14.4 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $z = f(x, y) = x^2 + 4y^2 \Rightarrow f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 8y, f_x(2, 1) = 4, f_y(2, 1) = 8$. Assim, a equação do plano tangente é $z - 8 = 4(x - 2) + 8(y - 1)$ ou $4x + 8y - z = 8$.

2. $z = f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = -2y, f_x(3, -2) = 6, f_y(3, -2) = 4$. Logo a equação é $z - 5 = 6(x - 3) + 4(y + 2)$ ou $6x + 4y - z = 5$.

3. $z = f(x, y) = 5 + (x - 1)^2 + (y + 2)^2 \Rightarrow$ $f_x(x, y) = 2(x - 1), f_y(x, y) = 2(y + 2), f_x(2, 0) = 2$, $f_y(2, 0) = 4$ e a equação é $z - 10 = 2(x - 2) + 4y$ ou $2x + 4y - z = -6$.

4. $f_x(-1, 2) = 2$ e $f_y(-1, 2) = -1$, então uma equação do plano tangente é $z + 2 = 2(x + 1) + (-1)(y - 2)$ ou $2x - y - z = -2$.

5. $f_x(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^{-1/2}, f_x(5, 1) = \frac{1}{4}$, $f_y(x, y) = -\frac{1}{2}(x - y)^{-1/2}$, e $f_y(5, 1) = -\frac{1}{4}$, então uma equação do plano tangente é $z - 2 = \frac{1}{4}(x - 5) - \frac{1}{4}(y - 1)$ ou $x - y - 4z = -4$.

6. $z = f(x, y) = y^2 - x^2 \Rightarrow f_x(x, y) = -2x$, $f_y(x, y) = 2y$, então $f_x(-4, 5) = 8, f_y(-4, 5) = 10$. Pela Equação 2, uma equação do plano tangente é $z - 9 = f_x(-4, 5)[x - (-4)] + f_y(-4, 5)(y - 5) \Rightarrow$ $z - 9 = 8(x + 4) + 10(y - 5)$ ou $z = 8x + 10y - 9$.

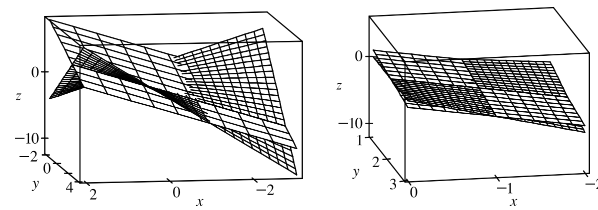
7. $z = f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) \Rightarrow f_x(x, y) = \cos(x + y)$, $f_y(x, y) = \cos(x + y), f_x(1, -1) = 1 = f_y(1, -1)$ e uma equação do plano tangente é $z = (x - 1) + (y + 1)$ ou $z = x + y$.

8. $z = f(x, y) = \ln(2x + y) \Rightarrow f_x(x, y) = \dfrac{2}{2x + y}$, $f_y(x, y) = \dfrac{1}{2x + y}, f_x(-1, 3) = 2, f_y(-1, 3) = 1$. Assim, uma equação do plano tangente é $z = 2(x + 1) + (y - 3)$ ou $z = 2x + y - 1$.

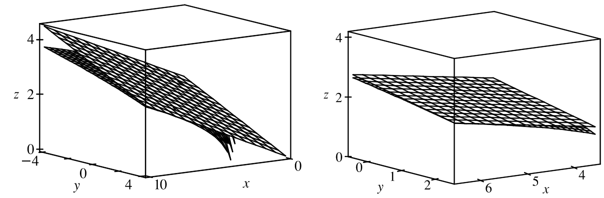
9. $z = f(x, y) = e^x \ln y \Rightarrow f_x(x, y) = e^x \ln y$, $f_y(x, y) = e^x/y, f_x(3, 1) = 0, f_y(3, 1) = e^3$, e uma equação do plano tangente é $z = e^3(y - 1)$ ou $z = e^3 y - e^3$.

10. $z = f(x, y) = xy$, logo $f_x(x, y) = y \Rightarrow f_x(-1, 2) = 2$, $f_y(x, y) = x \Rightarrow f_y(-1, 2) = -1$ e uma equação do plano tangente é $z + 2 = 2(x + 1) + (-1)(y - 2)$. Após dar *zoom*, a superfície e o plano tangente tornam-se indistinguíveis. (Aqui, o plano tangente é mostrado com menos traços que a superfície.)

Se aumentarmos o *zoom*, a superfície e o plano tangente parecem coincidir.



11. $z = f(x, y) = \sqrt{x - y}$, então $f_x(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^{-1/2}$, $f_x(5, 1) = \frac{1}{4}$, $f_y(x, y) = -\frac{1}{2}(x - y)^{-1/2}$, $f_y(5, 1) = -\frac{1}{4}$, e uma equação do plano tangente é $z - 2 = \frac{1}{4}(x - 5) - \frac{1}{4}(y - 1)$, ou $z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1$. Após dar *zoom*, a superfície e o plano tangente tornam-se quase indistinguíveis. (Aqui, o plano tangente é mostrado com menos traços que a superfície.) Se aumentarmos o *zoom*, a superfície e o plano tangente parecem coincidir.



12. $f(x, y) = y \ln x$. As derivadas parciais são $f_x(x, y) = y/x$ e $f_y(x, y) = \ln x$, então $f_x(2, 1) = 1/2$ e $f_y(2, 1) = \ln 2$. Tanto f_x como f_y são funções contínuas para $x > 0$, então f é diferenciável em $(2, 1)$ pelo Teorema 8. A linearização de f em $(2, 1)$ é dada por

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) \\ &= \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x - 2) + \ln 2\,(y - 1) \\ &= \tfrac{1}{2}x + (\ln 2)\,y - 1 \end{aligned}$$

13. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$. As derivadas parciais são

$$f_x(x, y) = \tfrac{1}{2}\left(1 + x^2y^2\right)^{-1/2}\left(2xy^2\right) = \frac{xy^2}{\sqrt{1 + x^2y^2}} \text{ e}$$

$$f_y(x, y) = \tfrac{1}{2}\left(1 + x^2y^2\right)^{-1/2}\left(2x^2y\right) = \frac{x^2y}{\sqrt{1 + x^2y^2}}, \text{ então}$$

$f_x(0, 2) = 0$ e $f_y(0, 2) = 0$. Tanto f_x como f_y são funções contínuas, então f é diferenciável em $(0, 2)$, e a linearização de f em $(0, 2)$ é

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(0, 2) + f_x(0, 2)(x - 0) + f_y(0, 2)(y - 2) \\ &= 1 + 0(x) + 0(y - 2) = 1 \end{aligned}$$

14. $z = x^2y^3 \Rightarrow$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$$

15. $v = \ln(2x - 3y) \quad \Rightarrow$

$$dv = \left(\frac{2}{2x - 3y}\right) dx + \left(\frac{-3}{2x - 3y}\right) dy = \frac{1}{2x - 3y}(2\,dx - 3\,dy)$$

16. $w = x \operatorname{sen} yz \quad \Rightarrow$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = (\operatorname{sen} yz)\,dx + (xz \cos yz)\,dy + (xy \cos yz)\,dz$$

17. $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(4x^3 - 10xy + 6y^3\right) dx + \left(-5x^2 + 18xy^2\right) dy$$

18. $$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{2}{(x^2 + y^2)^2}(x\,dx + y\,dy)$$

19. $z = ye^{xy} \quad \Rightarrow$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y^2 e^{xy}\, dx + e^{xy}\,(1 + xy)\,dy$$

20. $u = e^x \cos xy \quad \Rightarrow$

$$du = e^x (\cos xy - y \operatorname{sen} xy)\,dx - (xe^x \operatorname{sen} xy)\,dy$$

21. $w = x^2 y + y^2 z \quad \Rightarrow$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = 2xy\, dx + \left(x^2 + 2yz\right) dy + y^2\, dz$$

22. $w = \dfrac{x + y}{y + z} \quad \Rightarrow$

$$dw = \frac{dx}{y + z} + \frac{[(y + z) - (x + y)]\,dy}{(y + z)^2} - \frac{(x + y)\,dz}{(y + z)^2} = \frac{(y + z)\,dx + (z - x)\,dy - (x + y)\,dz}{(y + z)^2}$$

23. $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2} \quad \Rightarrow$

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{20 - x^2 - 7y^2}} \text{ e } f_y = -\frac{7y}{\sqrt{20 - x^2 - 7y^2}}.$$

Uma vez que $f(2, 1) = \sqrt{20 - 4 - 7} = 3$, consideramos $(a, b) = (2, 1)$. Então, $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}08$. Logo,

$$f(1{,}95,\ 1{,}08) \approx f(2, 1) + dz = 3 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)(-0{,}05) + \left(-\tfrac{7}{3}\right)(0{,}08) = 2{,}84\overline{6}$$

24. $f(x, y) = \ln(x - 3y) \quad \Rightarrow \quad f_x = \dfrac{1}{x - 3y}$ e

$f_y = -\dfrac{3}{x - 3y}$. Uma vez que $f(7, 2) = \ln(7 - 6) = 0$, consideramos $(a, b) = (7, 2)$. Então $\Delta x = -0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}06$ e, assim

$$f(6{,}9,\ 2{,}06) \approx f(7, 2) + dz = 0 + (1)(-0{,}1) + (-3)(0{,}06) = -0{,}28$$

25. $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4 \quad \Rightarrow \quad f_x = 2xy^3 z^4, f_y = 3x^2 y^2 z^4$ e $f_z = 4x^2 y^3 z^3$. Uma vez que $f(1, 1, 3) = 81$, consideramos $(a, b, c) = (1, 1, 3)$. Logo, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}1$, $\Delta z = 0{,}01$, e então

$$f(1{,}05,\ 0{,}9,\ 3{,}01) \approx f(1, 1, 3) + dw = 81 + (162)(0{,}05) + (243)(-0{,}1) + (108)(0{,}01) = 65{,}88$$

26. $f(x, y, z) = xy^2 \operatorname{sen} \pi z \quad \Rightarrow \quad f_x = y^2 \operatorname{sen} \pi z$, $f_y = 2xy \operatorname{sen} \pi z, f_z = \pi x y^2 \cos \pi z$, Uma vez que $f(4, 5, 4) = 0$, consideramos $(a, b, c) = (4, 5, 4)$.

Logo $\Delta x = -0{,}01$, $\Delta y = -0{,}02$ e $\Delta z = 0{,}03$, então

$$f(3{,}99,\ 4{,}98,\ 4{,}03) \approx f(4, 5, 4) + dw = 0 + (0)(-0{,}01) + (0)(-0{,}02) + (100\pi)(0{,}03) = 3\pi \approx 9{,}4248$$

27. Seja $w = f(x, y, z) = x\sqrt{y - z^3} \quad \Rightarrow \quad f_x = \sqrt{y - z^3}$,

$f_y = \dfrac{x}{2\sqrt{y - z^3}}$, e $f_z = -\dfrac{3xz^2}{2\sqrt{y - z^3}}$, Logo $f(9, 10, 1) = 27$, então consideramos $(a, b, c) = (9, 10, 1)$. Então $x = -0{,}06$, $\Delta y = -0{,}01$ e $\Delta z = 0{,}01$. Logo

$$8{,}94\sqrt{9{,}99 - (1{,}01)^3} \approx 27 + (3)(-0{,}06) + \tfrac{9}{6}(-0{,}01) + \left(-\tfrac{27}{6}\right)(0{,}01) = 26{,}76$$

28. Seja $z = f(x, y) = \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad f_x = 2\dfrac{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}\right)^3}{\sqrt{x}}$,

$f_y = 4\dfrac{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}\right)^3}{3y^{2/3}}$. Logo $f(100, 125) = (10 + 5)^4 = 50, 625$. Considere $(a, b) = (100, 125)$, então $\Delta x = -1$, $\Delta y = -1$. Logo

$$\left(\sqrt{99} + \sqrt[3]{124}\right)^4 \approx 50\,625 + \frac{2 \cdot 3375}{10}(-1) + \frac{4 \cdot 3375}{75}(-1) = 49\,770$$

29. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{x}\, e^y \quad \Rightarrow \quad f_x = \dfrac{e^y}{2\sqrt{x}}$,

$f_y = \sqrt{x} e^y$. Agora $f(1, 0) = 1$, então consideramos $(a, b) = (1, 0)$, $\Delta x = -0{,}01$, $\Delta y = 0{,}02$, Logo

$$\sqrt{0{,}99}\, e^{0{,}02} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(-0{,}01) + 1(0{,}02) = 1{,}015.$$

30. Seja $w = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow$

$f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$f_z = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,Agora, $f(3, 2, 6) = \sqrt{49} = 7$, então consideramos $(a, b, c) = (3, 2, 6)$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}03$, e $\Delta z = -0{,}01$, Logo

$$\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2} \approx f(3, 2, 6) + dw = 7 + \tfrac{3}{7}(0{,}02) + \tfrac{2}{7}(-0{,}03) + \tfrac{6}{7}(-0{,}01) \approx 6{,}9914$$