B-P2, 20/11/2019, Cálculo II, Prof. Juan López Linares

Nome Completo: ____ Número USP: ____________

1) Determine a derivada da função vetorial

$$\overrightarrow{r\,(t)} = ln(4-t^2)\,\vec{i} + \sqrt{1-t}\,\vec{j} - 4e^{3t}\,\vec{k}.$$

Solução:

Seja $\overrightarrow{r\,(t)} =< x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t) >$. Primeiro devemos determinar a derivada em cada uma das funções escalares componentes do vetor.

Para $x\,(t) = ln(4-t^2)$ usando a regra da cadeia encontramos

$$x\,'\,(t) = \frac{1}{4-t^2} \cdot (-2t) = \frac{-2t}{4-t^2}.$$

Para $y\,(t) = \sqrt{1-t} = (1-t)^{\frac{1}{2}}$ usando a regra da cadeia encontramos

$$y\,'\,(t) = \frac{1}{2}\,(1-t)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}.$$

Para $z\,(t) = -4e^{3t}$ usando a regra da cadeia encontramos

$$z\,'\,(t) = -4e^{3t} \cdot (3) = -12e^{3t}.$$

Segue que

$$\overrightarrow{r\,'\,(t)} =< \frac{-2t}{4-t^2}, \frac{-1}{2\sqrt{1-t}}, -12e^{3t} > .$$

2) Siga os passos para demonstrar que, dada uma curva plana descrita pela equação $y = f\,(x)$, sua curvatura pode ser calculada como

$$k\,(x) = \frac{|f\,''\,(x)\,|}{\left(1+[f\,'\,(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1}$$

a) Escreva uma parametrização da curva plana $y = f\,(x)$ da forma $\overrightarrow{r\,(t)} =< x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t) >$.

b) Use a fórmula a seguir para calcular a curvatura

$$k\,(t) = \frac{||\overrightarrow{r\,'\,(t)} \times \overrightarrow{r\,''\,(t)}||}{||\overrightarrow{r\,'\,(t)}||^3}. \tag{2}$$

c) Retorne a variável x.

Solução:

Este exercício está resolvido na vídeo-aula Outras Fórmulas para Curvatura-II -V156.

a) Seja $x = t$, segue que $\overrightarrow{r\,(t)} =< t, f\,(t)\,, 0 >$.

b) Temos que $\overrightarrow{r\,'\,(t)} =< 1, f\,'\,(t)\,, 0 >$ e $\overrightarrow{r\,''\,(t)} =< 0, f\,''\,(t)\,, 0 >$.

Adicionalmente calculamos

$$||\overrightarrow{r\,'\,(t)}|| = \sqrt{1+[f\,'\,(t)]^2}.$$

A seguir encontramos o produto vetorial

$$\overrightarrow{r\,'\,(t)} \times \overrightarrow{r\,''\,(t)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f\,'\,(t) & 0 \\ 0 & f\,''\,(t) & 0 \end{vmatrix} =< 0, 0, f\,''\,(t) >,$$

e $||\overrightarrow{r\,'\,(t)} \times \overrightarrow{r\,''\,(t)}|| = |f\,''\,(t)\,|$. Logo, usando a fórmula (2) encontramos

$$k(t) = \frac{|f^{\prime\prime}(t)|}{\left(1+[f^{\prime}(t)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

c) Agora usamos que $t = x$ na equação anterior para encontrar o que queríamos demonstrar (1).

3) Calcule a curvatura, $k(x)$, da parábola cúbica

$$y = x^3.$$

Solução-1:
Este exercício está resolvido na vídeo-aula Outras Fórmulas para Curvatura-II -V156.
Temos $f(x) = x^3$, $f^{\prime}(x) = 3x^2$ e $f^{\prime\prime}(x) = 6x$. Usando que

$$k(x) = \frac{|f^{\prime\prime}(x)|}{\left(1+[f^{\prime}(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

encontramos

$$k(x) = \frac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Os gráficos correspondentes a este exercício podem ser vistos em C2-Curvatura da Parábola Cúbica.
Solução-2:
Sejam $f(x) = x^3$ e $\overrightarrow{r(t)} =< t, t^3, 0 >$. Temos que $\overrightarrow{r^{\prime}(t)} =< 1, 3t^2, 0 >$ e $\overrightarrow{r^{\prime\prime}(t)} =< 0, 6t, 0 >$.
Adicionalmente calculamos

$$||\overrightarrow{r^{\prime}(t)}|| = \sqrt{1+9t^4}.$$

A seguir encontramos o produto vetorial

$$\overrightarrow{r^{\prime}(t)} \times \overrightarrow{r^{\prime\prime}(t)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3t^2 & 0 \\ 0 & 6t & 0 \end{vmatrix} =< 0, 0, 6t >,$$

e $||\overrightarrow{r^{\prime}(t)} \times \overrightarrow{r^{\prime\prime}(t)}|| = |6t| = 6|t|$. Logo, usando a fórmula (2) encontramos

$$k(t) = \frac{|6t|}{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Agora usamos que $t = x$ na equação anterior para encontrar:

$$k(x) = \frac{6|x|}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Os gráficos correspondentes a este exercício podem ser v.istos em C2-Curvatura da Parábola Cúbica.

4) Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula quando

$$\overrightarrow{r(t)} =< \frac{1}{t}, 1, t^2 > .$$

Solução:
O vetor velocidade é a derivada do vetor posição:

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{r^{\prime}(t)} =< -\frac{1}{t^2}, 0, 2t > .$$

O vetor aceleração é a derivada do vetor velocidade:

$$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{v^{\prime}(t)} = \overrightarrow{r^{\prime\prime}(t)} =< \frac{2}{t^3}, 0, 2 > .$$

A velocidade escalar é a norma do vetor velocidade:

$$v(t) = ||\overrightarrow{v(t)}|| = ||\overrightarrow{r'(t)}|| = \sqrt{\frac{1}{t^4} + 4t^2}.$$

$$v(t) = \sqrt{\frac{4t^6+1}{t^4}} = \frac{1}{t^2}\sqrt{4t^6+1}.$$

5) Seja

$$f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y.$$

a) Calcule f_{yxz} e f_{yzx}.
b) Calcule f_{zyx}.
Solução:
Este problema está resolvido na vídeo-aula Exercícios de Derivadas Parciais de Ordem Superior-V187.
a) i) f_{yxz}. Devemos calcular em sequência f_y, f_{yx} e f_{yxz}:

$$f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y.$$

$$f_y(x,y,z) = -4xyz + x^2,$$

$$f_{yx}(x,y,z) = -4yz + 2x,$$

$$f_{yxz}(x,y,z) = -4y.$$

ii) f_{yzx}. Devemos calcular em sequência f_y, f_{yz} e f_{yzx}:

$$f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y.$$

$$f_y(x,y,z) = -4xyz + x^2,$$

$$f_{yz}(x,y,z) = -4xy,$$

$$f_{yzx}(x,y,z) = -4y.$$

Notamos que $f_{yxz} = f_{yzx}$. Isto podia ser previsto pelo Teorema de Clairaut (Demonstração do Teorema de Clairaut -V186).
b) f_{zyx}. Devemos calcular em sequência f_z, f_{zy} e f_{zyx}:

$$f(x,y,z) = 1 - 2xy^2z + x^2y.$$

$$f_z(x,y,z) = -2xy^2,$$

$$f_{zy}(x,y,z) = -4xy,$$

$$f_{zyx}(x,y,z) = -4y.$$

Notamos que $f_{zyx} = f_{yzx}$. Isto também podia ser previsto pelo Teorema de Clairaut.