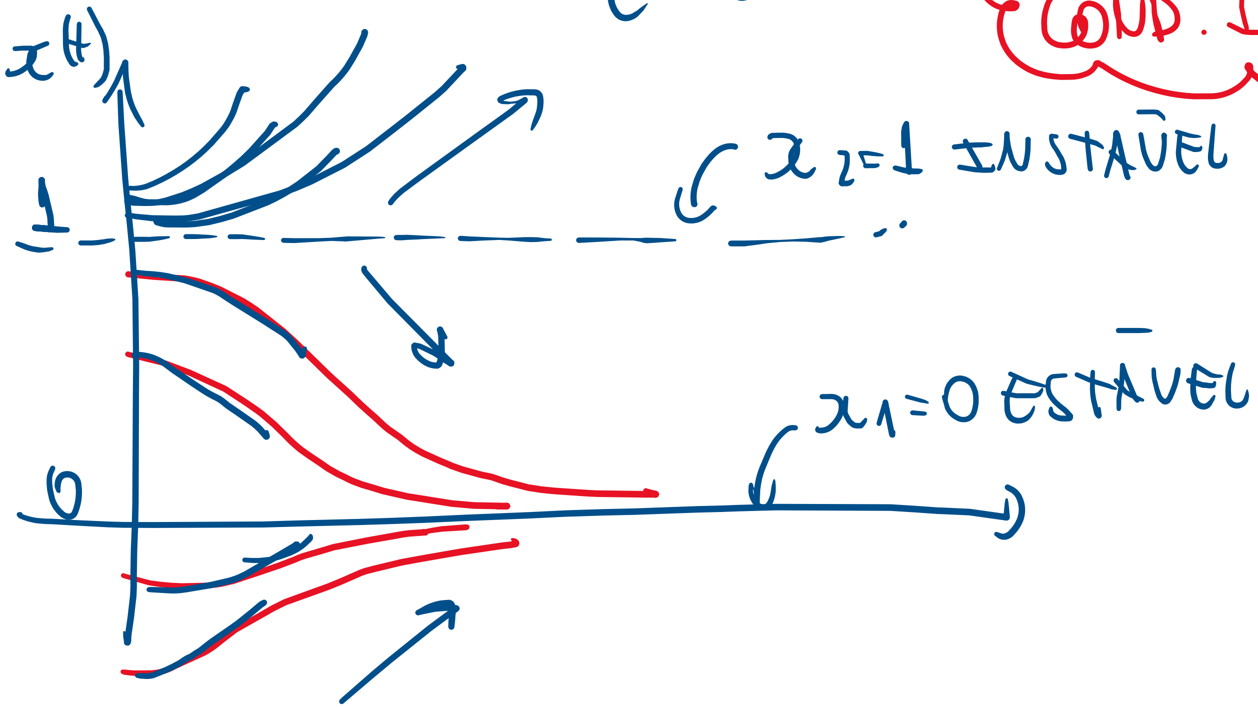
MULTIPLOS PONTOS EQUILÍBRIO

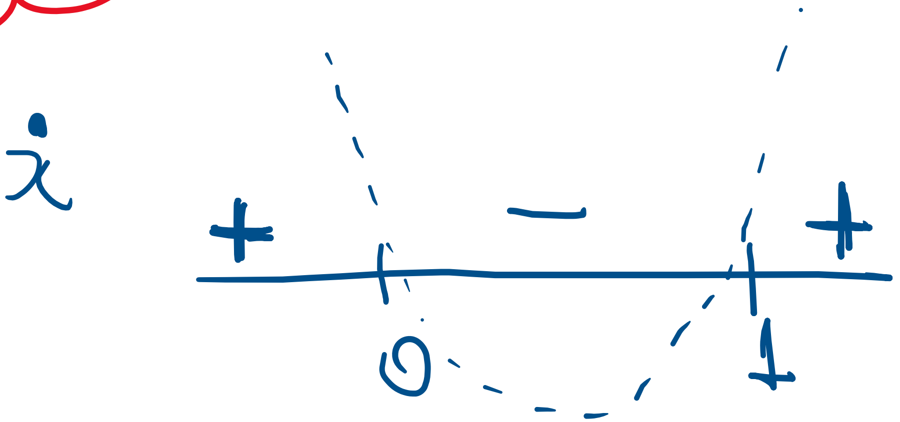
$$\dot{x} = -x + x^2$$

PTOS EQUILÍBRIO

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow -x + x^2 = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

COMPORTAMENTO DEPENDE DA COND. INICIAL





CICLO LIMITE

Sistemas não lineares podem apresentar oscilação com amplitude e frequência fixa sem excitação externa --> ciclo linte ou vibração auto excitada

Ex) VAN DER POL

$$m\ddot{x} + \underbrace{2c\,(x^2-1)\,\dot{x}}_{\text{"AMORTECIMENTO"}} + kx = 0$$

$|x| < 1 \rightarrow$ AMORT. NEGATIVO

$|x| > 0 \rightarrow$ AMORT. POSITIVO

```
# function that returns dy/dt
def model(z,t,u,k,c):
    #z[0]=x
    #z[1]=xdot
    dz1dt = z[1]
    dz2dt = -2*c*(z[0]**2-1)*z[1] - k*z[0]
    dzdt = [dz1dt,dz2dt]
    return dzdt
```

$\boxed{m=1}$

$$\begin{cases} z_1 = x \\ z_2 = \dot{x} \end{cases}$$

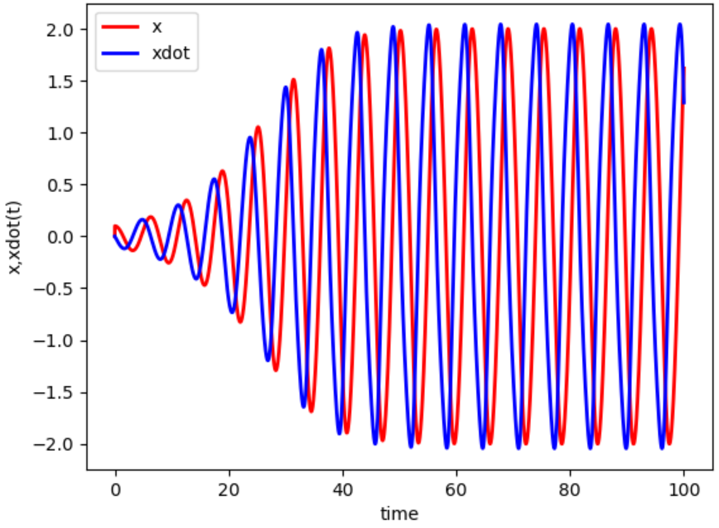
$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -2c\,(z_1^2-1)\,z_2 - k\,z_1 \end{cases}$$

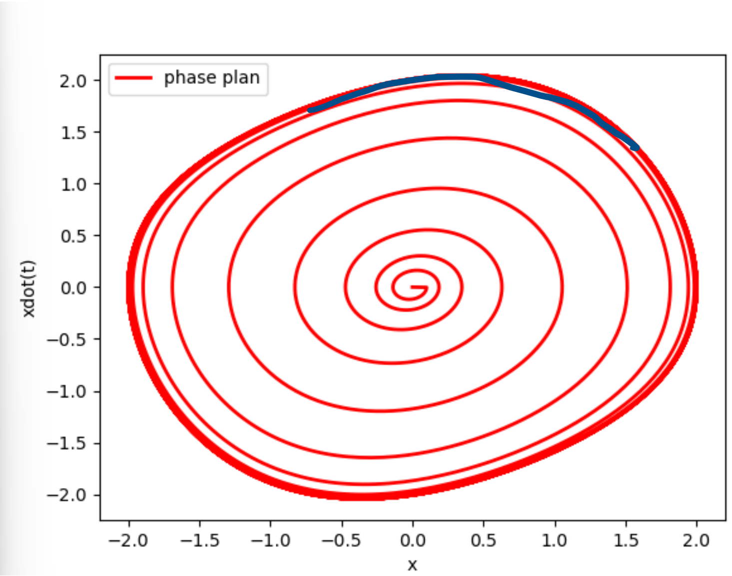
$$\ddot{x} + 2c(x^2-1)\dot{x} + kx = 0$$

CICLO LIMITE

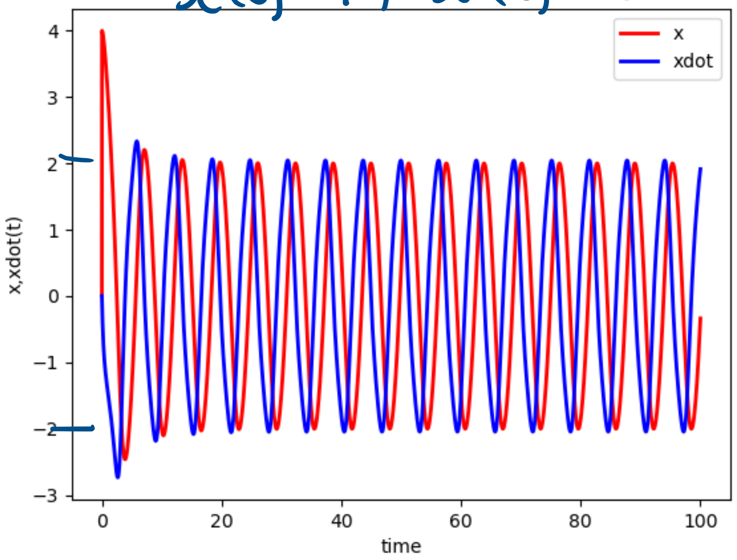
- AMPLITUDE OSCILAÇÃO IDÊNTICA, NÃO DEPENDE $x(0)$
- NÃO É SENSÍVEL A PEQUENAS VARIAÇÕES DE PARÂMETROS

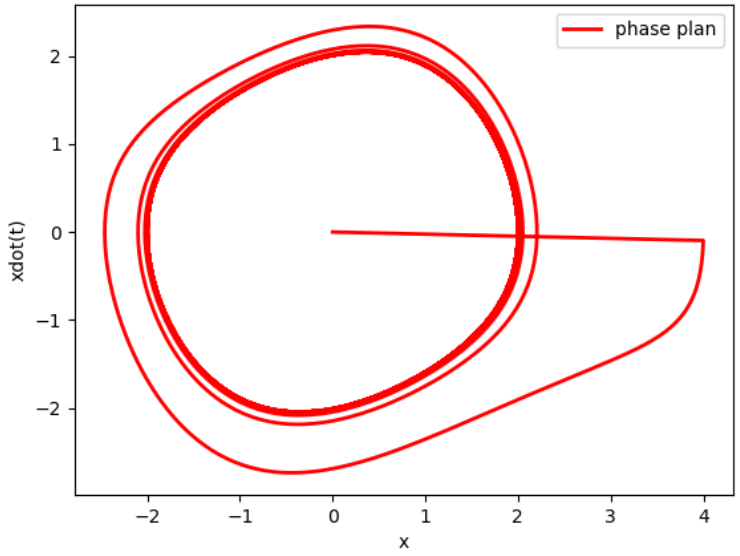
$x(0) = 0,1 \; ; \; \dot{x}(0) = 0$



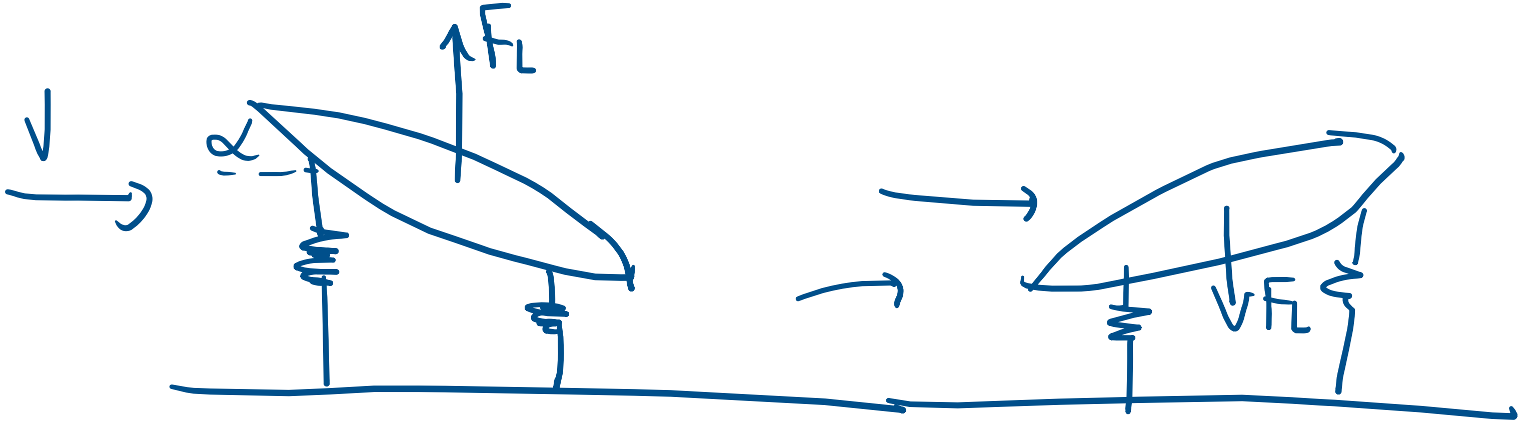


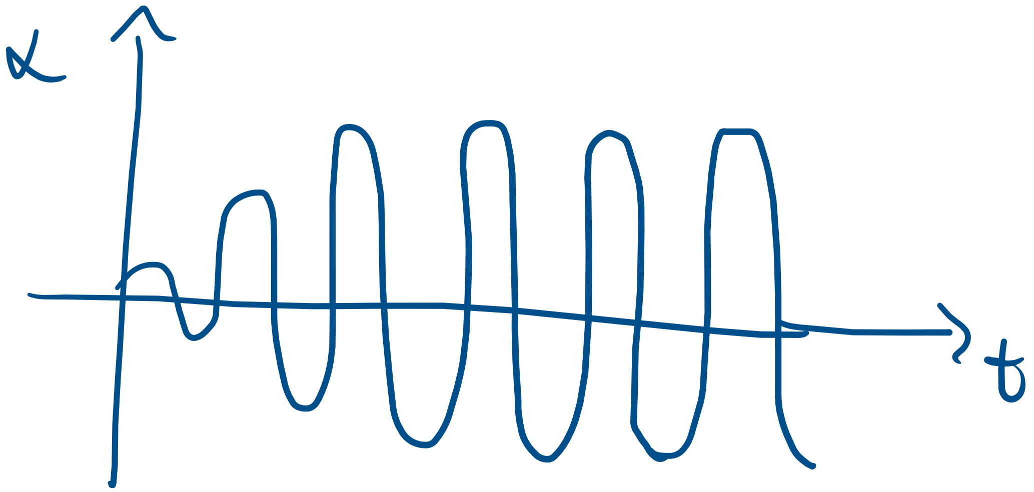
$x(0) = 4 \; ; \; \dot{x}(0) = 0$





FLUTTERING





BIFURCAÇÃO

UMA VARIAÇÃO PARAMÉTRICA OCASIONA UMA VARIAÇÃO QUALITATIVA DO COMPORTAMENTO DO SISTEMA

$$\ddot{x} + \underbrace{\alpha x}_{\text{"MOLA"}} + x^3 = 0$$

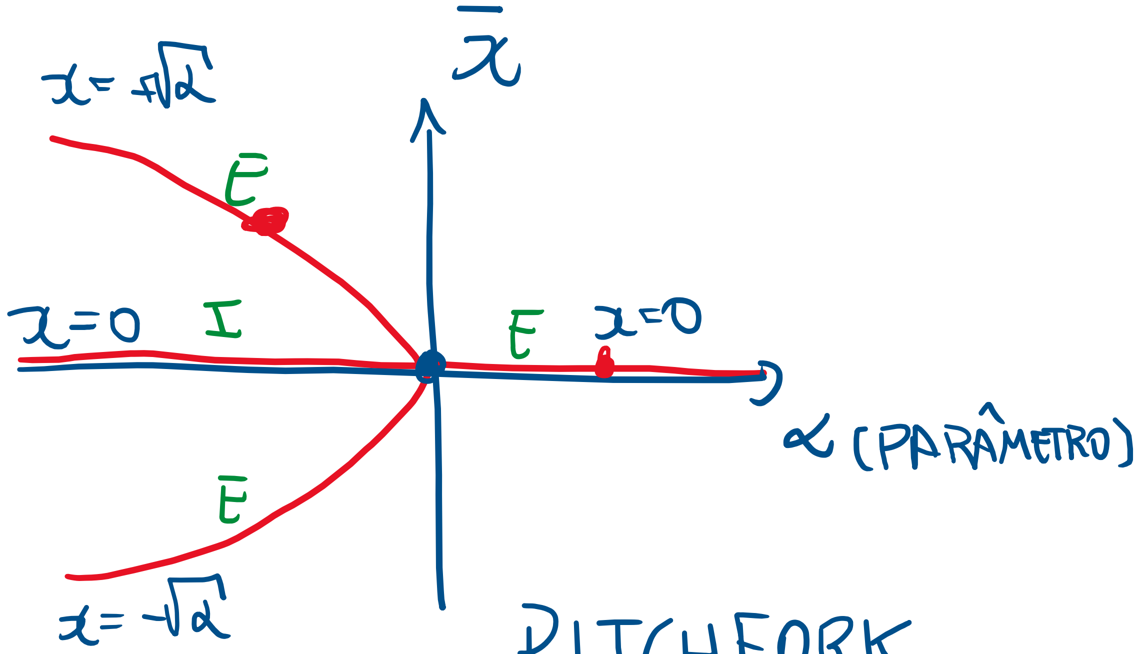
EQUILÍBRIO: $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot x + x^3 = 0$

$$x \cdot (\alpha + x^2) = 0$$

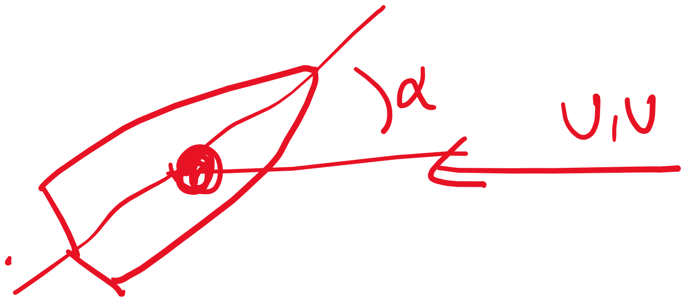
$\rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$

$\rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$

$\bar{x} = \pm\sqrt{\alpha}$



PITCHFORK BIFURCATION



CAOS

PEQUENAS VARIAÇÕES CONDIÇÃO INICIAL → LEVAM A GRANDES MUDANÇAS LONGO PRAZO

$$\ddot{x} + 0{,}1\dot{x} + x^5 = 6\,\mathrm{sen}\,t$$

$$x(0);\ \dot{x}(0) = [2;3]$$

$$x(0);\ \dot{x}(0) = [2.01;3.01]$$