Diurno, Alimentos, Cálculo II, Prova-1, 2015

1

1) Resolva o problema de valor inicial

$y'' + 9y = 0$, $y(\pi/3) = 0$, $y'(\pi/3) = 1$.

$y(x) = e^{rx}$ ← proposta de solução

$r^2 + 9 = 0$ ← Eq. Característica

$r^2 = -9$

$r_{1,2} = \pm 3i = \alpha \pm \beta i$ TIPO III $y_{gh}(x) = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)]$

$\alpha = 0$ e $\beta = 3$

$y_{gh}(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)$

Usando a primeira restrição: $y(\pi/3) = 0$

$y(\pi/3) = 0 = C_1 \underbrace{\cos(\cancel{3}\tfrac{\pi}{\cancel{3}})}_{-1} + C_2 \underbrace{\operatorname{sen}(\cancel{3}\tfrac{\pi}{\cancel{3}})}_{0}$

$\boxed{C_1 = 0}$

$y'_{gh}(x) = 3C_2 \cos(3x)$

$y'_{gh}(\pi/3) = 3C_2 \underbrace{\cos(\cancel{3}\tfrac{\pi}{\cancel{3}})}_{-1} = 1$

$\boxed{C_2 = -\frac{1}{3}}$

$\boxed{y(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x)}$ Solução do Problema de Valor Inicial

2 Resolva a eq. dif. não homogênea

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}.$$

Sol. $y'' - 4y' + 4y = 0$ Eq. Homogênea Correspondente

$r^2 - 4r + 4 = 0$ Eq. Caraterística

$(r-2)^2 = 0$

Tipo II, $r_1 = r_2 = r \rightarrow y_{gh}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

$r = 2$

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$y_p(x) = A e^{-x}$

$y_p'(x) = -A e^{-x}$

$y_p''(x) = A e^{-x}$

$y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$

$A e^{-x} - 4(-A e^{-x}) + 4 A e^{-x} = e^{-x}$

$e^{-x} \neq 0$

$9A = 1$

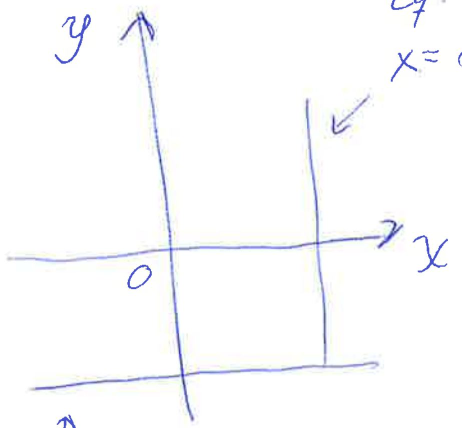
$A = 1/9.$

$y_p(x) = \frac{1}{9} e^{-x}$

$$y_{g.n.h.}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{9} e^{-x}$$

3 Determine as equações polares para retas horizontais e verticais do plano xy. Justifique o procedimento usado.

Eq. de uma reta vertical
$x = cte$



$y = cte$ ← Eq. de uma reta horizontal

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,sen(\theta) \end{aligned}\right\}$$ Equações que transformam de polares para cartesianas

$$\begin{cases} x = cte \\ x = r\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow r\cos(\theta) = cte$$

$$r = \frac{cte}{\cos(\theta)}$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{cte}{\cos(\theta)}}$$ ← Eq. de uma Reta vertical em coordenadas Polares.

$$\begin{cases} y = cte \\ y = r\,sen(\theta) \end{cases} \Rightarrow r\,sen(\theta) = cte$$

$$r = \frac{cte}{sen(\theta)}$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{cte}{sen(\theta)}}$$ ← Eq. de uma Reta Horizontal em coordenadas Polares.

④ Determine se a sequência $a_n = \frac{n\cos(n)}{n^2}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite. ④

Sol.: Queremos calcular $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\cos(n)}{n^2}\right]$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\cos(n)}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos(n)}{n}\right)$$

Como $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ para todo n

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos(n)}{n}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Podemos usar o Teorema do Módulo

Se $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$

$$|a_n| = \frac{|\cos(n)|}{n} \quad e \quad \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos(n)}{n}\right) = 0$$

A sequência é convergente e seu limite zero.

⑤ Use o Teste da Integral para determinar se a série ⑤

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

Sol.: $\underbrace{\{a_n\}}_{\text{Sequência Geradora}} = \{ \overset{n=1}{\frac{1}{3}}, \overset{n=2}{\frac{1}{7}}, \overset{n=3}{\frac{1}{11}}, \overset{n=4}{\frac{1}{15}}, \ldots, \frac{1}{4n-1}, \ldots \}$

$+4 \quad +4 \quad +4$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{4n-1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

A série $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-1} \right)$

Pelo Teste da Integral

$$a_n \to f(x)$$

$$\frac{1}{4n-1} \qquad \frac{1}{4x-1}$$

$$\underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{\text{Integral Imprópria}} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{4x-1} = \lim_{A\to\infty} \underbrace{\left[\int_1^{A} \frac{dx}{4x-1} \right]}_{\substack{u = 4x-1 \\ du = 4\,dx}} = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{1}{4} \int_3^{4A-1} \frac{du}{u} \right]$$

Se $x = 1 \to u = 3$

$x = A \to u = 4A-1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x-1} = \frac{1}{4} \lim \left[\int_3^{4A-1} \frac{du}{u} \right] = \frac{1}{4} \cancel{\ln|u| \Big|_3^{4A-1}}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{A \to \infty} \left(\ln|u| \Big|_3^{4A-1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{A \to \infty} \left[\ln|4A-1| - \ln|3| \right]$$

Mas $\lim\limits_{A \to \infty} \left[\ln|4A-1| \right]$ = Não existe $= \infty$

Isso significa que

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x-1}$ é divergente e pelo Teste da Integral

a série correspondente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-1} \right)$ também

será divergente.