13 Funções Vetoriais

13.4 Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

Nesta seção, mostraremos como as ideias dos vetores tangente e normal, assim como as de curvatura, podem ser usadas na física para estudar o movimento de objetos, sua velocidade e sua aceleração, quando estão se movendo ao longo de uma curva espacial. Em particular, seguiremos os passos de Newton, usando seu método para deduzir a Primeira Lei de Kepler para o movimento planetário.

Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

Suponha que uma partícula se mova no espaço de forma que seu vetor posição no instante t é $\mathbf{r}(t)$. Observe da Figura 1 que, para pequenos valores de h, o vetor

$$\boxed{1} \qquad \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

se aproxima da direção da partícula que se move ao longo da curva $\mathbf{r}(t)$. Seu módulo mede o tamanho do vetor deslocamento por unidade de tempo.

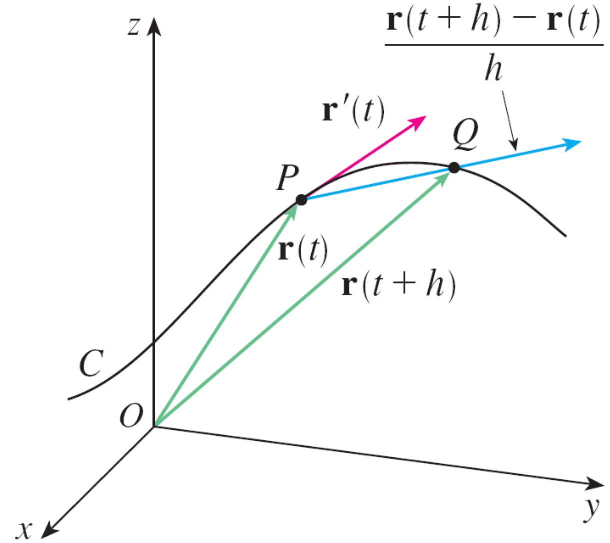

Figura 1

Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

O vetor $\boxed{1}$ fornece a velocidade média no intervalo de tempo de comprimento *h* e seu limite é o **vetor velocidade v**(*t*) no instante *t*:

$$\boxed{2} \qquad \mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)$$

Portanto, o vetor velocidade é também o vetor tangente e tem a direção da reta tangente à curva.

A **velocidade escalar** da partícula no instante *t* é a magnitude do vetor velocidade, ou seja, $|\mathbf{v}(t)|$.

Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

Isto é apropriado, pois, a partir de $\boxed{2}$, temos

$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \dfrac{ds}{dt}$ = taxa de variação da distância com relação ao tempo

Como no caso de movimento unidimensional, a **aceleração** da partícula é definida como a derivada da velocidade:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

Exemplo 1

O vetor posição de um objeto em movimento em um plano é dado por $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Determine a sua velocidade, a velocidade escalar aceleração quando $t = 1$ e ilustre geometricamente.

SOLUÇÃO: A velocidade e a aceleração no instante t são

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

e a velocidade escalar é

$$|\,\mathbf{v}(t)\,| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Quando $t = 1$, temos

$$\mathbf{v}(1) = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}(1) = 6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Os vetores velocidade e aceleração estão mostrados na Figura 2.

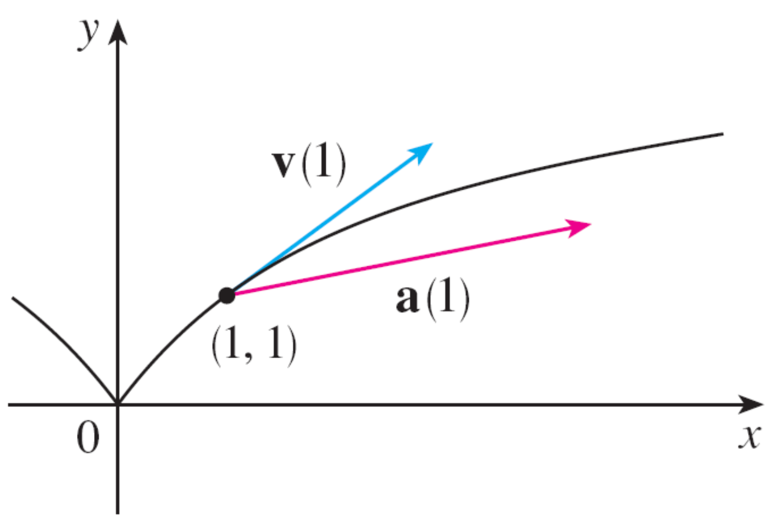

Figura 2

Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração

Em geral, por integração vetorial podemos recuperar a velocidade quando a aceleração for conhecida e a posição quando a velocidade for conhecida:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)\, du \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\, du$$

Se a força que age sobre a partícula é conhecida, então a aceleração pode ser determinada a partir da **Segunda Lei de Newton para o Movimento**. A versão vetorial dessa lei nos diz que, se em qualquer instante de tempo *t*, uma força **F**(*t*) age sobre um objeto *m* produzindo uma aceleração **a**(*t*), então

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Quando estudamos o movimento de uma partícula, é frequentemente útil decompor a aceleração em duas componentes, uma na direção da tangente e outra na direção da normal. Se escrevemos $v = |\mathbf{v}|$ para a velocidade escalar da partícula, então

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

e, assim, $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$

Se derivarmos ambos os lados em relação a t, obteremos

$\boxed{5}$ $$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Se usarmos a expressão da curvatura, temos

$$\boxed{6} \qquad \kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \qquad \text{logo} \qquad |\mathbf{T}'| = \kappa v$$

O vetor normal unitário foi definido na seção anterior como $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, então $\boxed{6}$ fornece

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v \mathbf{N}$$

e a Equação 5 se torna

$$\boxed{7} \qquad \boxed{\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}}$$

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Escrevendo a_T e a_N para as componentes tangencial e normal da aceleração, temos

$$\mathbf{a} = a_T\,\mathbf{T} + a_N\,\mathbf{N}$$

onde

$$\boxed{8} \qquad a_T = v' \qquad \text{e} \qquad a_N = \kappa v^2$$

Essa conclusão está ilustrada na na Figura 7.

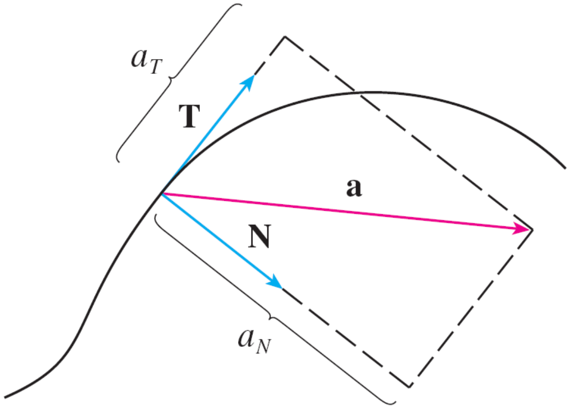

Figura 7

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Vamos olhar agora o que a Fórmula 7 nos diz. A primeira coisa a observar é que o vetor binormal **B** não aparece. Independentemente de como o objeto se move no espaço, sua aceleração sempre está nos planos de **T** e **N** (o plano osculador). (Lembre-se de que **T** fornece a direção e sentido do movimento e **N** aponta a direção na qual a curva está entortando.) Em seguida, observamos que a componente tangencial da aceleração é v', a taxa de variação da velocidade escalar, e a componente normal da aceleração é κv^2, a curvatura vezes o quadrado da velocidade escalar.

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Isso explica o que acontece com um passageiro em um carro – uma virada brusca em uma rua pode ser vista como um valor grande de curvatura κ, de forma que a componente da aceleração perpendicular ao movimento é grande e o passageiro é jogado contra a porta do carro. A alta velocidade em uma curva tem o mesmo efeito; de fato, se dobrarmos nossa velocidade escalar, a_N será aumentada por um fator de 4.

Apesar de termos uma expressão para as componentes tangencial e normal da aceleração na Equação 8, é desejável obter expressões que dependam somente de $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$, e $\mathbf{r}''$.

Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

Com essa finalidade, tomamos o produto escalar de **v** = v**T** com **a** como dada na Equação 7:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = v\mathbf{T} \cdot (v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N})$$

$$= vv'\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \kappa v^3\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}$$

$$= vv' \qquad \text{(uma vez que } \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \text{ e } \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0\text{)}$$

Portanto

9 $$a_T = v' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Usando a fórmula da curvatura dada, temos

10 $$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}|\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Exemplo 7

Uma partícula se move com função posição $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3 \rangle$. Determine as componentes tangencial e normal da aceleração.

SOLUÇÃO:

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$$

Exemplo 7 – *Solução*

continuação

Portanto, da Equação 9 vem que a componente tangencial é

$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Uma vez que $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t^2\,\mathbf{j}$

Da Equação 10 obtemos a componente normal

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}\,t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Leis de Kepler

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

Como a força gravitacional do Sol sobre um planeta é muito maior que as forças exercidas por outros corpos celestes, podemos ignorar todos os outros corpos do Universo, exceto o Sol e um planeta girando em torno dele. Usaremos um sistema de coordenadas com origem no Sol e seja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o vetor posição do planeta. (Poderíamos igualmente considerar $\mathbf{r}$ o vetor posição da Lua ou de um satélite girando em torno da Terra, ou um cometa movendo-se em torno de uma estrela.)

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

O vetor velocidade é $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ e o vetor aceleração é $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Utilizaremos as seguintes leis de Newton:

Segunda Lei do Movimento: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Lei da Gravitação: $$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$$

onde $\mathbf{F}$ é a força da gravidade sobre o planeta, m e M são as massas do planeta e do Sol, G é a constante gravitacional, $r = |\mathbf{r}|$, e $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ é o vetor unitário na direção de $\mathbf{r}$.

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Mostraremos inicialmente que o planeta se move em um plano. Igualando a expressão para **F** nas duas leis de Newton, chegamos a

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

e assim, **a** é paralelo a **r**. Segue que $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Usamos a fórmula

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

para escrever

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}'$$

$$= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Logo,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

onde **h** é um vetor constante. (Podemos assumir que **h** ≠ 0; isto é, **r** e **v** não são paralelos.) Isto significa que o vetor **r** = **r**(t) é perpendicular a **h** para todos os valores de t, de modo que o planeta sempre se situa no plano através da origem perpendicular de **h**. Assim, a órbita do planeta é uma curva plana.

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Para demonstrarmos a Primeira Lei de Kepler, vamos reescrever o vetor **h** como segue:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})'$$

$$= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u})$$

$$= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

Então,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \frac{-GM}{r^2}\,\mathbf{u} \times (r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM\,\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

$$= -GM\,[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}']$$

pela Fórmula
$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Mas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ e, uma vez que $|\mathbf{u}(t)| = 1$, ocorre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. Portanto

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

e $$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\boxed{11} \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

onde **c** é um vetor constante.

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base canônica **k** aponte na direção do vetor **h**. Em seguida, o planeta se move no plano *xy*. Como ambos **v** × **h** e **u** são perpendiculares a **h**, a Equação 11 mostra que **c** pertence ao plano *xy*. Isso significa que podemos escolher os eixos *x* e *y* de forma que o vetor **i** esteja na direção de **c**, como mostrado na Figura 8.

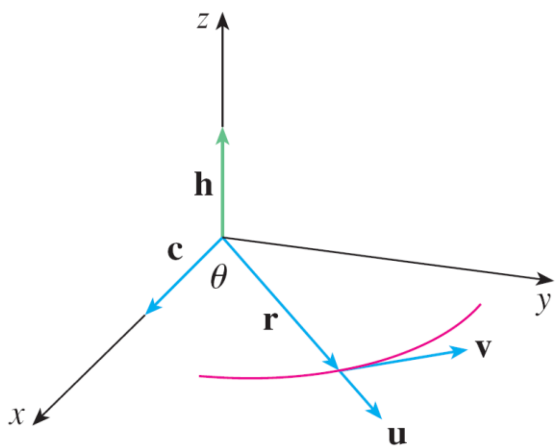

Figura 8

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Se θ é o ângulo entre **c** e **r**, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$

$$= GMr\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}|\,|\mathbf{c}| \cos\theta = GMr + rc\cos\theta$$

onde $c = |\mathbf{c}|$. Então,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM}\,\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

onde $e = c/(GM)$. Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde $h = |\mathbf{h}|$. Logo

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e \cos \theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e \cos \theta}$$

Leis de Kepler para o Movimento Planetário

Escrevendo $d = h^2/c$, obtemos a equação

$$\boxed{12} \qquad r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

vemos que a Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade *e*. Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e assim a cônica deve ser uma elipse.