Noturno, Alimentos, Prova - 1, 2015

(1) Resolva o problema de valor inicial

$y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$.

$r^2 - 2r - 3 = 0$ Eq. Caraterística

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \quad 4$$

$r_1 = 3 \quad r_2 = -1 \quad$ Tipo I, $r_1 \neq r_2$

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

Usando a primeira restrição: $y(1) = 3$

$$y(1) = \boxed{3 = C_1 e^3 + C_2 e^{-1}} \quad (I)$$

Vamos derivar antes de usar a segunda restrição

$$y'_{gh}(x) = 3C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x}$$

$$y'(1) = \boxed{1 = 3C_1 e^3 - C_2 e^{-1}} \quad (II)$$

$$\begin{array}{lr} e^3 C_1 + e^{-1} C_2 = 3 & (I) \\ + \; 3e^3 C_1 - e^{-1} C_2 = 1 & (II) \\ \hline \cancel{4} e^3 C_1 = \cancel{4} & \end{array}$$

$$C_1 = \frac{1}{e^3} = e^{-3}$$

$$\boxed{C_1 = e^{-3}}$$

$$3e^3 e^{-3} - e^{-1} C_2 = 1$$

$$3 - 1 = e^{-1} C_2 \rightarrow C_2 = \frac{2}{e^{-1}} \Rightarrow \boxed{C_2 = 2e}$$

A solução do problema de valor inicial (2)

é $\boxed{y(x) = e^{-3}e^{3x} + 2ee^{-x}}$

ou

$$\boxed{y(x) = e^{3(x-1)} + 2e^{-(x-1)}}$$

(2) Escreva uma solução particular de teste para o "Método dos Coeficientes Indeterminados" da equação diferencial não homogênea:

$$y'' + 6y' + 2y = x^3 + e^x sen(2x).$$

Não determine os coeficientes.

Sol.: $y'' + 6y' + 2y = 0$ Eq. Dif. Homogênea Correspondente

$r^2 + 6r + 2 = 0$ Eq. Caraterística

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-8}}{2}$$

$$r_{1,2} = -3 \pm \sqrt{\frac{28}{4}}$$

$r_{1,2} = -3 \pm \sqrt{7}$ Tipo I: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{(-3+\sqrt{7})x} + C_2 e^{(-3-\sqrt{7})x}$$

O termo não homogêneo

$$G(x) = x^3 + e^x sen(2x)$$

pode ser escrito como $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$

...

onde $G_1(x) = x^3$ e $G_2(x) = e^x \operatorname{sen}(2x)$

Temos que propor uma solução particular formada por duas partes:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$ Princípio de Superposição

A solução $y_{p1}(x)$ deve satisfazer a eq.

$$y'' + 6y' + 2y = x^3$$ e

a solução $y_{p2}(x)$ deve satisfazer a eq.

$$y'' + 6y' + 2y = e^x \operatorname{sen}(2x)$$

Pelo método dos Coeficientes Indeterminados

$$y_{p1}(x) = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

$$y_{p2}(x) = e^x \left[B\operatorname{sen}(2x) + C\operatorname{sen}(2x) \right]$$

$$y_p(x) = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + e^x \left[B\operatorname{sen}(2x) + C\cos(2x) \right]$$

A_3, A_2, A_1, A_0, B e C são os coeficientes indeterminados

3 Encontre as equações paramétricas que representam o deslocamento de uma partícula em um segmento de reta do ponto inicial $(4,-3,1)$ ao ponto final $(-2,5,-2)$.

Sol.:

$$P_i = (4,-3,1)$$

$$P_f = (-2,5,-2)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_i + \vec{v}\cdot t$$

← Eq. de uma reta. A mesma do mov. ret. uniforme de Física

$\vec{r}_i$ ← P_i

$$\vec{v} = P_f - P_i$$

vetor paralelo a reta

$$= (-2,5,-2) - (4,-3,1)$$

$$\vec{v} = (-6,8,-3)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} t$$

$$\begin{cases} x(t) = 4 - 6t \\ y(t) = -3 + 8t \\ z(t) = 1 - 3t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

segmento entre P_i e P_f

Verificação

Se $t=0$

$x(0) = 4$

$y(0) = -3$

$z(0) = 1$

Se $t=1$

$x(1) = -2$

$y(1) = 5$

$z(1) = -2$

4) Determine se a sequência $a_n = \frac{4n-3}{3n+4}$ é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

Sol.: $a_n = \frac{4n-3}{3n+4}$

$a_n = \left\{ \frac{1}{7}, \frac{5}{10}, \frac{9}{13}, \dots \right\}$

Parece ser crescente.

trocando $n \rightarrow n+1$

$$a_{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{3(n+1)+4} = \frac{4n+1}{3n+7}$$

Para provar que é crescente preciso mostrar que $\forall n > n_0$ teremos $a_{n+1} \geq a_n$

para todo

valor inicial

$$a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n$$

$$\frac{4n+1}{3n+7} \overset{?}{\geq} \frac{4n-3}{3n+4}$$

Os denominadores são positivos para $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(4n+1)(3n+4) \overset{?}{\geq} (4n-3)(3n+7)$$

$$\cancel{12n^2} + 16n + 3n + 4 \overset{?}{\geq} \cancel{12n^2} + 28n - 9n - 21$$

$$\cancel{19n} + 4 \overset{?}{\geq} \cancel{19n} - 21$$

$$\boxed{4 \geq -21} \leftarrow \text{Verdadeiro}$$

A suposição inicial é verdadeira e válida para $\forall n \in \mathbb{N}$

A sequência é crescente.

O limite de a_n é $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n-3}{3n+4} \right) = \frac{4}{3}$

Vamos provar que a_n é limitada superiormente pelo número $M=2$., Isto é:

para todo $n > n_0$ natural. $\rightarrow$ $a_n < 2$

$$\frac{4n-3}{3n+4} \overset{?}{<} 2$$

O denominador é positivo para $\forall n \in \mathbb{N}$

$$4n-3 \overset{?}{<} 2(3n+4)$$

$$4n-3 \overset{?}{<} 6n+8$$

$$-3 \overset{?}{<} 2n+8$$

$$0 \overset{?}{<} 2n+11$$

Sim, verdadeiro para todo $n=0,1,\dots$ $n \in \mathbb{N}$

Isso prova que a_n é limitada superiormente

A sequência também é limitada inferiormente

Isto é, $a_n > 0$ $\forall n > n_0$.

$$\frac{4n-3}{3n+4} \overset{?}{>} 0$$

O denominador é um número positivo

$$4n-3 \overset{?}{>} 0$$

Essa desigualdade será verdadeira para todo n maior o igual a 1. Isto é, $n_0 = 1$

$$4n-3 > 0 \quad \text{se} \quad n \geq 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

Isso prova que a_n é limitada inferiormente

(5) Determine se a série é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n^3}\right)$. Justifique sua resposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n^3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^1 n^{1/2}}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^3}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{3/2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^3}.$$

As duas séries são séries p

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

com $p>1$. As séries p, com $p>1$ são convergentes, como foi provado na aula pelo teste da Integral Imprópria.

Logo, a série de partida é convergente por ser a soma de outras duas séries convergentes.