Biossistemas, Cálculo II, 13/10/2016, Prof. Juan López

1) Resolva o problema de valor inicial

$y'' + 4y = 0, \quad y(\pi/6) = 1, \quad y'(\pi/6) = 0.$

Sol.: $y'' + 4y = 0$

Trocamos $y'' \to r^2$, $y' \to r$ e $y \to 1$

$r^2 + 4 = 0$

$r^2 = -4$

$r = \pm 2i = \alpha \pm \beta i$ Tipo III

$\alpha = 0$ e $\beta = 2$

$y_{gh}(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]$

$y_{gh}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x).$

Dois Caminhos

1 Primeiro: Troca x por $x - \pi/6$

$y_{gh}(x) = D_1 \cos(2(x-\pi/6)) + D_2 \operatorname{sen}(2(x-\pi/6))$

Usando a primeira restrição: $y(\pi/6) = 1$

$1 = D_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + D_2 \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0}$

$\boxed{D_1 = 1}$

Para usar a segunda restrição primeiro encontramos $y'_{gh}(x)$.

$y'_{gh}(x) = -2D_1 \operatorname{sen}(2(x-\pi/6)) + 2D_2 \cos(2(\cancel{x}-\pi/6))$

$y'(\pi/6) = 0 = -2D_1 \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0} + 2D_2 \underbrace{\cos(0)}_{1}$

$2D_2 = 0 \longrightarrow \boxed{D_2 = 0}$

$$\boxed{y_{P.V.I}(x) = \cos(2(x-\pi/6))}$$

2 Segundo: sem a troca

$$y_{gh}(x) = C_1\cos(2x) + C_2\,\text{sen}(2x)$$

Usando a primeira restrição: $y(\pi/6) = 1$

$$1 = C_1\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right) + C_2\,\text{sen}\left(2\frac{\pi}{6}\right)$$

$$1 = C_1\underbrace{\cos(\pi/3)}_{1/2} + C_2\underbrace{\text{sen}(\pi/3)}_{\sqrt{3}/2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 1} \quad (I)$$

Para usar a segunda restrição derivamos $y_{gh}(x)$.

$$y'_{gh}(x) = -2C_1\,\text{sen}(2x) + 2C_2\cos(2x)$$

$$y'(\pi/6) = 0 = -2C_1\underbrace{\text{sen}(\pi/3)}_{\sqrt{3}/2} + 2C_2\underbrace{\cos(\pi/3)}_{1/2}$$

$$\boxed{-\sqrt{3}\,C_1 + C_2 = 0} \quad (II)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 = 1 \\ -\sqrt{3}\,C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$C_2 = \sqrt{3}\,C_1$$

$$\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}\,C_1 = 1$$

$$C_1\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 1$$

$$\boxed{C_1 = 1/2}$$

e

$$C_2 = \sqrt{3}\,C_1$$

$$\boxed{C_2 = \sqrt{3}/2}$$

Logo $\boxed{y_{P.V.I}(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}(2x)}$

As duas soluções são equivalentes

$$\underbrace{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)}_{\text{identidade trigonométrica}}$$

$$\cos(2(x-\pi/6)) = \cos(\underbrace{2x}_{a} + \underbrace{-\pi/3}_{b})$$

$$= \cos(2x)\cos(-\pi/3) - \mathrm{sen}(2x)\,\mathrm{sen}(-\pi/3)$$

$$= \cos(2x)\underbrace{\cos(\pi/3)}_{\frac{1}{2}} + \mathrm{sen}(2x)\underbrace{\mathrm{sen}(\pi/3)}_{\sqrt{3}/2}$$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$

$$\cos(2(x-\pi/6)) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sen}(2x)$$ ▣

2) Escreva uma solução particular de teste para o "Método dos Coeficientes Indeterminados" da equação diferencial não homogênea: $y'' + 6y' + 2y = x^2 + e^x\cos(5x)$. Não determine os coeficientes.

Sol.: $y'' + 6y' + 2y = 0$ Eq. homogênea correspondente

Trocamos $y'' \to r^2$, $y' \to r$, $y \to 1$

$r^2 + 6r + 2 = 0$ Eq. Caraterística

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{36-8}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{28}}{2} = -3 \pm \sqrt{\frac{28}{4}} = -3 \pm \sqrt{7}$$

Tipo I

$r_1 = -3 + \sqrt{7}$ e $r_2 = -3 - \sqrt{7}$

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{(-3+\sqrt{7})x} + C_2 e^{(-3-\sqrt{7})x}$$

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

Usando o princípio de Superposição

$$y'' + 6y' + 2y = x^2$$

$$y'' + 6y' + 2y = e^x \cos(5x)$$

$$y_{p1}(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$$

$$y_{p2}(x) = e^x \left[B_1 \cos(5x) + B_2 \operatorname{sen}(5x) \right]$$

$$y_p(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + e^x \left[B_1 \cos(5x) + B_2 \operatorname{sen}(5x) \right]$$

3) Encontre as equações paramétricas que representam o deslocamento de uma partícula em um segmento de reta do ponto inicial $(1,4,-1)$ ao ponto final $(-3,4,1)$.

Sol.: $\vec{OP_i} = (1,4,-1)$

$\vec{OP_f} = (-3,4,1)$

$\vec{P_iP_f} = \vec{OP_f} - \vec{OP_i} = (-3-1,\ 4-4,\ 1-(-1))$

$\vec{P_iP_f} = (-4,0,2)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v}\cdot t \qquad 0 \le t \le 1$$

$\vec{v} = \vec{P_iP_f}$

$\vec{r_0} = \vec{OP_i}$

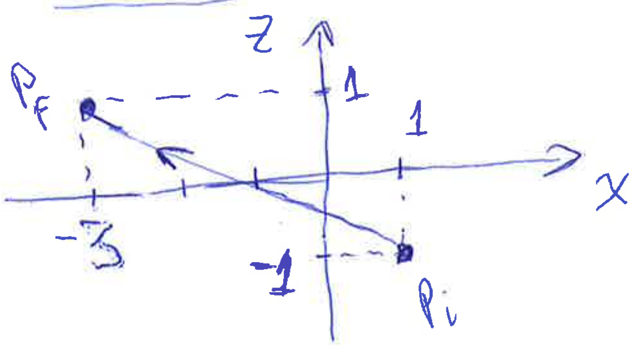
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 1 - 4t \\ y(t) = 4 \\ z(t) = -1 + 2t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1}$$

Se $t=0$ $\left.\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 4 \\ z(0) = -1 \end{array}\right\} \vec{P_i}$

Se $t=1$ $\left.\begin{array}{l} x(1) = -3 \\ y(1) = 4 \\ z(1) = 1 \end{array}\right\} \vec{P_f}$

No plano $y=4$



4) Determine se a sequência $a_n = \dfrac{7n-2}{4n+5}$ é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

Sol.: $$a_n = \frac{7n-2}{4n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n-2}{4n+5}\right) = \frac{7}{4}$$

n	a_n
1	$\frac{5}{9}$
2	$\frac{12}{13}$
3	$\frac{19}{17}$
$\vdots$	$\vdots$
∞	$7/4$

- Parece que é crescente
- Para mostrar que isso é verdade devemos provar que

$$a_{n+1} \geq a_n, \quad \forall n \geq n_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} = \frac{7(n+1)-2}{4(n+1)+5} = \frac{7n+5}{4n+9}$$

$$\frac{7n+5}{4n+9} \overset{?}{\geq} \frac{7n-2}{4n+5}$$

Como $4n+9 > 0 \quad \forall n \geq 1$

e $4n+5 > 0 \quad \forall n \geq 1$

$$(7n+5)(4n+5) \overset{?}{\geq} (7n-2)(4n+9)$$

$$\cancel{28n^2} + \cancel{55n} + 25 \overset{?}{\geq} \cancel{28n^2} + \cancel{55n} - 18$$

$$25 \geq -18 \quad \text{Verdadeiro}$$

Logo $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow$ A sequência é crescente

Limitada ?

- Inferiormente: Existe m tal que $m \leq a_n, \forall n > n_0$?

Sim, $m = 0 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{7n-2}{4n+5}, \forall n \geq 1$

Como $4n+5 > 0, \forall n \geq 1$

$\leq 7n-2$

$0 \leq 7n-2$

$2 \leq 7n$ verdadeira para $n \geq 1$.

- Superiormente: Existe M tal que $a_n \leq M, \forall n > n_0$?

Sim, $M = 2 \Rightarrow \dfrac{7n-2}{4n+5} < \dfrac{8n+10}{4n+5} = \dfrac{2(4n+5)}{(4n+5)} = 2$

$$\frac{7n-2}{4n+5} < 2, \quad \forall n \geq 1$$

Como a seq. é limitada inferiormente e superiormente então a seq. é limitada.

5) Determine se a série é convergente ou divergente: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3}\right)$. Justifique sua resposta.

<u>Sol.:</u> Supondo que a série é convergente podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^1 n^{1/2}}\right) + 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) + 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

8

As séries $\overset{p=3/2}{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}}$ e $\overset{p=3}{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{3}}\right)}}$ são séries-p.

Isto é, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{p}}\right)$. Foi provado que se $p>1$ as séries-p são convergentes. Nos dois casos do nosso exercício são $p>1$, logo as duas séries são convergentes e a soma de uma combinação linear de elas também.