Diurno, Alimentos, P1, 2016, Prof. Juan



1) Resolva, se possível, o problema de valor de fronteira

$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2.$

Sol.: $y'' + 2y' + 5y = 0$

Trocamos $y'' \to r^2$, $y' \to r$, $y \to 1$

$r^2 + 2r + 5 = 0$ Eq. Característica

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i = \alpha \pm \beta i$$

$\boxed{\alpha = -1}$ e $\boxed{\beta = 2}$

Tipo III

$$y_{gh}(x) = e^{-x}\left[C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)\right]$$

Usando a primeira restrição: $y(0) = 1$

$$1 = \underbrace{e^{0}}_{1}\left[C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0}\right]$$

$\boxed{1 = C_1}$

Usando a segunda restrição: $y(\pi) = 2$

$$2 = e^{-\pi}\left[C_1 \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} + C_2 \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi)}_{0}\right]$$

$2 = e^{-\pi} C_1$

$\boxed{C_1 = \frac{2}{e^{-\pi}}} = 2e^{\pi}$

O P.V.C. não tem solução pois cada restrição leva a um valor diferente da constante $C_1$.

2) Escreva uma solução particular de teste para o "Método dos Coeficientes Indeterminados" da equação diferencial não homogênea

$y'' + 5y' = xe^{-3x}$. Não determine os coeficientes.

Sol.: $y'' + 5y' = 0$ Eq. Homogênea Correspondente

troca $y' \to r$, $y'' \to r^2$

$r^2 + 5r = 0$ Eq. Caraterística

$r(r+5) = 0$

$r = 0$ e $r = -5$ Tipo I

$$y_{gh}(x) = C_1 \underbrace{e^{0 \cdot x}}_{1} + C_2 e^{-5x}$$

$$y_{gh}(x) = C_1 + C_2 e^{-5x}$$

Proposta de Solução Particular para a eq. não homogênea

$$y_p(x) = (A_1 x + A_0) e^{-3x}$$
$$= A_1 xe^{-3x} + A_0 e^{-3x}$$

3) Encontre uma equação cartesiana para a curva polar $r^2\cos(2\theta)=1$. ③

Sol.: $r^2\cos(2\theta)=1$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \\ x^2+y^2 = r^2 \\ \dfrac{y}{x} = \tan(\theta) \end{cases}$$

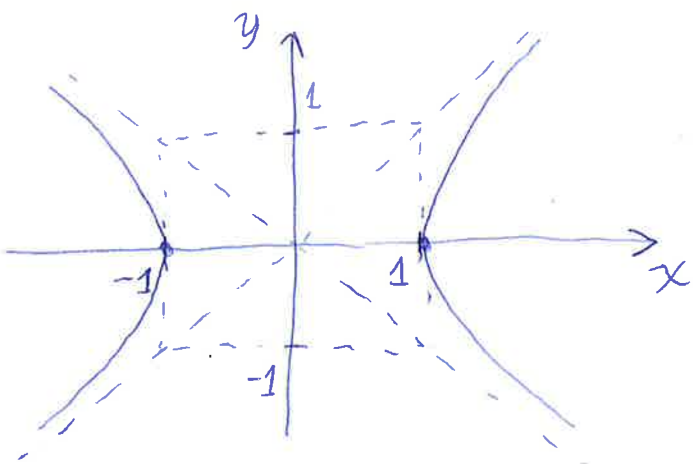
$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta)$$

$$\cos(2\theta) = \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

$$r^2\cos(2\theta) = 1$$

$$\cancel{r^2}\left[\frac{x^2-y^2}{\cancel{r^2}}\right] = 1$$

$$\boxed{x^2-y^2=1}$$ Hipérbole



4) Determine se a sequência $\left\{ \frac{\ln(2+e^n)}{3n} \right\}$ converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.

Sol.: $\lim\limits_{n\to\infty} \left[ \frac{\ln(2+e^n)}{3n} \right] = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

Vamos usar o Teorema

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } \lim\limits_{x\to\infty} [f(x)] = L \implies \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = L \\ \text{e } a_n = f(x=n) \end{array}}$$

Para isso transformamos a sequência em função

$$a_n = \frac{\ln(2+e^n)}{3n} \longrightarrow f(x) = \frac{\ln(2+e^x)}{3x}$$

Agora podemos usar o Teorema de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \left[ \frac{\ln(2+e^x)}{3x} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[ \frac{\frac{d}{dx}[\ln(2+e^x)]}{\frac{d}{dx}[3x]} \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[ \frac{\frac{e^x}{2+e^x}}{3} \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[ \frac{e^x/e^x}{3\left(\frac{2}{e^x}+1\right)} \right] = \frac{1}{3}$$

Logo a sequência é convergente e seu limite é $\frac{1}{3}$.

Note que se $n\to\infty \Rightarrow \ln(2+e^n) \to \ln(e^n) = n$.

5) Expresse o número $3{,}94144144144144\ldots$ como a razão de dois inteiros.



**Sol.:** $3{,}9414414\ldots = 3{,}9\overline{414}$

$$3{,}9\overline{414} = 3{,}9 + 0{,}0414 + 0{,}0000414 + 0{,}0000000414 + \ldots$$

$$= \frac{39}{10} + \underbrace{414 \cdot 10^{-4} + 414 \cdot 10^{-7} + 414 \cdot 10^{-10} + \ldots}_{\text{Série Geométrica}}$$

Pois a seq. geradora é uma progressão geométrica

$$\{a_n\} = 414 \cdot \{\underset{a_1}{10^{-4}}, \underset{a_2}{10^{-7}}, \underset{a_3}{10^{-10}}, \ldots, 10^{-(3n+1)}, \ldots\}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{10^{-7}}{10^{-4}} = 10^{-3} \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{10^{-10}}{10^{-7}} = 10^{-3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{-(3n+4)}}{10^{-(3n+1)}} = 10^{-3} = r = cte \quad \text{e} \quad |r| < 1$$

$$\frac{1}{1000} < 1$$

Logo, a série geométrica é convergente e sua soma pode ser calculada usando a expressão: $\sum_{n=1}^{\infty} (a r^{n-1}) = \frac{a}{1-r}$

$$3{,}9\overline{414} = \frac{39}{10} + 414 \frac{10^{-4}}{1 - 10^{-3}}$$

$$\frac{10^{-4}}{1-10^{-3}} = \frac{10^{-4}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{10^{-4}}{\frac{999}{1000}} = \frac{10^{-4}\cdot 10^{3}}{999} = \frac{1}{9990}$$

$$3,9\overline{414} = \frac{39}{10} + \frac{414}{9990} = \frac{39\cdot 999 + 414}{9990} = \frac{38961+414}{9990}$$

$$3,9\overline{414} = \frac{39375}{9990} = \frac{875}{222}$$ $MDC(39375, 990) = 45$

Caminho alternativo

$$x = 3,9414\ldots$$

$$10000x = 39414,414\ldots$$

$$-\ 10x = 39,414\ldots$$

$$9990x = 39414 - 39$$

$$9990x = 39375$$

$$x = \frac{39375}{9990} = \frac{875}{222}$$