Movimento de um projétil utilizando funções vetoriais

Juan López Linares

17 de novembro de 2021

1 Movimento de um projétil utilizando funções vetoriais

Exercício 1. *A velocidade de disparo de uma arma é $v(0)$. Qual ângulo de elevação deve ser utilizado para atingir um objeto (na mesma altura da arma) a distância L? A constante da gravidade g é conhecida.*

1.1 Solução

Conhece-se a rapidez inicial $v(0)$, o alcance L e g. Desconsiderando o atrito a única força existente é a da gravidade. Colocando um sistema de eixos cartesianos com origem no ponto de disparo e orientando o eixo x para direita e o eixo y para cima tem-se:

$$\overrightarrow{a(t)} =< 0, -g > .$$

O vetor velocidade inicial é:

$$\overrightarrow{v(0)} = v(0) < \cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha) >,$$

onde α é o ângulo de elevação.

O vetor velocidade é calculado integrando o vetor aceleração:

$$\overrightarrow{v(t)} - \overrightarrow{v(0)} = \int_0^t \overrightarrow{a(t)} dt,$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{v(0)} + \int_0^t < 0, -g > dt.$$

Após a integração encontra-se:

$$\overrightarrow{v(t)} = v(0) < \cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha) > + < 0, -gt >,$$

$$\overrightarrow{v(t)} = < v(0)\cos(\alpha), v(0)\operatorname{sen}(\alpha) - gt > .$$

O vetor posição inicial é:

$$\overrightarrow{r(0)} = < 0, 0 > .$$

O vetor posição é calculado integrando o vetor velocidade:

$$\overrightarrow{r(t)} - \overrightarrow{r(0)} = \int_0^t \overrightarrow{v(t)} dt,$$

$$\overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{r(0)} + \int_0^t < v(0)\cos(\alpha), v(0)\operatorname{sen}(\alpha) - gt > dt.$$

Após a integração encontra-se:

$$\overrightarrow{r(t)} = < v(0)\cos(\alpha)t, v(0)\operatorname{sen}(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} > .$$

Seja $T \neq 0$ o tempo de voo até que o projetil retorna na altura inicial. Segue que:

$$\overrightarrow{r(T)} = < v(0)\cos(\alpha)T, v(0)\operatorname{sen}(\alpha)T - \frac{gT^2}{2} > = < L, 0 > .$$

Da igualdade da componente x encontra-se:

$$T = \frac{L}{v(0)\cos(\alpha)}. \tag{1}$$

Da igualdade da componente y segue:

$$T = \frac{2v(0)\operatorname{sen}(\alpha)}{g}. \tag{2}$$

Igualando (1) e (2) tem-se:

$$\frac{L}{v(0)\cos(\alpha)} = \frac{2v(0)\operatorname{sen}(\alpha)}{g},$$

$$2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{Lg}{v^2(0)}.$$

Pela identidade do seno do ângulo duplo chega-se:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{Lg}{v^2(0)},$$

$$2\alpha = \arcsin\left(\frac{Lg}{v^2(0)}\right).$$

A discussão dos conceitos de velocidade tangencial e normal e sua aplicação na Física está disponível em vídeo.