14 Derivadas Parciais

14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares

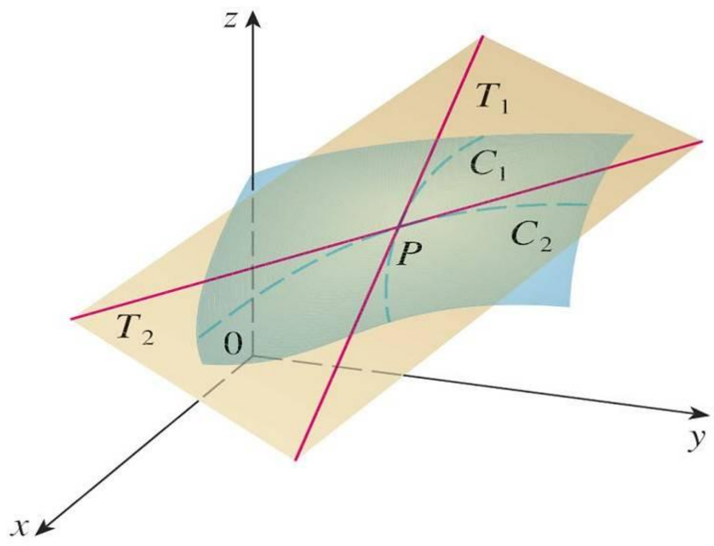
Planos Tangentes

Planos Tangentes

Suponha que uma superfície S tenha a equação $z = f(x, y)$, onde f tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ ser um ponto em S. Sejam C_1 e C_2 as curvas obtidas pela intersecção dos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$ com a superfície S. Então o ponto P fica em C_1 em C_2. Encontre as equações das tangentes T_1 e T_2 à curva C_1 e C_2 no ponto P.

Planos Tangentes

Então o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as retas tangentes T_1 e T_2. (Veja a Figura 1.)



O plano tangente contém as retas tangentes T_1 e T_2

Figura 1

Planos Tangentes

Se C for é outra curva qualquer que esteja contida na superfície S e que passa pelo ponto P, então sua reta tangente no ponto P também pertene ao plano tangente.

Portanto, podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes P a curvas contidas em S que passam pelo ponto P. O plano tangente em P é o plano que melhor aproxima a superfície S perto do ponto P.

Sabemos que qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Planos Tangentes

Dividindo essa equação por C e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como

$$\boxed{1} \qquad z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Se a Equação 1 representa o plano tangente em P, sua intersecção com o plano $y = y_0$ precisa ser a reta T_1. Impondo $y = y_0$ na Equação 1, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad \text{onde} \qquad y = y_0$$

e reconhecemos isso como a equação (na forma ponto-inclinação) de uma linha com a inclinação a.

Planos Tangentes

Mas sabemos que a inclinação da tangente T_1 é $f_x(x_0, y_0)$.

Portanto, $a = f_x(x_0, y_0)$.

Da mesma forma, tomando $x = x_0$ na Equação 1, obtemos $z - z_0 = b(y - y_0)$, que precisa representar a reta tangente T_2, e portanto $b = f_y(x_0, y_0)$.

$\boxed{2}$ Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemplo 1

Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto (1, 1, 3).

SOLUÇÃO: Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Portanto, por $\boxed{2}$ temos a equação do plano tangente em (1, 1, 3) como

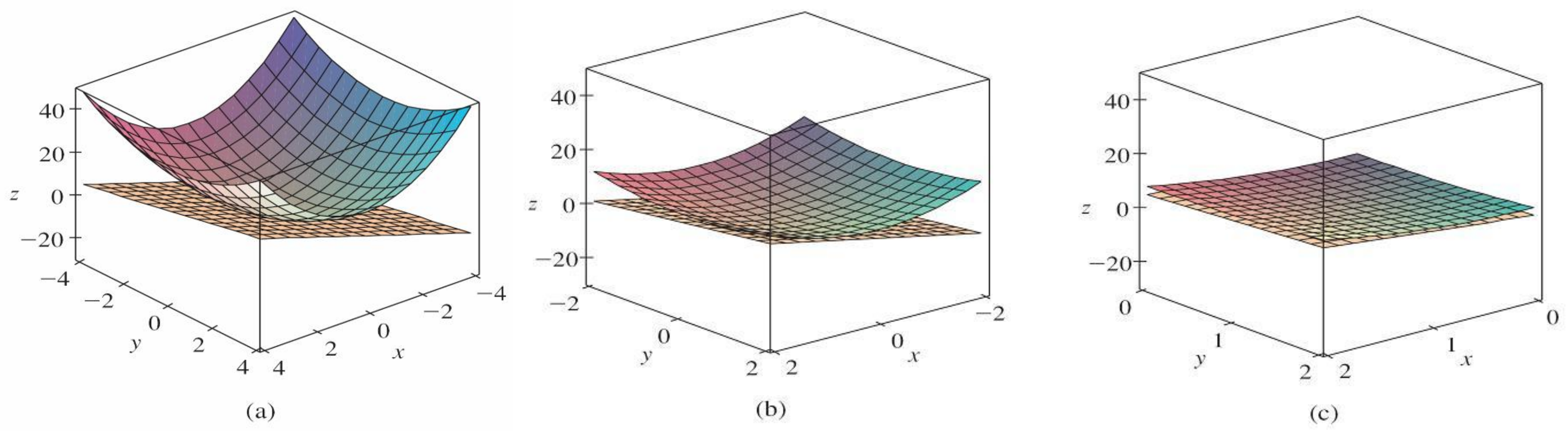
$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

ou

$$z = 4x + 2y - 3$$

Planos Tangentes

Figura 2(a) mostra o paraboloide elíptico e seu plano tangente em (1, 1, 3) que encontramos no Exemplo 1. Nas partes (b) e (c) damos *zoom* em direção ao ponto (1, 1, 3) restringindo o domínio da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.



O paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir com o plano tangente quando damos *zoom* em torno de (1, 1, 3).

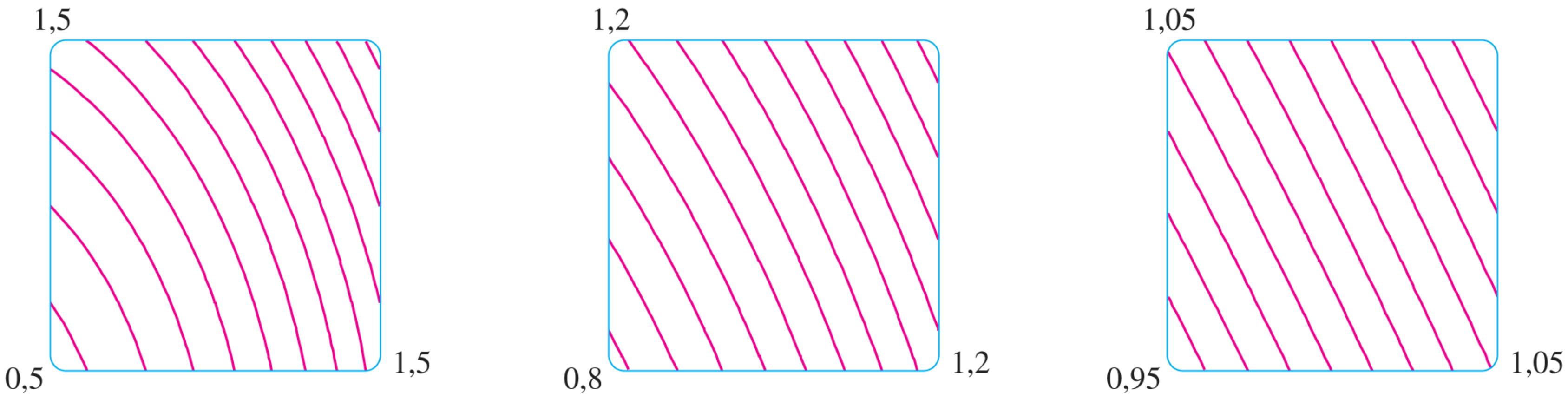
Figura 2

Planos Tangentes

Observe que, quanto mais ampliamos a região próxima ao ponto, mais plano parece o gráfico da superfície e mais se parece com o plano tangente.

Na Figura 3, reforçamos essa impressão dando *zoom* em torno de (1, 1) no mapa de contorno da função

$f(x, y) = 2x^2 + y^2$.



Dando zoom em torno do ponto (1, 1) no mapa de contorno de
$f(x, y) = 2x^2 + y^2$

Figura 3

Planos Tangentes

Observe que, quanto mais ampliamos, mais as curvas de nível parecem retas igualmente espaçadas, o que caracteriza uma região plana.

Aproximações Lineares

Aproximações Lineares

No Exemplo 1 descobrimos que uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ no ponto (1, 1, 3) é $z = 4x + 2y - 3$. Portanto, a função linear de duas variáveis

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

é uma boa aproximação para $f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de (1, 1). A função L é chamada *linearização* de f em (1, 1), e a aproximação

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

é denominada *aproximação linear* ou *aproximação pelo plano tangente* de f em (1, 1).

Aproximações Lineares

Por exemplo, no ponto (1,1, 0,95), a aproximação linear fornece

$$f(1{,}1,\ 0{,}95) \approx 4(1{,}1) + 2(0{,}95) - 3 = 3{,}3$$

que está bastante próximo do valor verdadeiro de $f(1{,}1,\ 0{,}95) = 2(1{,}1)^2 + (0{,}95)^2 = 3{,}3225$. Se, entretanto, tomarmos um ponto longe de (1, 1), como (2, 3), não teremos mais uma boa aproximação. De fato, $L(2, 3) = 11$, ao passo que $f(2, 3) = 17$.

Em geral, sabemos de $\boxed{2}$ que uma equação do plano tangente ao gráfico de uma função *f* de duas variáveis que tem derivadas contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Aproximações Lineares

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente, a saber,

$$\boxed{3} \qquad L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é denominada **linearização** de f em (a, b), e a aproximação

$$\boxed{4} \qquad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

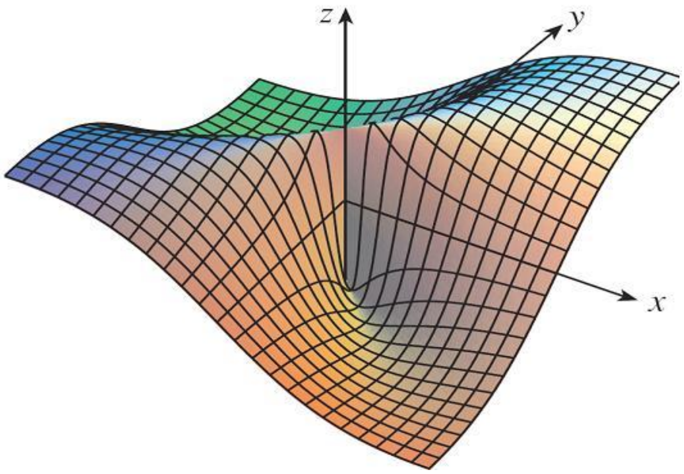
é chamada **aproximação linear** ou **aproximação pleno plano tangente** de f em (a, b).

Aproximações Lineares

Definimos planos tangentes para as superfícies $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. O que acontece se f_x e f_y não são contínuas? A Figura 4 apresenta uma tal função. Sua equação é

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Podemos verificar que suas derivadas parciais existem na origem e são $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 0$, mas f_x e f_y não são contínuas.



$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$,
$f(0, 0) = 0$

Figura 4

Aproximações Lineares

A aproximação linear seria $f(x, y) \approx 0$, mas $f(x, y) = \frac{1}{2}$ em todos os pontos na linha $y = x$. Portanto, uma função de duas variáveis pode comportar-se mal mesmo se ambas as derivadas parciais existirem. Para evitar esse comportamento, introduzimos a ideia de uma função diferenciável de duas variáveis. Lembremo-nos de que para uma função de uma variável, $y = f(x)$, se x varia de a para $a + \Delta x$, definimos o incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Aproximações Lineares

Se f é diferenciável em a, então

$\boxed{5}$ $\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$ onde $\varepsilon \to 0$ como $\Delta x \to 0$

Considere agora uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, e suponha que x varie de a para $a + \Delta x$ e y varie de b para $b + \Delta y$. Então, o **incremento** correspondente de z é

$\boxed{6}$ $$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Portanto, o incremento Δz representa a variação no valor de f quando (x, y) varia de (a, b) para $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

Aproximações Lineares

Por analogia a $\boxed{5}$, definimos a diferenciabilidade de uma função de duas variáveis como segue.

$\boxed{7}$ **Definição** Se $z = f(x, y)$, então f é **diferenciável** em (a, b) se Δz puder ser expresso na forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

onde ε_1 e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

A Definição 7 diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear $\boxed{4}$ é uma boa aproximação quando (x, y) está próximo de (a, b). Em outras palavras, o plano tangente aproxima bem o gráfico de f do ponto de tangência.

Aproximações Lineares

Algumas vezes é difícil usar a Definição 7 diretamente para verificar a diferencibilidade de uma função, mas o próximo teorema nos dá uma condição suficientemente conveniente para a diferenciabilidade.

8 **Teorema** Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem perto do ponto (a, b) e forem contínuas em (a, b), então f é diferenciável em (a, b).

Diferenciais

Diferenciais

Para uma função de uma única variável, $y = f(x)$, definimos a diferencial dx como uma variável independente; ou seja, dx pode valer de qualquer número real. A diferencial de y é definida como

$$\boxed{9} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

Diferenciais

A Figura 6 mostra as relações entre o incremento Δy e a diferencial dy: Δy representa a variação de altura da curva $y = f(x)$ e dy representa a variação na altura da reta tangente quando x varia da quantidade $dx = \Delta x$.

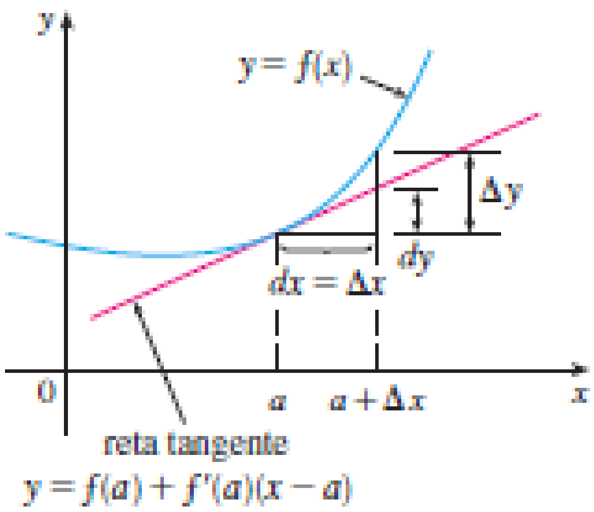


Figura 6

Diferenciais

Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as **diferenciais** dx e dy como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então a **diferencial** dz também chamada de **diferencial total**, é definida por

10

$$\boxed{dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy}$$

Algumas vezes a notação df é usada no lugar de dz.

Diferenciais

Se tomarmos $dx = \Delta x = x - a$ e $dy = \Delta y = y - b$ na Equação 10, então a diferencial de z é

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

E assim, com a notação de diferencial, a aproximação linear $\boxed{4}$ pode ser escrita como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

Diferenciais

A Figura 7 é a correspondente tridimensional da Figura 6 e mostra a interpretação geométrica da diferencial dz e o incremento Δz: dz representa a alteração da altura do plano tangente, ao passo que Δz representa a alteração da altura da superfície $z = f(x, y)$ quando (x, y) varia de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

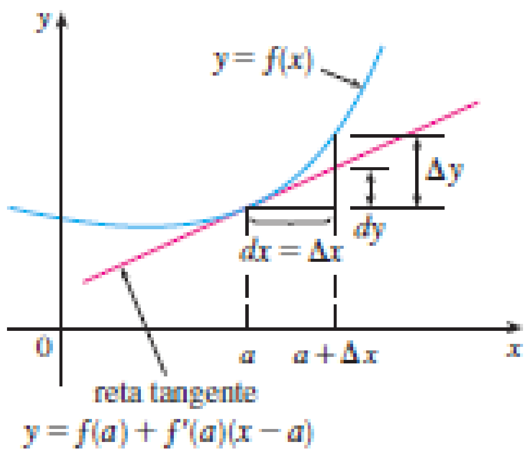


Figura 6

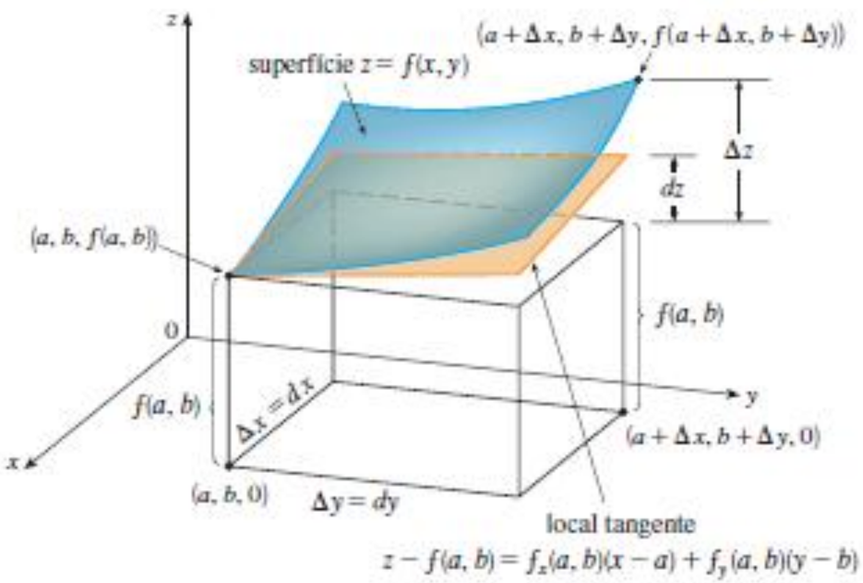


Figura 7

Exemplo 4

(a) Se $z = f(x, y) = x^2 + 3xy – y^2$, determine a diferencial dz.

(b) Se x varia de 2 a 2,05 e y varia de 3 a 2,96, compare os valores de Δz e dz.

SOLUÇÃO:

(a) Definição 10 vem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

(b) Tomando $x = 2$, $dx = \Delta x = 0{,}05$, $y = 3$ e $dy = \Delta y = -0{,}04$, obtemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0{,}05 + [3(2) - 2(3)](-0{,}04) = 0{,}65$$

O incremento de z é

$$\Delta z = f(2{,}05,\ 2{,}96) - f(2,\ 3)$$
$$= [(2{,}05)^2 + 3(2{,}05)(2{,}96) - (2{,}96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]$$
$$= 0{,}6449$$

Observe que $\Delta z \approx dz$, mas dz é mais simples de calcular.

Funções de Três ou Mais Variáveis

Funções de Três ou Mais Variáveis

Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidas de maneira análoga para as funções de mais que duas variáveis. Uma função diferenciável é definida por uma expressão semelhante àquela na Definição 7. Para essas funções a **aproximação linear** é

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

e a linearização $L(x, y, z)$ é o lado direito dessa expressão. Se $w = f(x, y, z)$, então o **incremento** de w é

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

Funções de Três ou Mais Variáveis

A **diferencial** *dw* é definida em termos das diferenciais *dx*, *dy* e *dz* das variáveis independentes por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

Exemplo 6

As dimensões de uma caixa retangular são medidas como 75 cm, 60 cm e 40 cm, e cada medida foi feita com precisão de 0,2 cm. Use diferenciais para estimar o maior erro possível quando o volume da caixa usando essas medidas.

SOLUÇÃO: Se as dimensões da caixa são x, y e z, seu volume é $V = xyz$ e; portanto,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Foi-nos dado que $|\Delta x| \leq 0{,}2$, $|\Delta y| \leq 0{,}2$, e $|\Delta z| \leq 0{,}2$. Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos; portanto, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ junto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1.980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a uma erro da ordem de 1.980 cm^3 no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa.