Noturno, Alimentos, P1 - 2016, Prof. Juan 

1) Resolva o problema de valor inicial

$y'' + 4y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

Sol.: $y'' + 4y' + 6y = 0$

Tocas: $y'' \to r^2, \quad y' \to r, \quad y \to 1$

$r^2 + 4r + 6 = 0$ Eq. Caraterística

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2} = -2 \pm i\sqrt{8/4}$$

$r = -2 \pm \sqrt{2}\, i$ Tipo III

$\alpha = -2 \quad \beta = \sqrt{2}$

$$y_{g.h.}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

$$y_{g.h.}(x) = e^{-2x}\left[C_1 \cos(\sqrt{2}\,x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)\right]$$

- Usando a 1ra restrição: $y(0) = 2$

$$2 = C_1 \overbrace{\cos(0)}^{1} + C_2 \overbrace{\operatorname{sen}(0)}^{0}$$

$$\boxed{C_1 = 2}$$

- Usando a 2da restrição: $y'(0) = 4$

∘ Primeiro Derivamos $y_{gh}(x)$

$$y'_{gh}(x) = -2e^{-2x}\left[C_1 \cos(\sqrt{2}\,x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)\right] + e^{-2x}\left[-\sqrt{2}\,C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x) + C_2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,x)\right]$$

$$y'_{gh}(x) = e^{-2x}\left[(-2C_1 + \sqrt{2}\,C_2)\cos(\sqrt{2}\,x) + (-2C_2 - \sqrt{2}\,C_1)\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,x)\right]$$

$$4 = -2C_1 + \sqrt{2}\,C_2$$

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ 4 = -2C_1 + \sqrt{2}\,C_2 \end{cases}$$

$$4 = -4 + \sqrt{2}\,C_2$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = C_2 \quad \text{ou} \quad \boxed{C_2 = 4\sqrt{2}}$$

$$y_{P.V.I.}(x) = e^{-2x}\left[2\cos(\sqrt{2}\,x) + 4\sqrt{2}\,\text{sen}(\sqrt{2}\,x)\right]$$

**2)** Resolva a equação diferencial não homogênea
$y'' - 6y' + 9y = e^{-2x}$.

Sol.: $y'' - 6y' + 9y = 0$ Eq. homogênea correspondente

Trocas: $y'' \to r^2$, $y' \to r$, $y \to 1$

$r^2 - 6r + 9 = 0$ Eq. caraterística

$(r-3)^2 = 0$

$r = 3$ dupla $\Rightarrow$ Tipo II

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Proposta de solução da eq. não homogênea

$y_p(x) = Ae^{-2x}$

$y_p'(x) = -2Ae^{-2x}$

$y_p''(x) = 4Ae^{-2x}$

Sobtituindo em

$y'' - 6y' + 9y = e^{-2x}$

$$4Ae^{-2x} - 6(-2Ae^{-2x}) + 9Ae^{-2x} = e^{-2x}$$

$$(4A + 12A + 9A)e^{-2x} = 1e^{-2x}$$

$$25A = 1$$

$$\boxed{A = 1/25}$$

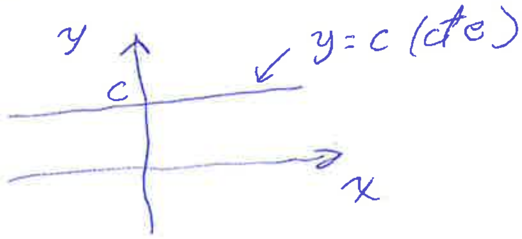
Logo $y_p(x) = \frac{1}{25}e^{-2x}$

e $y_{g.n.h.}(x) = y_{g.h.}(x) + y_p(x)$

$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{25}e^{-2x}}$$

3) Determine as equações polares para retas horizontais e verticais do plano $xy$. Justifique o procedimento usado.

Sol.: Retas Horizontais



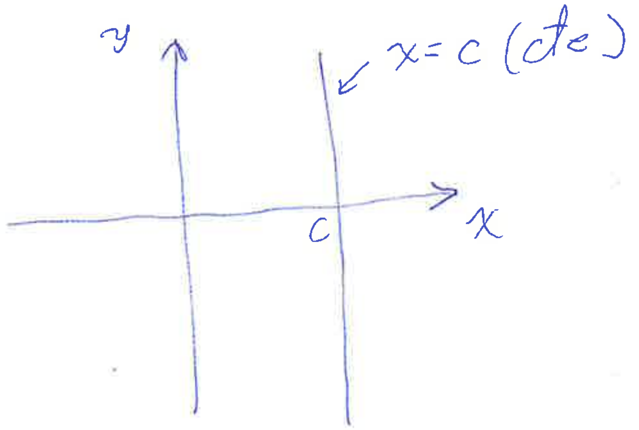

Usando $y = r\,sen(\theta)$

temos $\begin{cases} y = c \\ y = r\,sen(\theta) \end{cases}$

$$r\,sen(\theta) = c$$

Eq. Polar para uma reta horizontal $\boxed{r(\theta) = \frac{c}{sen(\theta)}}$

Retas Verticais




Usando $\cancel{x} = r\cos(\theta)$ temos

$$\begin{cases} x = c \\ x = r\cos(\theta) \end{cases}$$

$$c = r\cos(\theta)$$

Eq. Polar de uma reta vertical $\boxed{r(\theta) = \dfrac{c}{\cos(\theta)}}$

4 Determine se a sequência $a_n = \dfrac{n\cos(n)}{n^2}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Sol.: $a_n = \dfrac{\cancel{n}\cos(n)}{n^2} = \dfrac{\cos(n)}{n}$

e $|\cos(n)| \leq 1$ para todo $n \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\cos(n)}{n}\right] = ?$$

Vamos usar o Teorema do Módulo

Se $\lim_{n\to\infty}(|a_n|) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$

$$a_n = \frac{\cos(n)}{n}$$

$$0 < |a_n| = \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \quad , \forall n \geq 1.$$

logo $\lim_{n\to\infty} |a_n| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n}\right| = 0.$$

Pelo Teorema do Módulo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos(n)}{n}\right) = 0$$

5 Use o Teste da Integral para determinar se a série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

é convergente ou divergente.

Sol.: A seq. geradora da série é

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots\right\}$$

$$a_n = \frac{1}{2n} \quad , n \geq 1 , n \in \mathbb{N}$$

Logo $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$

caso seja convergente

Para usar o Teste da Integral

$$a_n = \frac{1}{2n} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2x}$$

$n \geq 1$ $\qquad$ $x \geq 1$

É uma função contínua, positiva e decrescente quando $x \geq 1$.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\int_1^{A} \frac{dx}{x}\right] =$$

caso convergente

$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\ln|x|\Big|_1^A\right] = \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\ln|A| - \cancelto{0}{\ln(1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left[\ln|A|\right] = \infty \quad \text{(Não existe o limite)}$$

Logo, a integral imprópria é divergente e pelo Teorema do Teste da Integral a série associada $\sum\left(\frac{1}{2n}\right)$ também será DIVERGENTE.

- Essa série é a metade de uma série harmônica e a série harmônica é divergente conforme pode ser provado por outro caminho. (Veja vídeo aulas).