13 Funções Vetoriais

13.2 Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

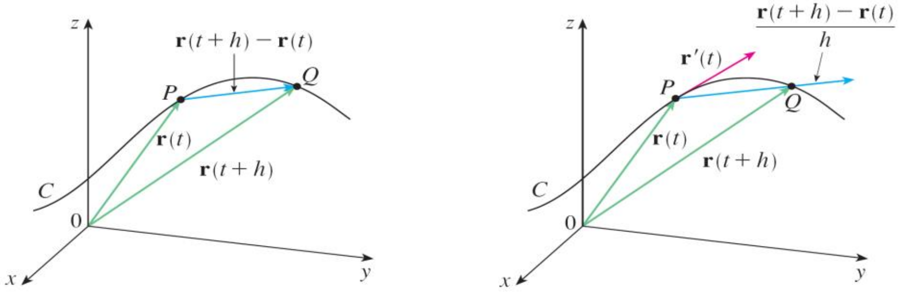
Derivadas

Derivadas

A **derivada r′** de uma função vetorial **r** é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

1 $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se esse limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1.



(a) O vetor secante $\overrightarrow{PQ}$ (b) O vetor tangente r′(t)

Figura 1

Derivadas

Se os pontos P e Q têm vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + h)$, então $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tem a mesmo sentido que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Quando $h \to 0$, parece que esse vetor se aproxima de um vetor que está sobre a reta tangente. Por essa razão, o vetor $\mathbf{r}'(t)$ é chamado o **vetor tangente** à curva definida por $\mathbf{r}$ no ponto P, desde que $\mathbf{r}'(t)$ exista e $r'(t) \neq \mathbf{0}$. A **reta tangente** a C em P é definida como a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\mathbf{r}'(t)$. Teremos ocasião de considerar o **vetor tangente unitário**, dado por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Derivadas

O teorema seguinte fornece um método conveniente para calcular a derivada de uma função vetorial **r** por derivação de cada componente de **r**.

2 Teorema Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, onde f, g, e h são funções diferenciáveis, então

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

Exemplo 1

(a) Determine a derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \text{sen}\,2t\mathbf{k}$.

(b) Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

SOLUÇÃO:

(a) De acordo com o Teorema 2, derivando cada componente de **r**, obtemos:

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\,\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Uma vez que $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ e $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, o vetor unitário tangente no ponto (1, 0, 0) é

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

Derivadas

Do mesmo modo que para as funções reais, a **segunda derivada** da função vetorial $\mathbf{r}$ é a derivada de $\mathbf{r}'$, ou seja, $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$. Por exemplo, a segunda derivada da função é

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2 \cos t, -\text{sen } t, 0 \rangle$$

Regras de Derivação

Regras de Derivação

O próximo teorema mostra que as fórmulas de derivação para funções reais têm suas equivalentes para as funções vetoriais.

3 Teorema Suponha que **u** e **v** sejam funções vetoriais diferenciáveis, c um escalar e f uma função real. Então,

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$

4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$ (Regra da Cadeia)

Exemplo 4

Mostre que, se $\mathbf{r}(t)| = c$ (uma constante), então $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t.

SOLUÇÃO: Uma vez que

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

e c^2 é uma constante, da Fórmula 4 do Teorema 3 vem

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Assim, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$, o que diz que $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

Geometricamente, esse resultado indica que, se a curva está em uma esfera com o centro na origem, então o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ é sempre perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r}(t)$.

Integrais

Integrais

A **integral definida** de uma função vetorial contínua $\mathbf{r}(t)$ pode ser definida da mesma forma que para a função real, exceto que a integral resulta em um vetor. Mas podemos expressar a integral de $\mathbf{r}$ como a integral de suas funções componentes *f*, *g* e *h* como segue.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(t_i^*)\,\Delta t$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{k} \right]$$

Integrais

e também

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Integrais

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde **R** é uma primitiva de **r**, ou seja, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

Exemplo 5

Se $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\, \mathbf{i} + \text{sen}\, t\, \mathbf{j} + 2t\, \mathbf{k}$, então

$$\int \mathbf{r}(t)\, dt = \left(\int 2 \cos t\, dt \right) \mathbf{i} + \left(\int \text{sen}\, t\, dt \right) \mathbf{j} + \left(\int 2t\, dt \right) \mathbf{k}$$

$$= 2\, \text{sen}\, t\, \mathbf{i} - \cos t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k} + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\, dt = \Big[2 \sin t\, \mathbf{i} - \cos t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k} \Big]_0^{\pi/2} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\, \mathbf{k}$$