Linha Elástica

Valério S. Almeida
Julho/2021

DEFLEXÃO EM VIGAS RETAS

$$\sigma_x(x) = \left[-E \cdot v''(x)\right] \cdot y$$

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y = -E.v''(x).y \rightarrow$$

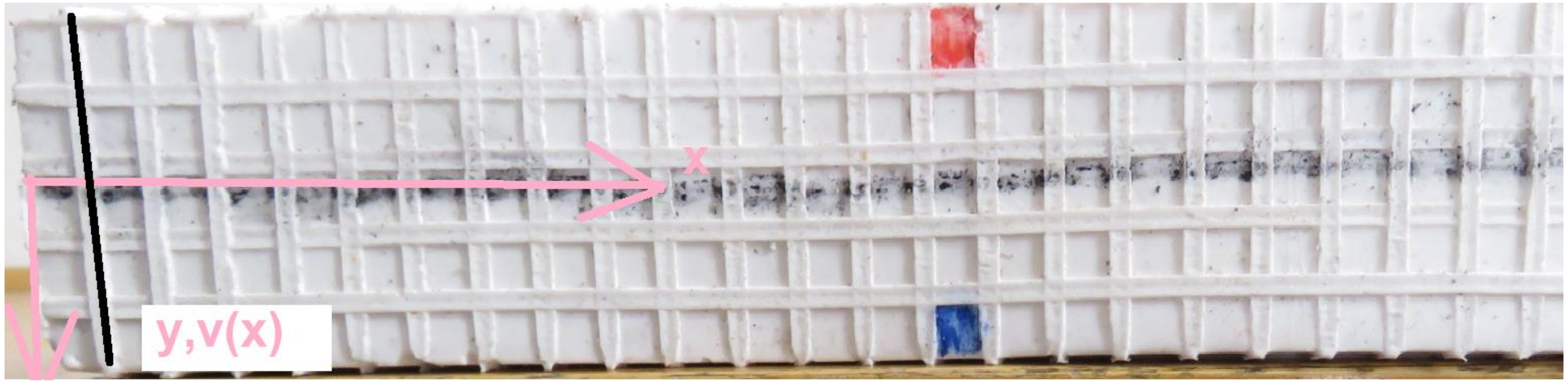
$$v''(x) = -\frac{M_z}{E.I_z} = -\frac{M_z(x)}{E.I_z}$$

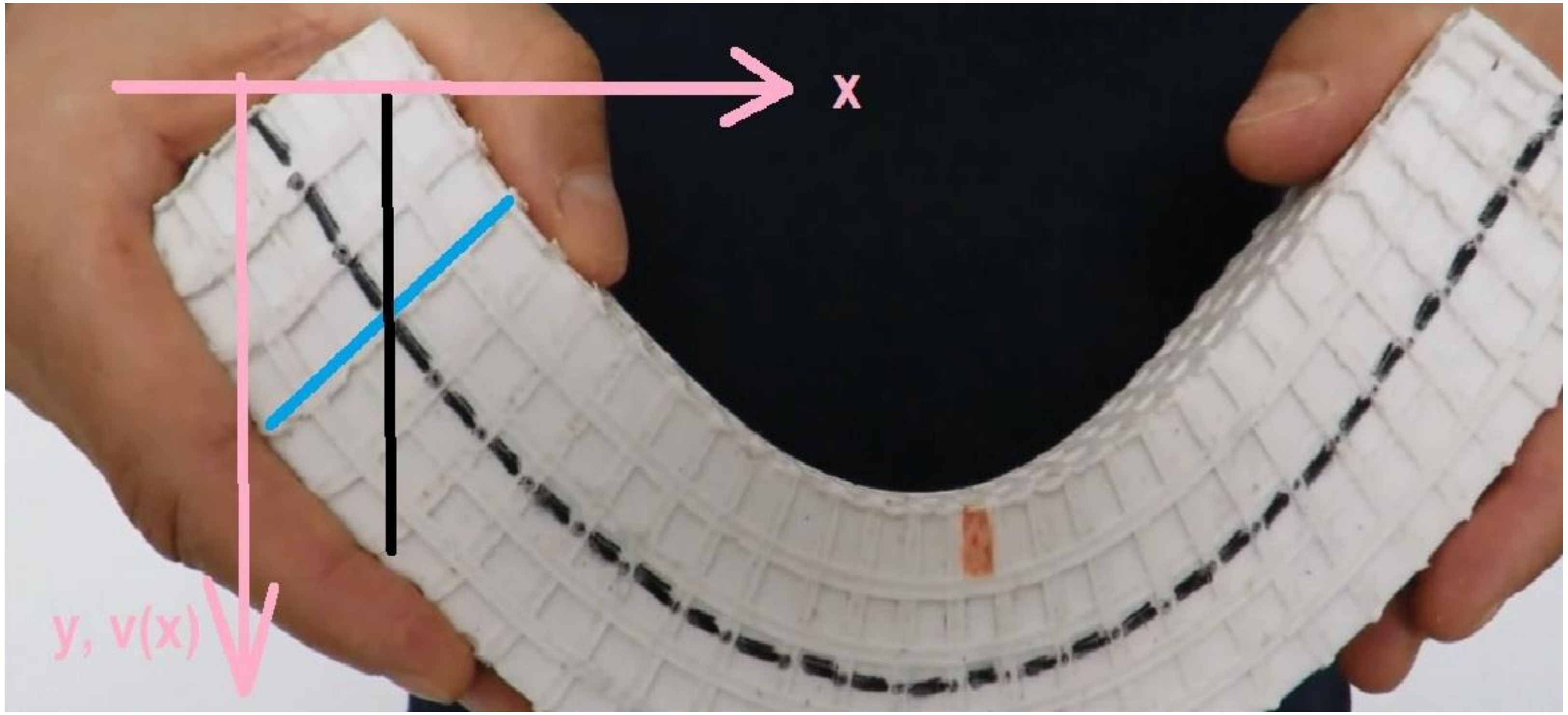
$$\boxed{v''(x) = -\frac{M_z(x)}{E.I_z}}$$

Equações da Linha Elástica:

- **v(x): deslocamento na direção y**
- **v´(x): rotação da seção**

DEFLEXÃO EM VIGAS RETAS

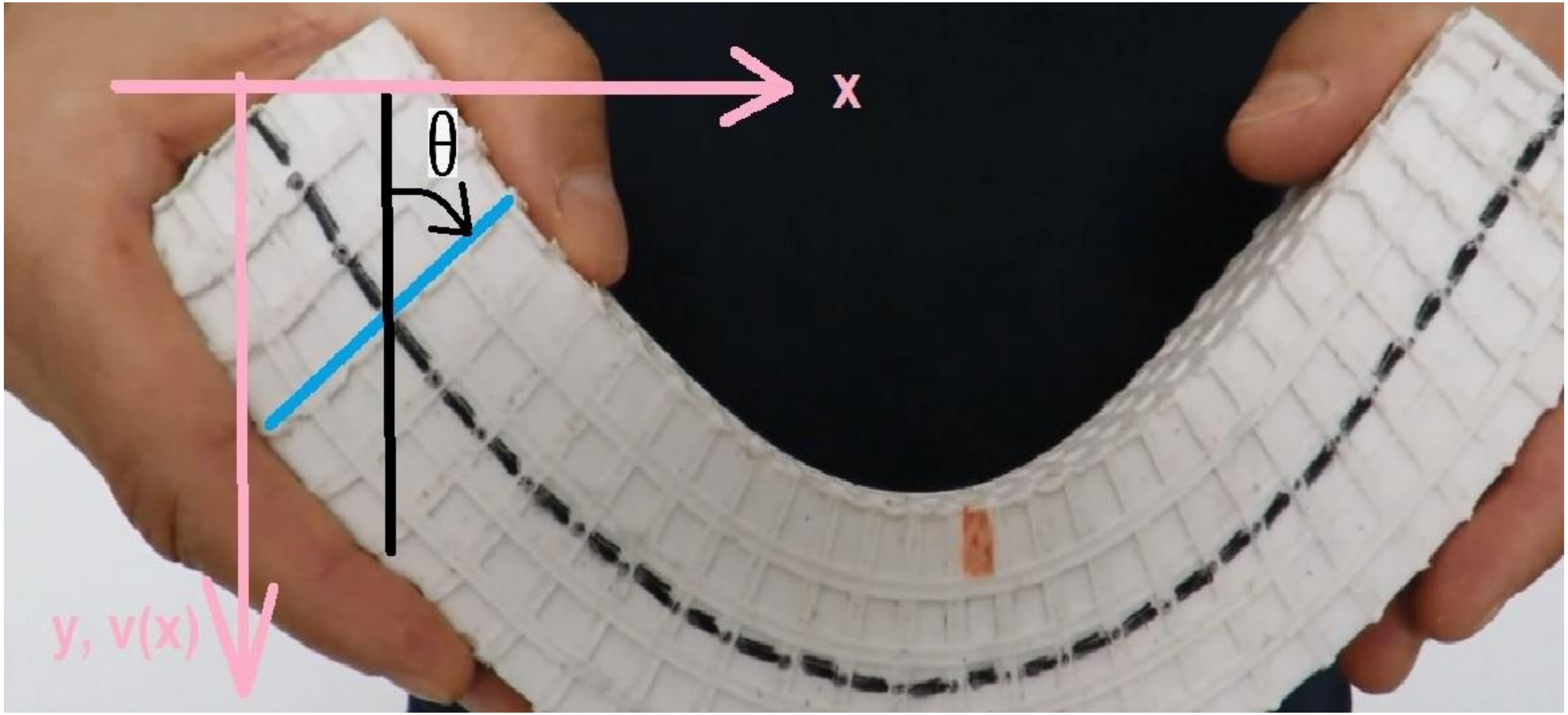




$$v''(x) = -\frac{M_z(x)}{E.I_z}$$

ROTAÇÃO EM VIGAS RETAS

$$\frac{dv(x)}{dx} \approx \theta(x)$$

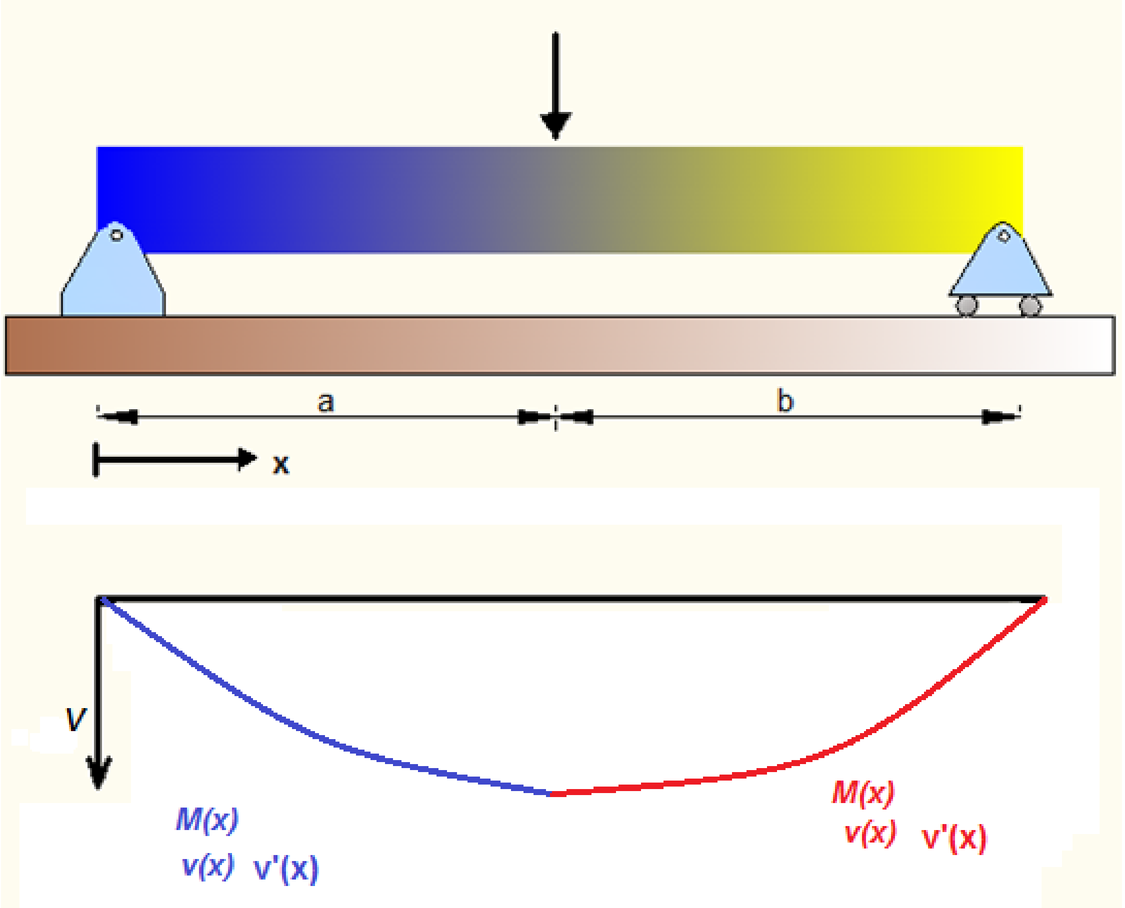


DEFLEXÃO EM VIGAS RETAS

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

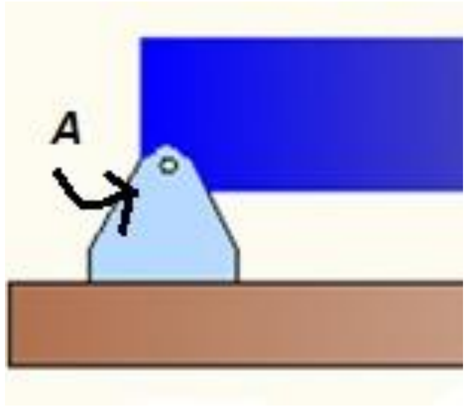
$$\frac{dv(x)}{dx} \approx \theta = \frac{-1}{EI}\left[\int_0^x M(x)dx + C_1\right]$$

$$EI\,v(x) = \frac{-1}{EI}\left[\int_0^x dx \int_0^x M(x)dx + C_1 x + C_2\right]$$



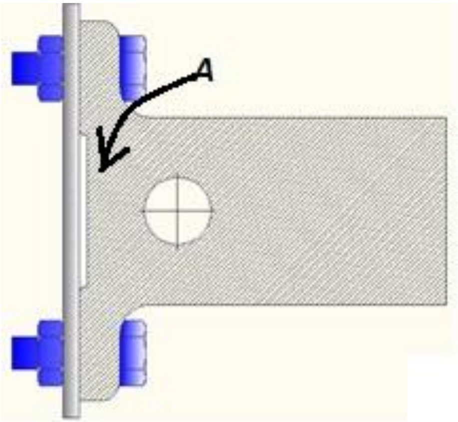
Cada trecho tem suas equações da linha elástica: v(x) e v’(x)

DEFLEXÃO EM VIGAS RETAS

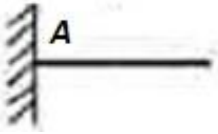


Cada trecho duas constantes:

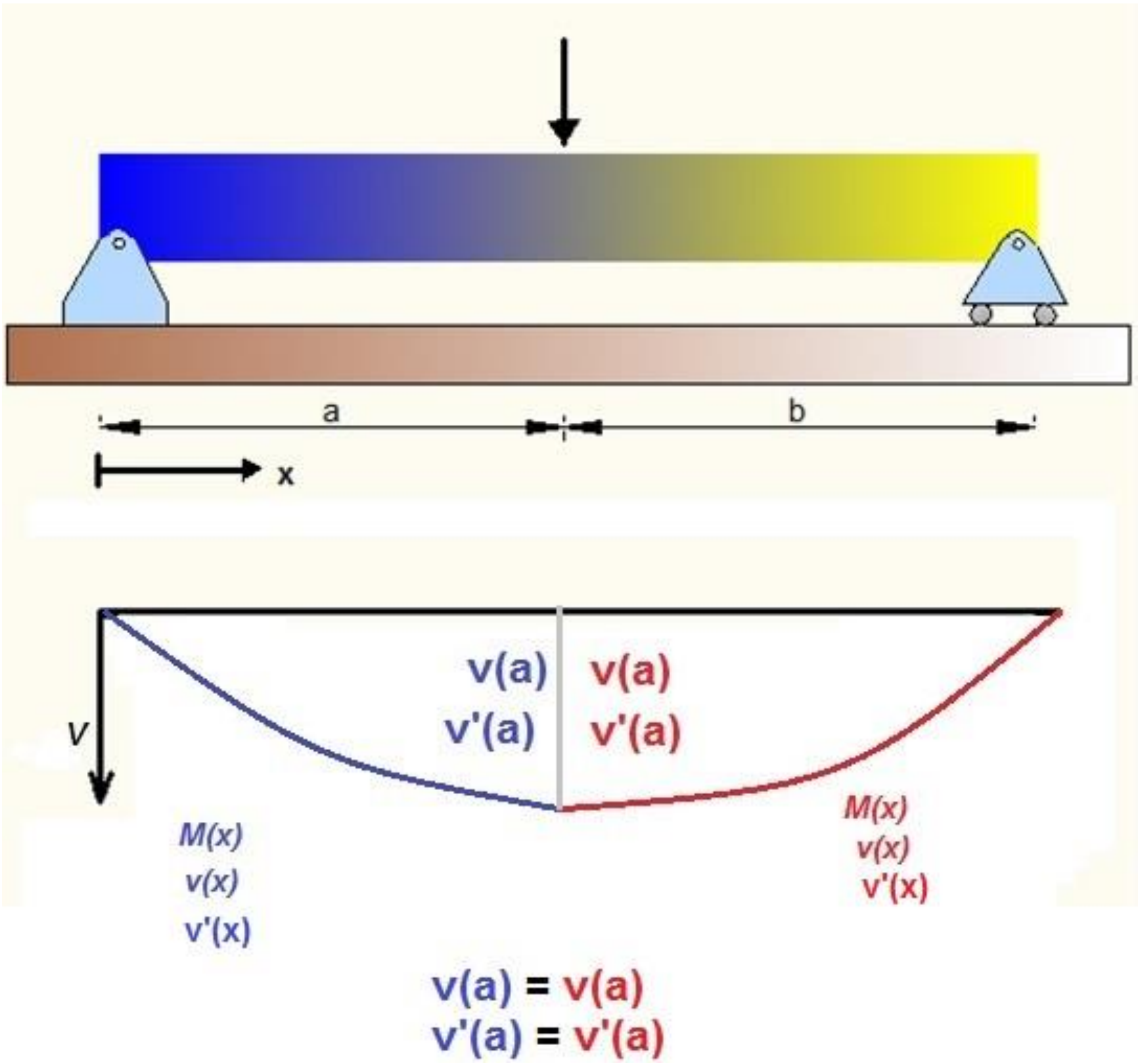
- **Se tem apoio no trecho: $v_A = 0$**



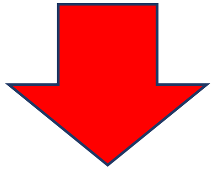
- **Se tem engaste no trecho: $v_A = \theta_A = 0$**



DEFLEXÃO EM VIGAS RETAS



- **Compatibilizar deslocamentos e rotações entre pontos comuns dos trechos adjacentes**



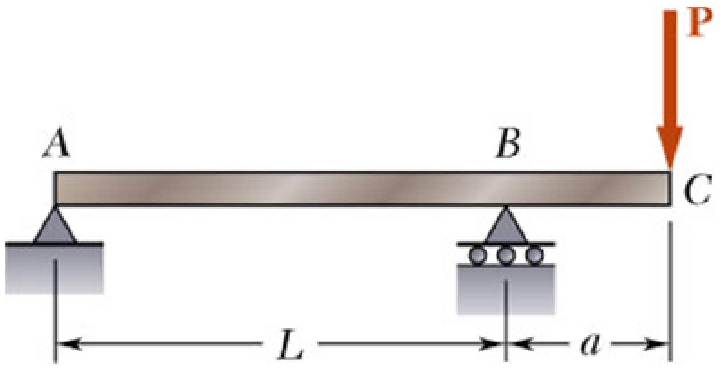
Todas as constantes são obtidas

EXEMPLO 1 – Resolver por integração direta

ESTÁTICA E MECÂNICA DOS MATERIAIS

Beer | Johnston | DeWolf | Mazurek

Problema Resolvido 15.1



$W360 \times 101 \quad I = 302 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad E = 200 \text{ GPa}$

$P = 220 \text{ kN} \quad L = 4{,}5 \text{ m} \quad a = 1{,}2 \text{ m}$

Para a parte *AB* da viga biapoiada com balanço, (*a*) determine a equação da linha elástica, (*b*) determinar a deflexão máxima e (*c*) avaliar $y_{máx}$.

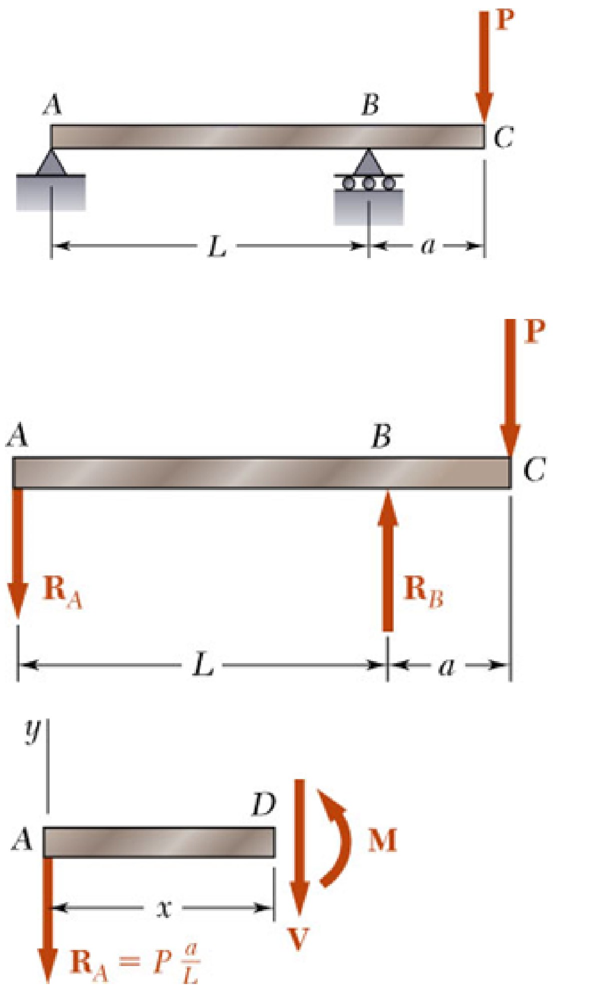
SOLUÇÃO:

- Desenvolver uma expressão para M (x) e obter a equação diferencial para a linha elástica.
- Integrar a equação diferencial duas vezes e aplicar as condições de contorno para a obtenção da linha elástica.
- Localizar o ponto de inclinação zero ou ponto de deflexão máxima.
- Avaliar a deflexão máxima correspondente.

grupo a

EXEMPLO 1

Problema Resolvido 15.1



SOLUÇÃO:

- Desenvolver uma expressão para M (x) e obter a equação diferencial para a linha elástica.
  - Reações:

$$R_A = \frac{Pa}{L}\downarrow \qquad R_B = P\left(1+\frac{a}{L}\right)\uparrow$$

  - A partir do diagrama de corpo livre para a seção *AD*,

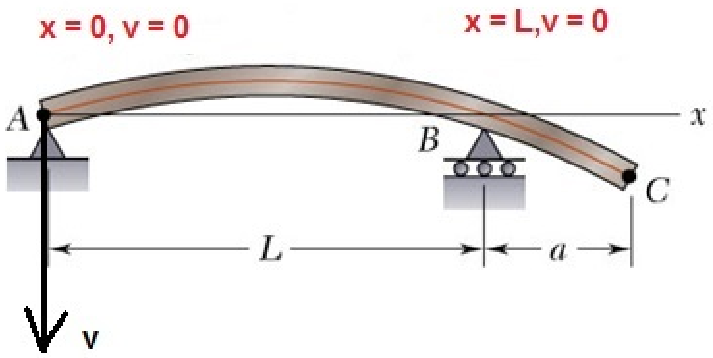
$$M = -P\frac{a}{L}x \quad (0 < x < L)$$

  - A equação diferencial para a linha elástica,

$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\left[-P\frac{a}{L}x\right] = P\frac{a}{L}x$$

E X E M P L O 1

Problema Resolvido 15.1



$$EI\frac{d^2v(x)}{dx^2} = P\frac{a}{L}x$$

Integrar a equação diferencial duas vezes e aplicar as condições de contorno para a obtenção da linha elástica.

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 + C_1$$

$$EI\,v = \frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 + C_1x + C_2$$

Para $x = 0,\ v = 0:\quad C_2 = 0$

Para $x = L,\ v = 0:\quad 0 = \frac{1}{6}P\frac{a}{L}L^3 + C_1L \quad C_1 = \frac{-1}{6}PaL$

Substituindo,

$$EI\frac{dv(x)}{dx} = \frac{1}{2}P\frac{a}{L}x^2 - \frac{1}{6}PaL \qquad \frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) = \frac{PaL}{6EI}\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right]$$

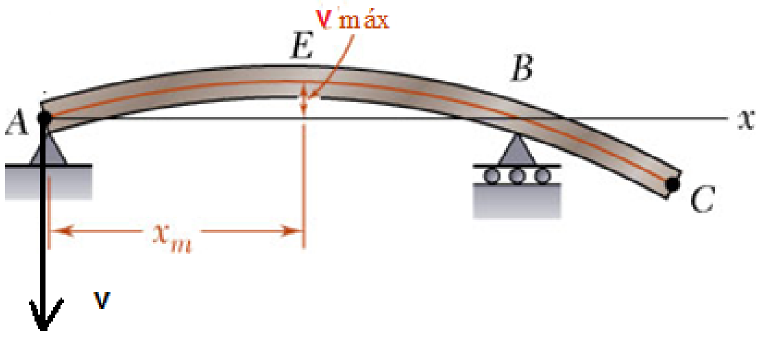
$$EI\,v(x) = \frac{1}{6}P\frac{a}{L}x^3 - \frac{1}{6}PaLx$$

$$\boxed{v(x) = \frac{PaL^2}{6EI}\left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{x}{L}\right]}$$

E X E M P L O 1

Problema Resolvido 15.1

$$y = \frac{-PaL^2}{6EI}\left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$



- Localizar o ponto de inclinação zero ou ponto de deflexão máxima.

$$\frac{dv}{dx} = 0 = \frac{PaL}{6EI}\left[3\left(\frac{x_m}{L}\right)^2 - 1\right] \quad x_m = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0{,}577L$$

- Avaliar a deflexão máxima correspondente.

$$v(x = 0{,}577L)_{máx} = \frac{PaL^2}{6EI}\left[(0{,}577)^3 - (0{,}577)\right]$$

$$\boxed{y_{máx} = -0{,}0642\frac{PaL^2}{6EI}}$$

$$v_{máx} = -0{,}0642\frac{\left(220\times10^3\ \text{N}\right)\left(1{,}2\ \text{m}\right)\left(4{,}5\ \text{m}\right)^2}{\left(200\times10^9\ \text{N/m}^2\right)\left(302\times10^{-6}\ \text{m}^4\right)}$$

$$\boxed{y_{máx} = -5{,}7\ \text{mm}}$$

E
X
E
M
P
L
O

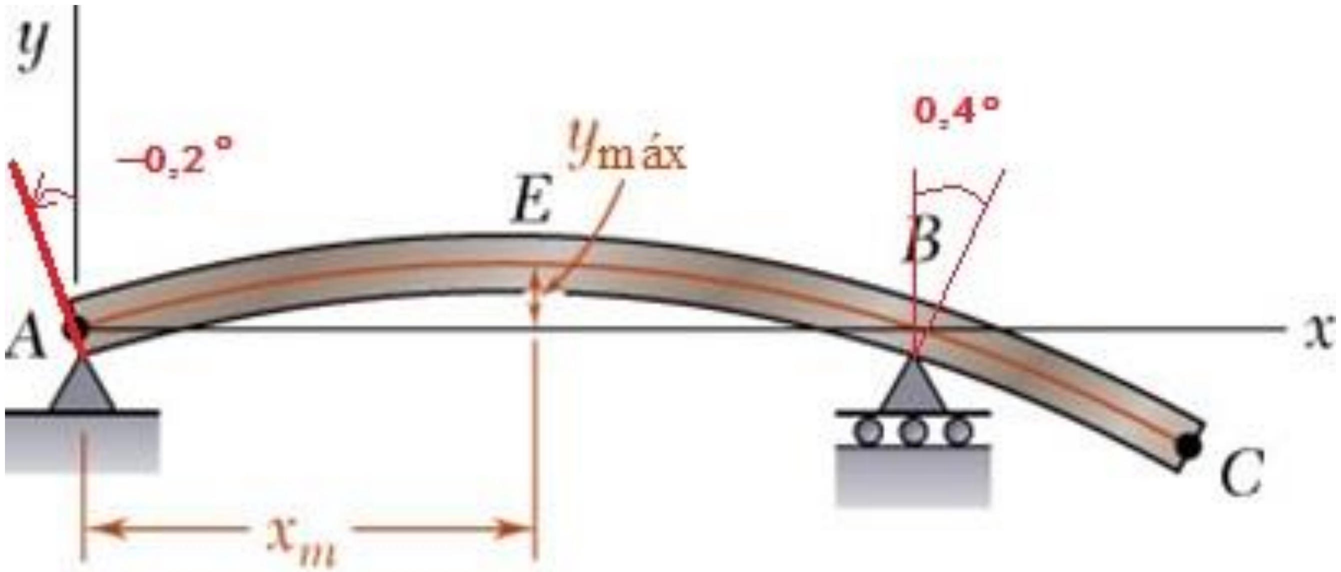
1

Rotações:

$$\theta(x) = \frac{PaL}{6EI}.\left[3.\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right]$$

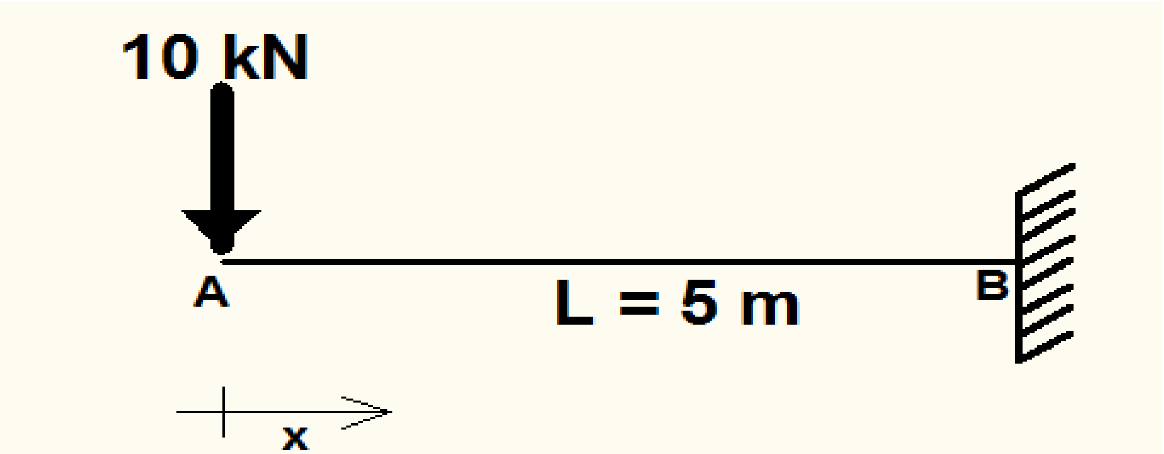
$$\theta(0) = \frac{PaL}{6EI}.\left[3.\left(\frac{0}{L}\right)^2 - 1\right] = -0{,}003278\ rad\ = -0{,}2^{\circ}$$

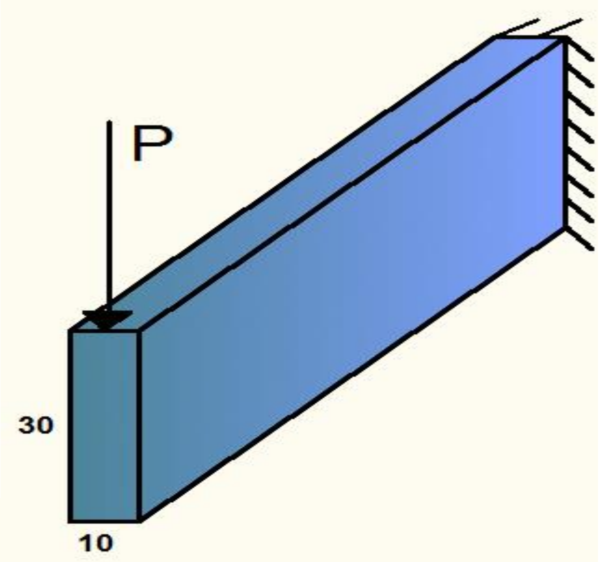
$$\theta(L) = \frac{PaL}{6EI}.\left[3.\left(\frac{L}{L}\right)^2 - 1\right] = 0{,}006556\ rad\ = 0{,}4^{\circ}$$



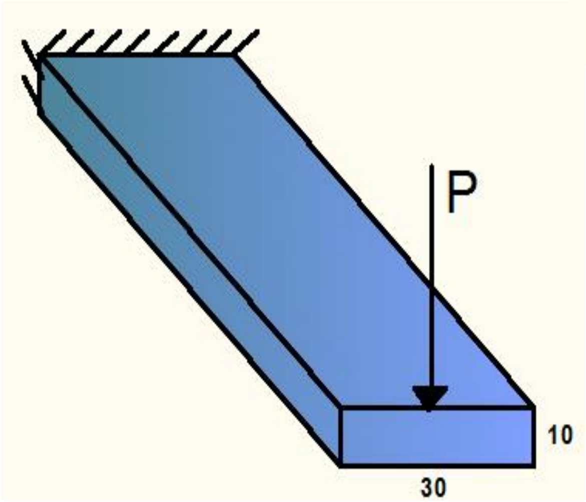
EXEMPLO 2 - Resolver por integração direta

Calcular os deslocamentos e rotações em A. Considere E = 200 GPa (aço estrutural). Avalie as duas situações abaixo.





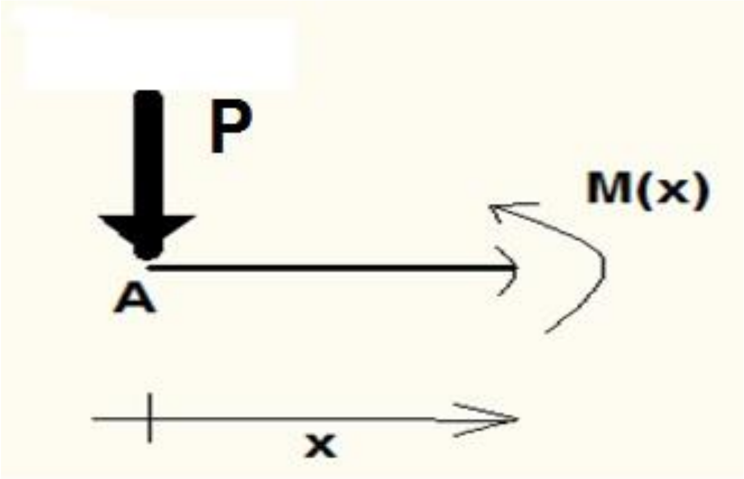
Situação 1



Situação 2

EXEMPLO 2 - Resolver por integração direta

a) Obter M(x) e aplica-la nas equações de v’’(x):



$$M(x) = -P.x$$

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{P.x}{EI} \qquad v'(x).EI = \frac{P.x^2}{2} + C_1$$

$$v(x).EI = \frac{P.x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Condições de contorno:

$$v(L) = v'(L) = 0 \quad (engaste) \rightarrow \; C_1 = \frac{-P.L^2}{2}; \quad C_2 = \frac{P.L^3}{3}$$

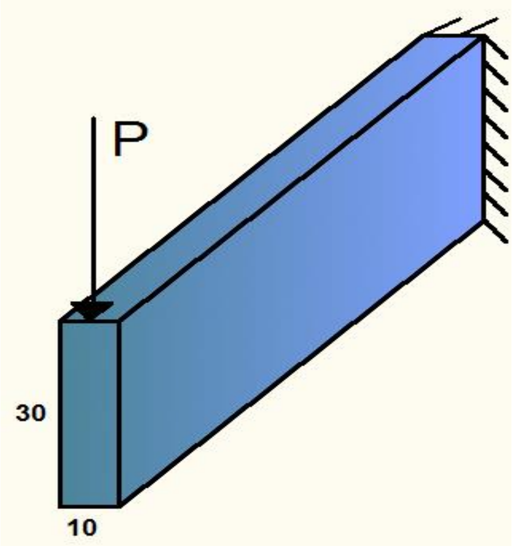
$$v(x) = \frac{P}{6.EI}\left[x^3 - 3.L^2.x + 2.L^3\right] \qquad v'(x) = \frac{P}{2.EI}\left[x^2 - L^2\right]$$

EXEMPLO 2 - Resolver por integração direta

b) Situação 1: substituir valores, em x = 0

$$v(0) = \frac{10}{6.200.10^6.\frac{0{,}1.0{,}3^3}{12}}\left[0-0+2.(5)^3\right] = 0{,}0093m = 9{,}3mm$$

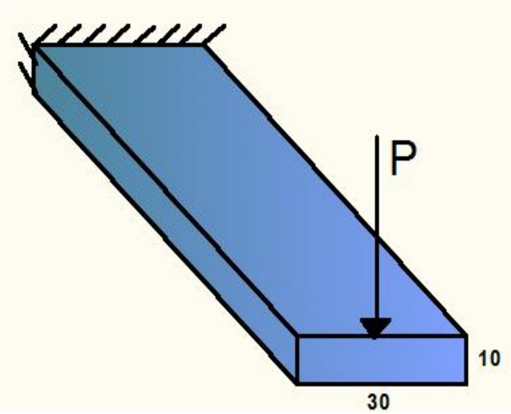
$$v'(0) = \frac{10}{2.200.10^6.\frac{0{,}1.0{,}3^3}{12}}\left[0-5^2\right] = -0{,}0028rad = -0{,}16^\circ$$



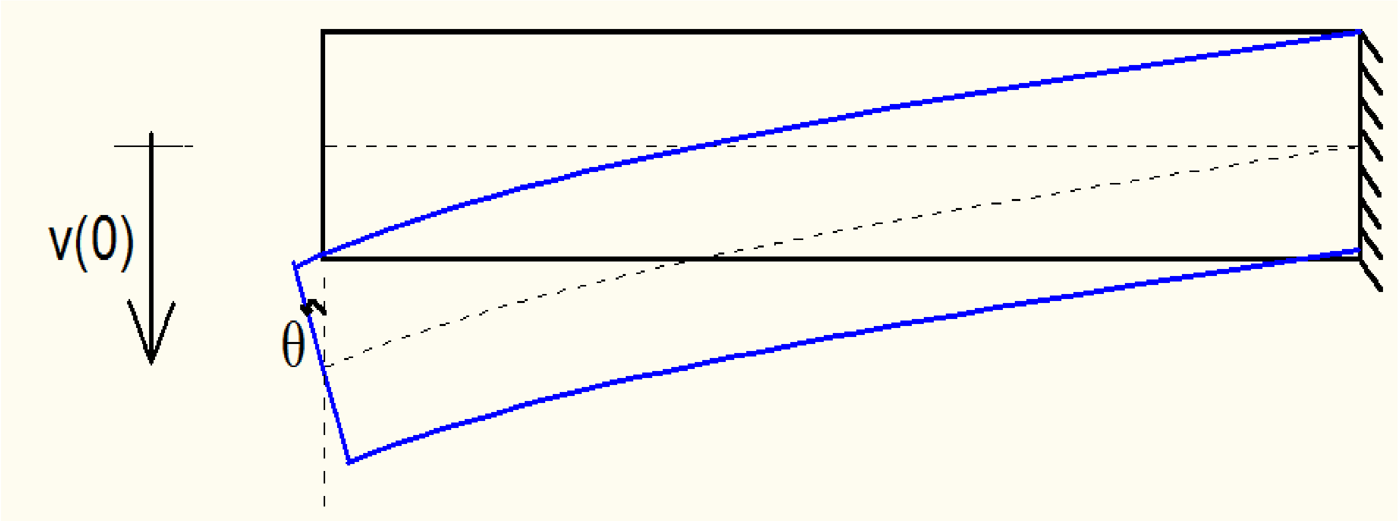
c) Situação 2: substituir valores, em x = 0

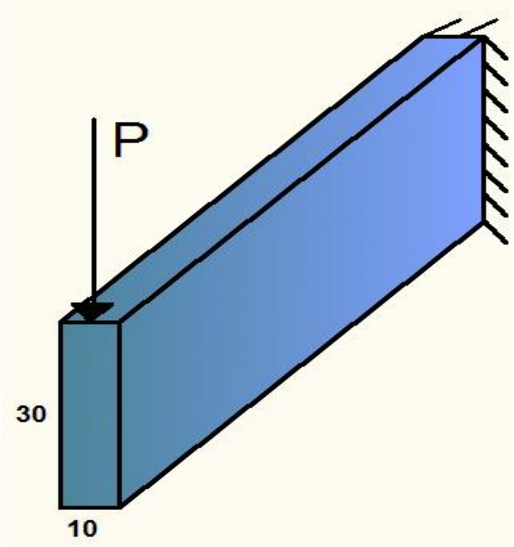
$$v(0) = \frac{10}{6.200.10^6.\frac{0{,}3.0{,}1^3}{12}}\left[0-0+2.(5)^3\right] = 0{,}0833m = 83{,}3mm$$

$$v'(0) = \frac{10}{2.200.10^6.\frac{0{,}3.0{,}1^3}{12}}\left[0-5^2\right] = -0{,}025rad = -1{,}4^\circ$$

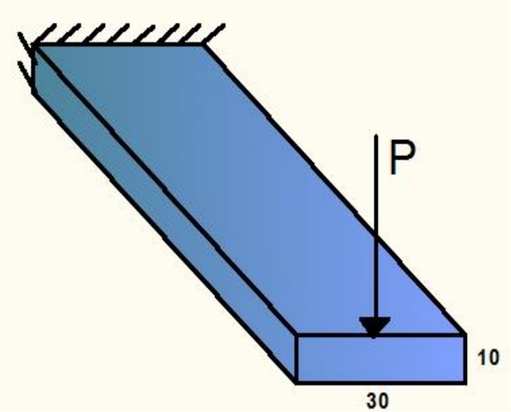


EXEMPLO 2 - Resolver por integração direta



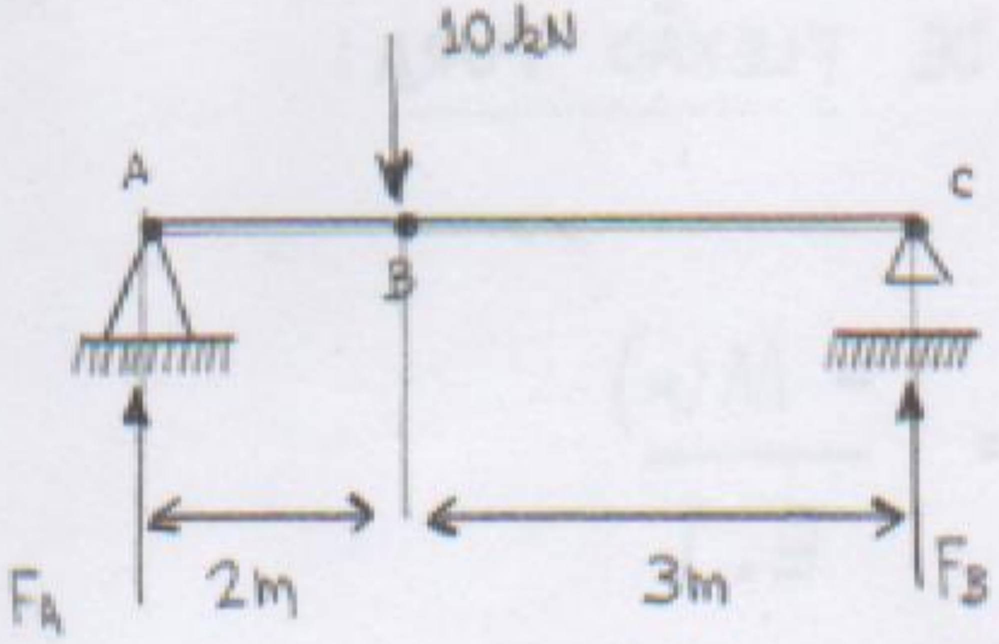


$v(0) = 9{,}3mm$ $\theta(0) = -0{,}16^{\circ}$



$v(0) = 83{,}3mm$ $\theta(0) = -1{,}4^{\circ}$

EXEMPLO 3 - Resolver por integração direta

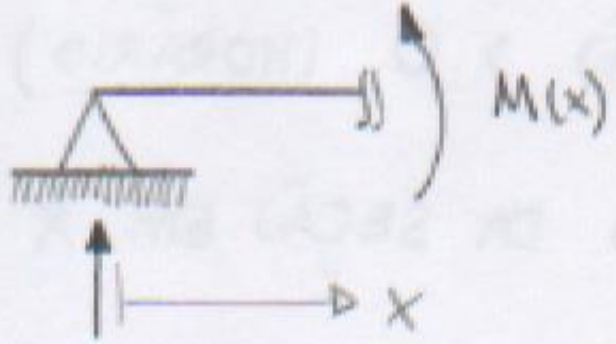


$E.I$ = CONSTANTE

$$\sum M_A = 0 : \quad F_B \cdot 5 = 10 \cdot 2 \rightarrow \begin{cases} B = 4\,kN \\ A = 6\,kN \end{cases}$$

EXEMPLO 3 - Resolver por integração direta

(I) $0 < x < 2m$:



$\boxed{M(x) = 6x}$

$F_A = 6kN$

$$v_1''(x) \cdot EI = -(6x)$$

$$v_1'(x) \cdot EI = \frac{-6x^2}{2} + C_1$$

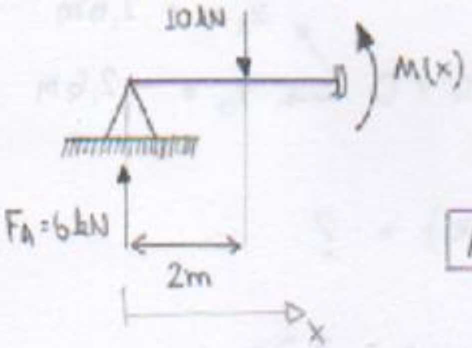
$$v_1(x) \cdot EI = -x^3 + C_1 x + C_2$$

EXEMPLO 3 Resolver por integração direta

SABEMOS QUE NO APOIO O DESLOCAMENTO É NULO (ZERO):

$$v(x=0) = 0 \therefore \boxed{C_2 = 0} \quad (I)$$

(II) $2 < x < 5m$:



$$M(x) = 6x - 10(x-2) \Rightarrow$$

$$\boxed{M(x) = -4x + 20}$$

$$v_2''(x) \cdot EI = -(-4x + 20) \Rightarrow$$

$$v_2'(x) \cdot EI = 2x^2 - 20x + C_3 \Rightarrow$$

$$v_2(x) \cdot EI = \frac{2x^3}{3} - 10x^2 + C_3 x + C_4$$

SABEMOS QUE NO APOIO O DESLOCAMENTO É NULO (ZERO):

EXEMPLO 3 - Resolver por integração direta

$v(x=5)=0$

$$\boxed{\frac{2}{3}\cdot(5)^3+10\cdot(5)^2+C_3\cdot 5+C_4=0}\quad \text{(ii)}$$

TAMBÉM SABEMOS QUE EM B = 2m :

- $v_1(x=2) = v_2(x=2)$:

$$\boxed{-(2)^3+(2)\cdot C_1=\frac{2}{3}\cdot(2)^3-40+2C_3+C_4}$$

(iii)

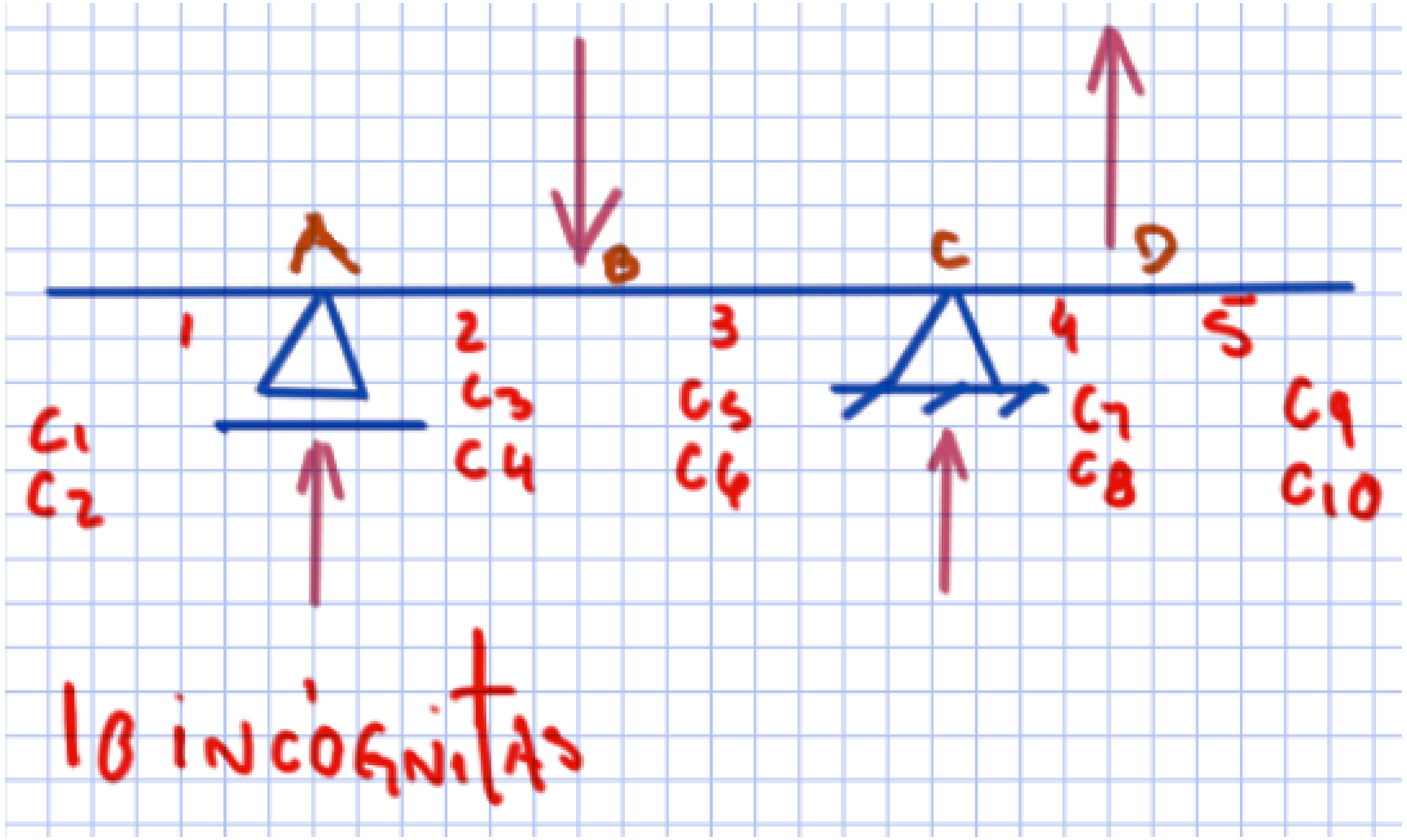
- $v_1'(x=2) = v_2'(x=2)$:

$$\boxed{-3\cdot(2)^2+C_1=2\cdot(2)^2+20\cdot(2)+C_3}$$

3 incógnitas
3 equações

$$\begin{bmatrix}0 & 5 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}C_1\\ C_3\\ C_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1000\\ -80/3\\ 60\end{Bmatrix}$$

Para casos gerais - Resolver por integração direta



Muitas cargas: trabalhoso!

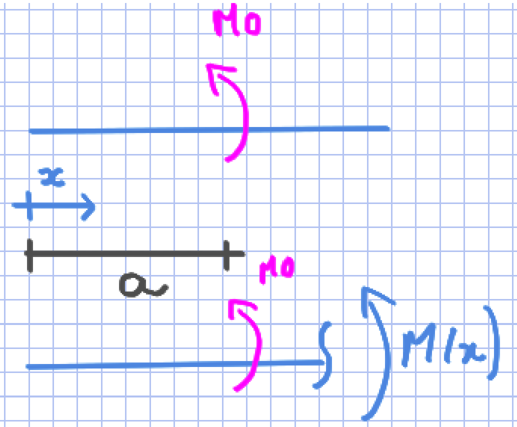
Método baseado no uso de funções singulares
Funções de descontinuidades – Funções de MacAuley

As funções singulares são definidas por:

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & \text{quando } x \geq a \\ 0 & \text{quando } x < a \end{cases}$$

$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \frac{1}{n+1}\langle x-a\rangle^{n+1} \qquad \text{para } n \geq 0$$

Método baseado no uso de funções singulares
Funções de descontinuidades – Funções de MacAuley

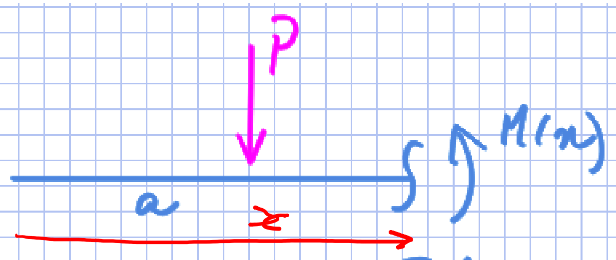


$\Sigma M = 0$

$$M(x) + M_0 \langle x-a \rangle^0 = 0$$

$$M(x) = -M_0 \langle x-a \rangle^0$$

$$\begin{cases} \text{se } x < a \rightarrow M(x) = 0 \\ \text{se } x > a \rightarrow M(x) = -M_0 (x-a)^0 \end{cases}$$

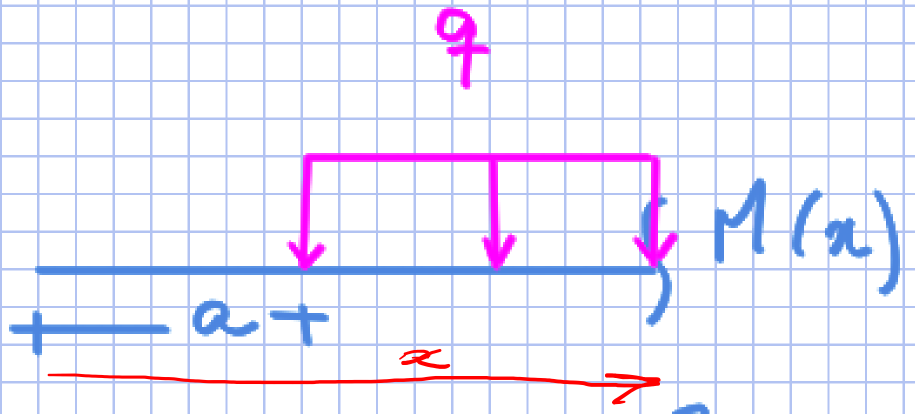


$\Sigma M = 0:\quad M(x) + P\langle x-a \rangle = 0$

$$M(x) = -P\langle x-a \rangle$$

$$\begin{cases} \text{se } x < a \rightarrow M(x) = 0 \\ \text{se } x > a \rightarrow M(x) = -P(x-a) \end{cases}$$

Método baseado no uso de funções singulares
Funções de descontinuidades – Funções de MacAuley

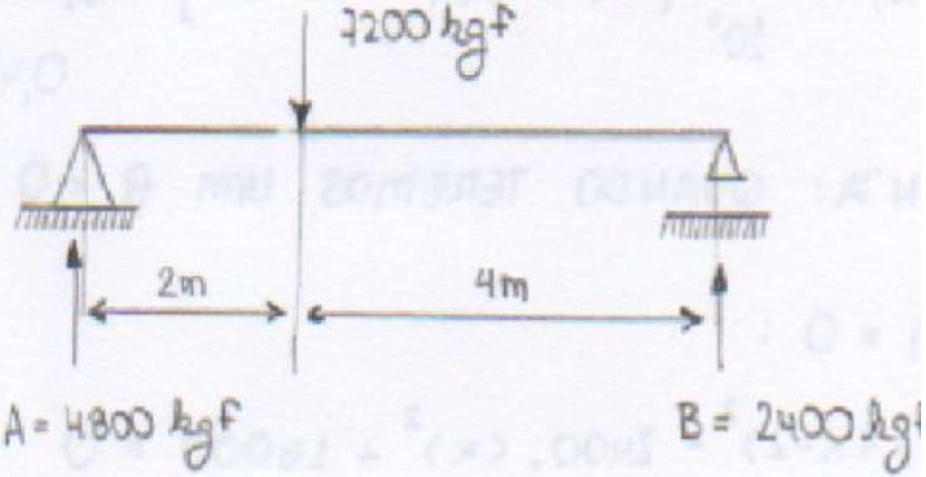


$$M(x) + \frac{q}{2}\langle x-a\rangle^2 = 0$$

$$M(x) = -\frac{q}{2}\langle x-a\rangle^2 \quad \begin{cases} \text{se } x < a \rightarrow M(x) = 0 \\ \text{se } x > a \rightarrow M(x) = -\frac{q}{2}(x-a)^2 \end{cases}$$

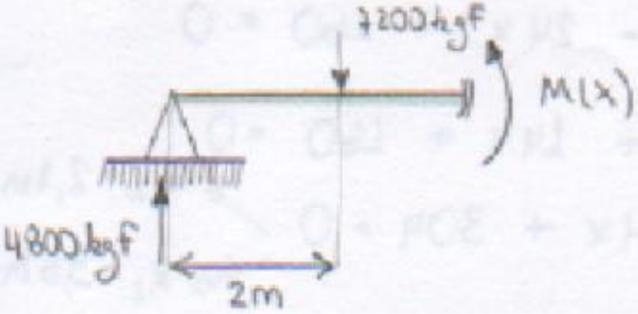
EXEMPLO 4 - Funções de descontinuidades

EXERCÍCIO 21 : $E.I = 10^6 \ kgf \ m^2$



• $v(x) = ?$ • $v_{máx} = ?$

Ⓐ OBTER $M(x)$ POR MACAULY



EXEMPLO 4 - Funções de descontinuidades

$$M(x) + 7200 \cdot \langle x-2 \rangle - 4800 \cdot \langle x \rangle = 0$$

$$M(x) = 4800 \cdot \langle x \rangle - 7200 \cdot \langle x-2 \rangle$$

$$v''(x) = \frac{-M(x)}{E.I}$$

$$\int v''(x) \cdot EI = \int \left(-4800 \cdot \langle x \rangle + 7200 \cdot \langle x-2 \rangle\right)$$

$$\int v'(x) \cdot EI = -\frac{4800}{2} \cdot \langle x \rangle^2 + \frac{7200}{2} \cdot \langle x-2 \rangle^2 + C_1$$

$$\boxed{v(x) \cdot EI = 1200 \langle x-2 \rangle^3 - 800 \langle x \rangle^3 + C_1 x + C_2}$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

I) $v(x=0) = 0$:

$$-800 \cdot (0)^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \; : \; \boxed{C_2 = 0}$$

II) $v(x=6) = 0$:

$$1200 \cdot (6-2)^3 - 800 \cdot (6)^3 + C_1 \cdot 6 = 0 \; :$$

$$\boxed{C_1 = 16.000}$$

EXEMPLO 4 - Funções de descontinuidades

ENTÃO:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{E.I}\left[1200.\langle x-2\rangle^3 - 800.\langle x\rangle^3 + 16000x\right]$$

$$\vartheta'(x) = \frac{1}{E.I}\left[3600.\langle x-2\rangle^2 - 2400.\langle x\rangle^2 + 16000\right]$$

CALCULANDO O DESLOCAMENTO EM $X = 2$:

$$\vartheta(x=2) = \frac{1}{10^6}\left[-800.(2)^3 + 16000.2\right] = 2{,}56 \text{ cm}$$

$$\vartheta'(x=2) = \frac{1}{10^6}\left[-2400.(2)^2 + 16000\right] = 6{,}4\times10^{-3} = 0{,}4^\circ$$

EXEMPLO 4 - Funções de descontinuidades

PERGUNTA: QUANDO TEREMOS UM $\theta = 0$?

$\vartheta'(x) = 0$:

$$3600 . \langle x-2 \rangle^2 - 2400 . \langle x \rangle^2 + 16000 = 0$$

i) SE $x > 2m$:

$$36\cancel{00} . (x-2)^2 - 24\cancel{00} . x^2 + 160\cancel{00} = 0$$

$$36 . (x^2 - 4x + 4) - 24x^2 + 160 = 0$$

$$12x^2 - 144x + 144 + 160 = 0$$

$$12x^2 - 144x + 304 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 2{,}7m \\ x_2 = 9{,}6m \end{cases}$$

INTERVALO DO MEU PROBLEMA: $2m < x < 6m$:

$x_1 = 2{,}7m$

$$\theta(x = 2{,}7m) = \frac{1}{10^6}\left[3600.(2{,}7-2)^2 - 2400.(2{,}7) + 16000\right]$$

ii) SE $x < 2m$:

$$-2400.x^2 + 16000 = 0 \begin{cases} x_1 = +2{,}6m \\ x_2 = -2{,}6m \end{cases}$$

PERGUNTA: $v_{máx}(x) = ?$

Como $\theta = 0°$ em $x = 2{,}7m$:

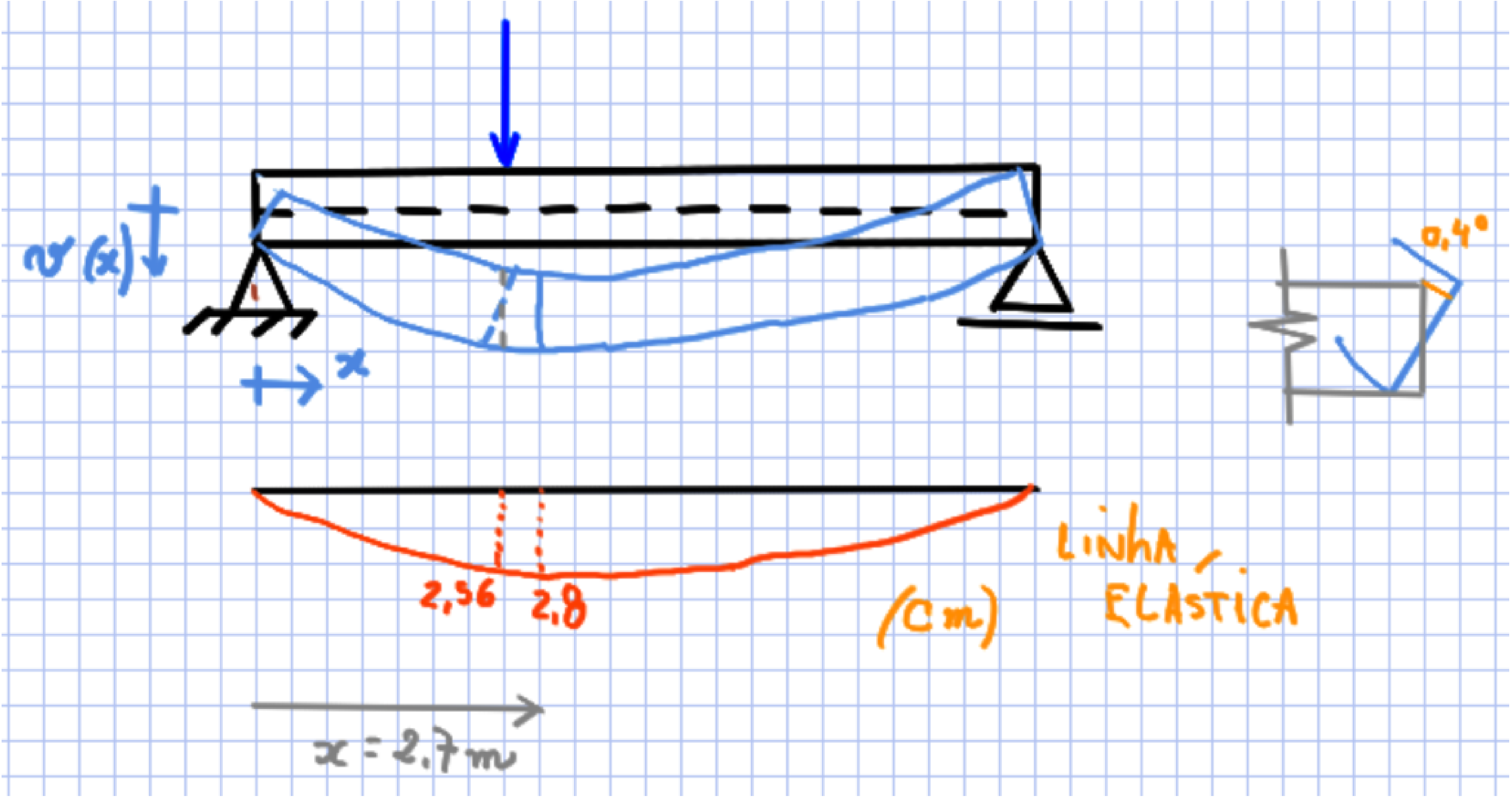
$$v_{máx}(x = 2{,}7m) = \frac{1}{10^6}\left[1200.(2{,}7-2)^3 - 800.2{,}7 + 16000.2{,}7\right]$$

$v_{máx}(x = 2{,}7m) = 0{,}0279\ m$

$\boxed{v_{máx}(x = 2{,}7m) = 2{,}8\ cm}$

EXEMPLO 4 - Funções de descontinuidades

EXEMPLO 4 - Funções de descontinuidades



EXEMPLO 5 - Funções de descontinuidades

3.6.29) Para a viga hiperestática da figura 3.49, obter:

a) As reações verticais A, B e C;

b) Sabendo-se que o máximo valor admissível para o deslocamento do ponto D seja de 1 cm em módulo, e que a seção transversal da viga é quadrada de lado "*h*", obter o menor valor de "*h*". Dados: q = 12 kN/m; L = 4 m; E = 200 GPa.

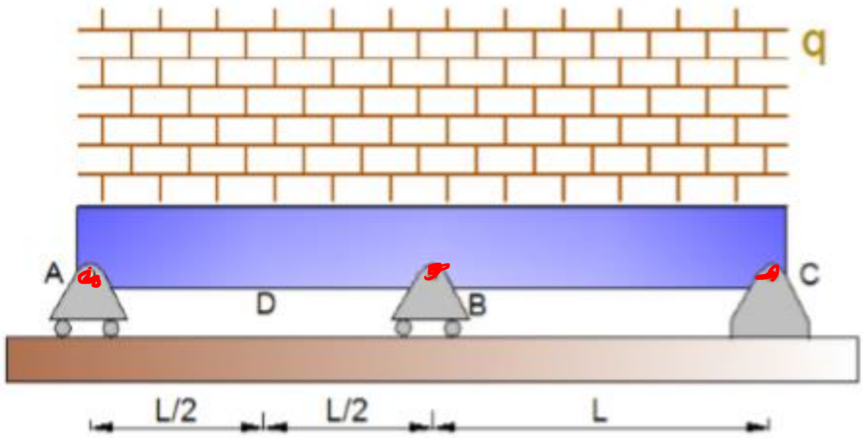
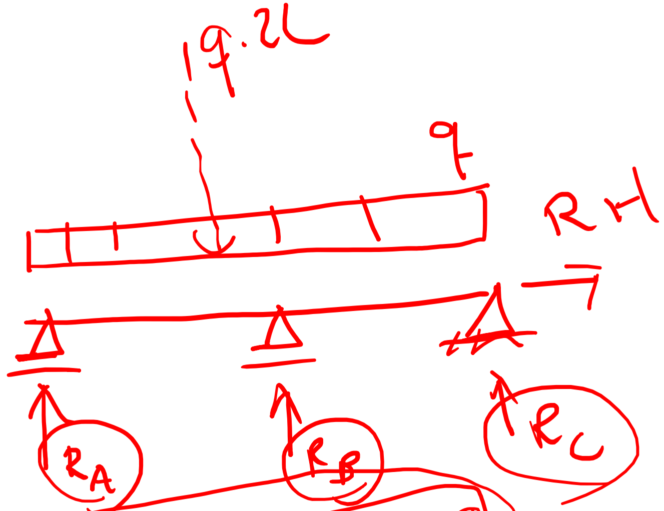


Figura 3.49 - Viga hiperestática com dois tramos sujeita a carga distribuída.



$\Sigma F_x = 0 : \boxed{RH = 0}$

$\Sigma F_y = 0 : R_A + R_B + R_C = R$

$\Sigma M_C = 0 :$

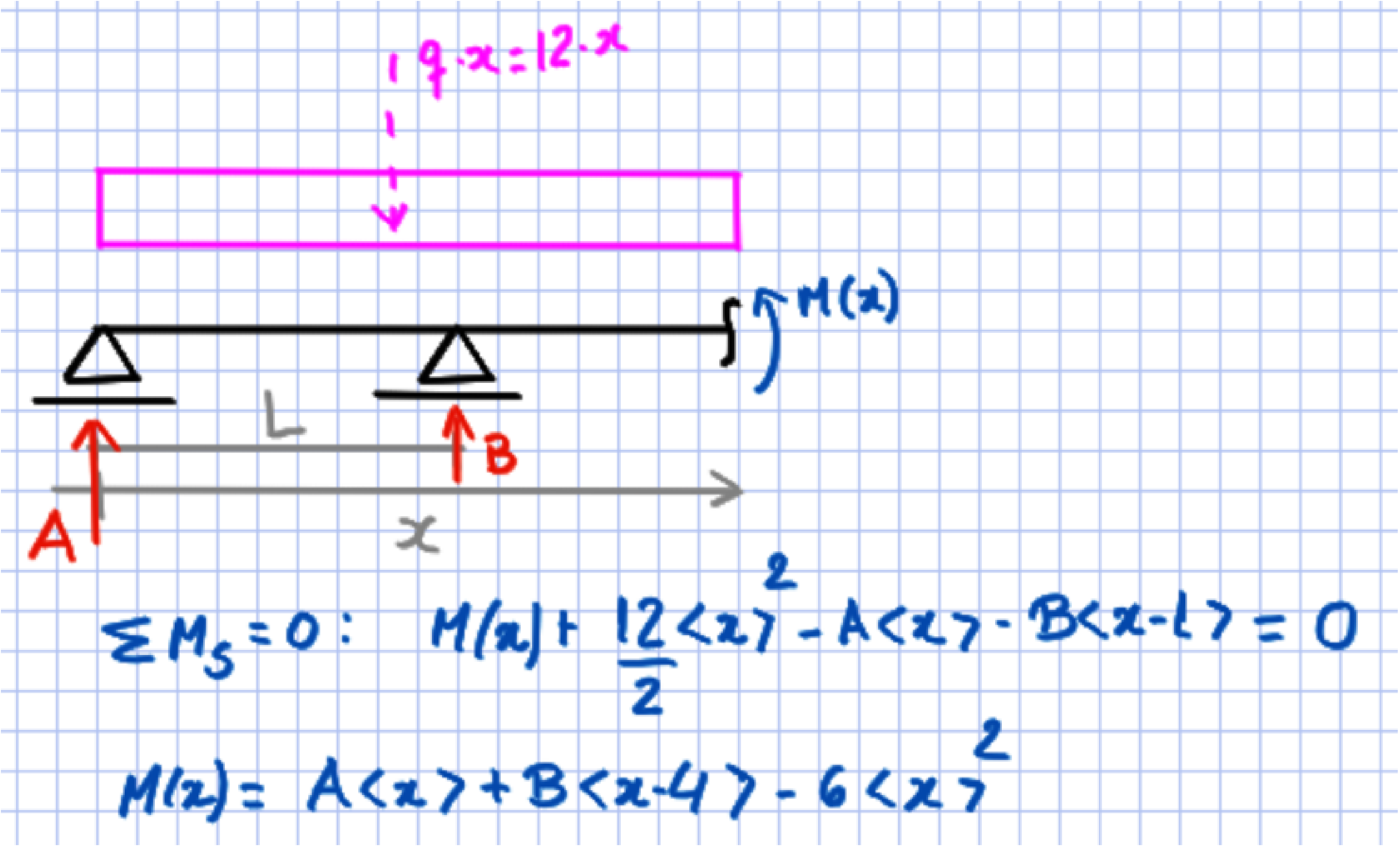
$R_A \cdot 2L + R_B \cdot L - (2Lq)L = 0$

$2L R_A + R_B \cdot L = 2qL^2$

Resolução:

a) Com o apoio da figura 3.49b, a equação do momento fletor em termos das reações A e B fica:

EXEMPLO 5 - Funções de descontinuidades



$$v''(x) = -\frac{M_z(x)}{E.I_z}$$

$M(x) = A.x \quad + B.\langle x-4\rangle - 6x^2$ e $v''(x).EI = -A.x \quad - B.\langle x-4\rangle + 6.x^2$

E integrando uma e duas vezes:

$v'(x).EI = 2.x^3 - 0{,}5.A.x^2 - 0{,}5.B\langle x-4\rangle^2 + C_1$

$v(x).EI = 0{,}5x^4 - {}^1/_6.A.x^3 - {}^1/_6.B\langle x-4\rangle^3 + C_1x + C_2$

EXEMPLO 5 - Funções de descontinuidades

$$v'(x).EI = 2.x^3 - 0{,}5.A.x^2 - 0{,}5.B\langle x-4\rangle^2 + C_1$$

$$v(x).EI = 0{,}5x^4 - {}^{1}/_{6}.A.x^3 - {}^{1}/_{6}.B\langle x-4\rangle^3 + C_1x + C_2$$

Condições de contorno: $v(0) = 0 = C_2$; $v(4) = 0 \rightarrow$

$$C_1 = {}^{16}/_{6}A - 32 \quad (Eq. \quad a)$$

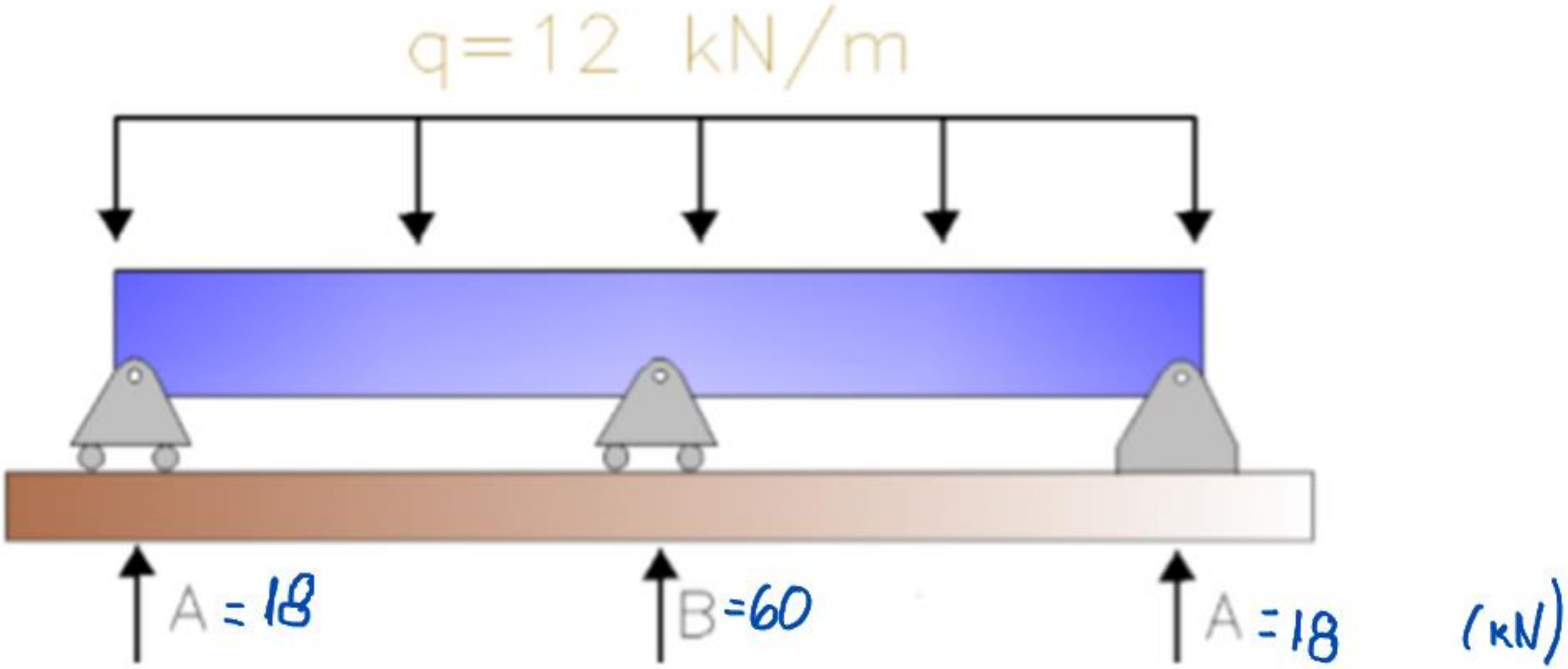
$$v(8) = 0 \rightarrow C_1 = {}^{64}/_{6}A + {}^{8}/_{6}B - 256 \quad (Eq. \quad b)$$

Com a equação de equilíbrio de momento em C: $2.A + B = 96 \quad (Eq. \quad c)$

Confrontando as eqs. (a), (b) e (c): $A = 18 \quad kN$ $\qquad B = 60 \quad kN$

E por equilíbrio das forças na vertical: $C = 18 \quad kN$

EXEMPLO 5 - Funções de descontinuidades



EXEMPLO 5 - Funções de descontinuidades

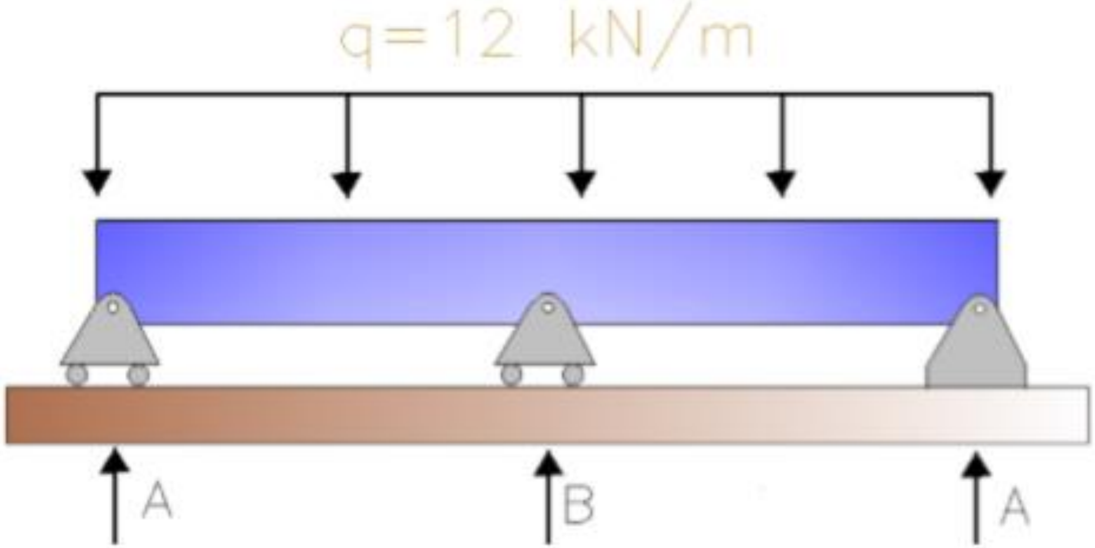
b) A equação da linha elástica fica:

$v(x).EI = 0{,}5.x^4 - 3.x^3 - 10\langle x-4\rangle^3 + 16.x$

Assim: $v(x=2).EI = 0{,}5x^4 - 3.x^3 - 10.\langle x-4\rangle^3 + 16.x \leq 1.10^{-2}\ \ m$

Com $I = \frac{h^4}{12}$, então:$h^4 \geq \frac{16.12}{200.10^6.1.10^{-2}} \rightarrow h^4 \geq 9{,}6.10^{-5} \rightarrow h \geq 9{,}9.10^{-2}\ \ m$

Portanto: $h = 9,9\ \ cm$



EXEMPLO 6 - Funções de descontinuidades

3.6.27) Sabe-se que a viga da figura 3.47 está engastada a esquerda e a direita existe um apoio infinitamente rígido que está a uma distância na vertical de "f" da viga. Atua-se um carregamento distribuído. Obtenha:

1) A reação do apoio a direita e o diagrama de momento fletor da viga, indicando pontos máximos e seus valores;
2) Deslocamento vertical máximo e sua posição bem como o diagrama da linha elástica do deslocamento vertical, indicando pontos relevantes.

Adote: EI = cte = 10^5 kN.m^2; q = 24 kN/m; L = 10 m, f = 10 cm.

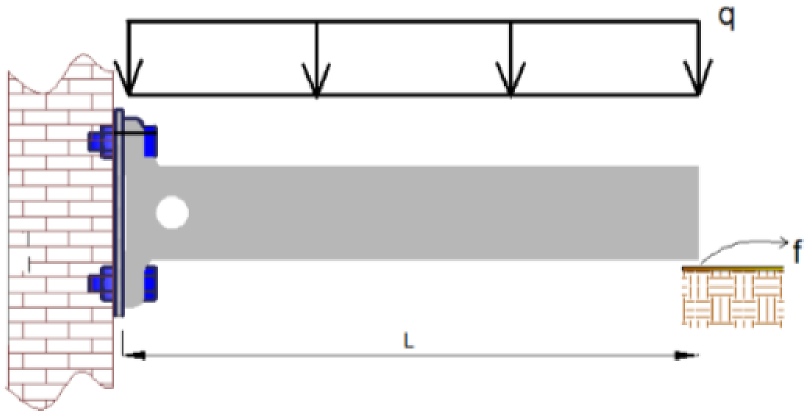


Figura 3.47 - Viga em balanço com carga distribuída com restrição de flecha.

Resolução:

Pode-se escrever a equação de momento em termos da reação R, figura 3.47b, como:

$$M(x) = A.x \quad - (1200 - 10.R) - 12.x^2$$

EXEMPLO 6 - Funções de descontinuidades

Pode-se escrever a equação de momento em termos da reação R, figura 3.47b, como:

$$M(x) = A.x \quad - (1200 - 10.R) - 12.x^2$$

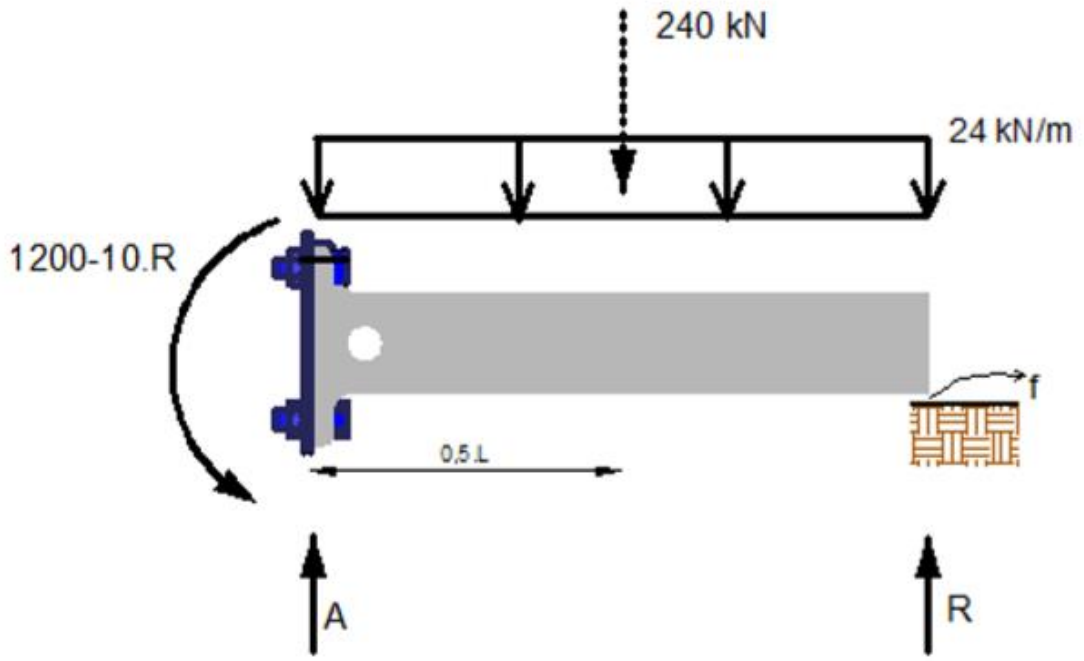


Figura 3.47b – Reações da viga em balanço.

EXEMPLO 6 - Funções de descontinuidades

Assim: $v''(x).EI = -M(x) = -A.x \quad + (1200 - 10.R) + 12.x^2$ e integrando uma e duas vezes: $v'(x).EI = 4.x^3 + (1200 - 10.R).x \quad - 0{,}5A.x^2 + C_1$ e $v(x).EI = x^4 + (600 - 5R).x^2 - A\frac{x^3}{6} + C_1.x + C_2$

Condições de contorno: $v'(0) = 0 = C_1$; $v(0) = 0 = C_2$.

Se f = 0,1 m e sabendo que $A = 240 - R$:

a) Reação de apoio à direita é: $R = 60 \quad kN$. Assim: $M(x) = 180.x - 12.x^2 - 600$ e $M(0) = -600 \quad kNm$, e $M'(x) = 180 - 24.x \quad = 0 \longrightarrow x = 7{,}5m$, e momento máximo fica: $M(x = 7{,}5) = 75 \quad kN.m$

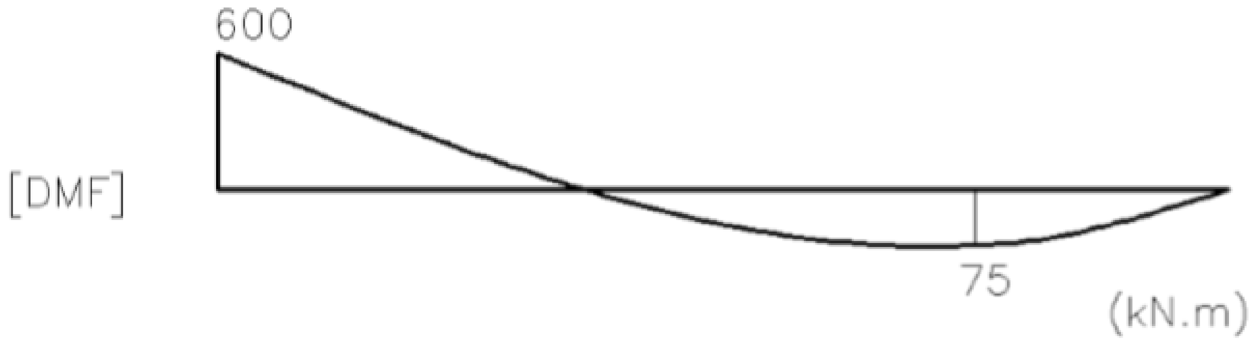


Figura 3.47c – Diagrama de momento fletor.

EXEMPLO 6 - Funções de descontinuidades

b) A equação da linha elástica fica indicada por: $v(x) = \frac{1}{EI}[300.x^2 + x^4 - 30.x^3]$

Não existe extremo dentro do intervalo, assim, o máximo valor é para x = 10 m, com v(x = 10) = 0,1 m.

Figura 3.47d – Diagrama da linha elástica