Biossistemas, Prova-1, 2015, Cálculo II (1)

(1) Resolva o problema de valor de fronteira

$y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0)=0$, $y(1)=3$.

Sol. $y(x) = e^{rx}$

$r^2 + 4r + 4 = 0$ Eq. Característica

$(r+2)^2 = 0$

$\boxed{r=-2} \longrightarrow$ Tipo II, $r_1 = r_2 = r \longrightarrow y_{gh}(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

$y_{gh}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

Usando a primeira restrição: $y(0)=0$

$y(0) = 0 = C_1 \overset{1}{e^0} + \cancel{C_2 \cdot \overset{0}{0} \cdot e^0}$

$\boxed{C_1 = 0}$

Usando a segunda restrição: $y(1)=3$

$y(1) = 3 = C_2 \cdot 1 \cdot e^{-2\cdot 1}$

$C_2 = \dfrac{3}{e^{-2}}$

$\boxed{C_2 = 3e^2}$

$\boxed{y(x) = 3e^2 x e^{-2x}}$

(2) Escreva uma solução particular de teste para o "Método dos Coeficientes Indeterminados" da eq. dif. não homogênea $y''+3y' = 1 + xe^{-3x}$. Não determine os coeficientes.

(2)

Sol.: $y''+3y'=0$ Eq. Dif. Homogênea Correspondente

$r^2+3r=0$ Eq. Carateristica

$r(r+3)=0$

$r=0 \quad r=-3 \rightarrow$ $\boxed{\text{TIPO I}, \ r_1 \neq r_2 \rightarrow y_{gh}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}}$

$y_{gh}(x) = C_1 \overset{1}{e^{0x}} + C_2 e^{-3x}$

$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) \leftarrow$ Principio de Superposição

$y''+3y' = 1 + xe^{-3x}$

$y''+3y' = 1 \leftarrow$ Polinômio de Grau zero

$\cancel{y_{p1}(x) = A}$

$1 = f(x)$ é solução da eq. homogênea

$y_{p1}(x) = A \cdot x$

$y''+3y' = xe^{-3x}$

Produto de Polinômio de Grau um com exponencial

$y_{p2}(x) = (Bx+C) D e^{-3x}$

$BD = H_1$ e $CD = H_2$

$y_{p2}(x) = (H_1 x + H_2) e^{-3x}$

$$\boxed{y_p(x) = A \cdot x + (H_1 x + H_2) e^{-3x}}$$

③ Encontre uma equação cartesiana para a curva ③

polar $r^2\cos(2\theta) = 1$.

Sol.:

$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$ → Identidade Trigonométrica

$$r^2[\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)] = 1$$

mas $\left.\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{array}\right\}$ Transformação de Polares para Cartesianas

$\cos(\theta) = \dfrac{x}{r} \rightarrow \cos^2(\theta) = \dfrac{x^2}{r^2}$

$\text{sen}(\theta) = \dfrac{y}{r} \rightarrow \text{sen}^2(\theta) = \dfrac{y^2}{r^2}$

$$\cancel{r^2}\left[\frac{x^2}{\cancel{r^2}} - \frac{y^2}{\cancel{r^2}}\right] = 1$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = 1}$$ Hipérbole

Equação Cartesiana

4) Determine se a sequência $\left\{\frac{\ln(2+e^n)}{3n}\right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Sol.:

$$a_n = \frac{\ln(2+e^n)}{3n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Queremos calcular $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ Está Indeterminado

Encontramos a função correspondente

$$f(x) = \frac{\ln(2+e^x)}{3x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Vamos usar o Teorema de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\ln(2+e^x)}{3x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{e^x}{2+e^x}}{3}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x}{6+3e^x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x/e^x}{\frac{6}{e^x}+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{6}{e^x}+3}\right] = \frac{1}{3}$$

Então o limite da sequência $\{a_n\}$ existe e é

$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{1}{3}$. é convergente

5) Expresse o número 1,7414414414... como a razão de dois inteiros.

Sol.: Primeiro Caminho

$1,7\underbrace{414}_{n=1}\underbrace{414}_{n=2}\underbrace{414}_{n=3}\ldots = 1,7\overline{414}$

$1,7\overline{414} = 1,7 + 414 \cdot 10^{-4} + 414 \cdot 10^{-7} + 414 \cdot 10^{-10} + \cdots + 414 \cdot 10^{-(3n+1)} + \ldots$

$1,7\overline{414} = 1,7 + \sum_{n=1}^{\infty} 414 \cdot 10^{-(3n+1)}$

$= 1,7 + 414 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-(3n+1)} = 1,7 + 414 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-1} \cdot 10^{-3n}$

$= \frac{17}{10} + \frac{414}{10} \sum_{n=1}^{\infty} (10^{-3})^n$

É uma série geométrica com $r = 10^{-3}$

$|r| < 1$

É convergente

$b_n = (10^{-3})^n$

$b_{n+1} = (10^{-3})^{n+1}$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 10^{-3} = de = r$

Para uma série geométrica convergente sua soma é $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n+1} = \frac{a_1}{1-r}$

$1,7\overline{414} = \frac{17}{10} + \frac{414}{10}\left(\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}}\right) = \frac{17}{10} + \frac{414}{10} \frac{1}{999}$

$1,7\overline{414} = \frac{17}{10} + \frac{414}{9990} = \frac{17 \times 999 + 414}{9990} = \frac{16983 + 414}{9990} = \frac{17397}{9990}$

$\boxed{1,7\overline{414} = \frac{17397}{9990}} = \boxed{\frac{1933}{1110} = 1,7\overline{414}}$

dividindo por 9

Segundo Caminho

$1,7414414... = x$

$17,414414... = 10x$

$17414,414414... = 10000x$

$10000x = 17414,414414...$

$-\quad 10x = 17,414414...$

$9990x = 17414 - 17 = 17397$

$\boxed{x = \dfrac{17397}{9990}}$ ou

dividindo por 9

$\boxed{x = \dfrac{1933}{1110}}$