P1, Noturno, Alimentos, 2017

1) Determine se as funções $y_1(x) = e^{ax}$ e $y_2(x) = xe^{ax}$ são linearmente independentes, $a \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta.

Sol.: Para determinar se duas funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são linearmente independentes podemos calcular o Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

Caso $W(x) \neq 0$ em algum ponto de um intervalo I as funções serão linealmente independentes.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} & xe^{ax} \\ ae^{ax} & e^{ax} + axe^{ax} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{ax} & xe^{ax} \\ ae^{ax} & e^{ax}(1+ax) \end{vmatrix}$$

$$W(x) = e^{2ax}(1+ax) - e^{2ax}ax$$

$$W(x) = e^{2ax}\left[1 + \cancel{ax} - \cancel{ax}\right]$$

$$W(x) = e^{2ax} \neq 0$$

A função exponencial nunca se anula, $\forall x$ e $\forall a$.

Logo $y_1(x) = e^{ax}$ e $y_2(x) = xe^{ax}$ são linearmente independentes para todo $a \in \mathbb{R}$. Isto é, não existe uma constante c tal que $y_2(x) = c\,y_1(x)$.

2) Resolva a equação diferencial não homogênea

$$y'' - 2y' - 3y = \cos(2x).$$

Sol.:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$ Eq. Dif. Homogênea Correspondente

Proposta de solução: $y(x) = e^{rx}$

Troca $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$r^2 - 2r - 3 = 0$ Eq. Auxiliar

$(r-3)(r+1) = 0$

$r_1 = 3 \quad r_2 = -1$ Tipo I: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}}$$

Vamos procurar uma solução particular da eq. não homogênea da forma

$$y_p(x) = D_1 \cos(2x) + D_2 \operatorname{sen}(2x) \quad (I)$$

$$y_p'(x) = -2D_1 \operatorname{sen}(2x) + 2D_2 \cos(2x) \quad (II)$$

$$y_p''(x) = -4D_1 \cos(2x) - 4D_2 \operatorname{sen}(2x) \quad (III)$$

Substituindo (I), (II) e (III) na eq. não homogênea

$$y'' - 2y' - 3y = \cos(2x)$$

$$-4D_1\cos(2x) - 4D_2\operatorname{sen}(2x) - 2\left[-2D_1\operatorname{sen}(2x) + 2D_2\cos(2x)\right] - 3\left[D_1\cos(2x) + D_2\operatorname{sen}(2x)\right] =$$

$$= \cos(2x)$$

$$\underbrace{(-4D_1-4D_2-3D_1)}_{-7D_1-4D_2}\cos(2x)+\underbrace{(-4D_2+4D_1-3D_2)}_{4D_1-7D_2}\operatorname{sen}(2x)=1\cdot\cos(2x)+0\cdot\operatorname{sen}(2x)$$

igualdade de ~~ponto~~ funções.

Os coeficientes respetivos das funções sen(2x) e cos(2x) devem ser iguais dos dois lados da eq.

$$\begin{cases}-7D_1-4D_2=1\\ 4D_1-7D_2=0\end{cases}\quad \overset{1}{\Longrightarrow}\quad 4D_1=7D_2$$

$$\boxed{D_1=\frac{7}{4}D_2}$$

2

3

$$-7\left(\frac{7}{4}D_2\right)-4D_2=1$$

$$\left(-\frac{49}{4}-4\right)D_2=1$$

$$\begin{array}{r}49\\+16\\\hline 65\end{array}$$

$$-\frac{65}{4}D_2=1$$

$$\boxed{D_2=-\frac{4}{65}}$$

4

5

$$D_1=\frac{7}{4}\left(-\frac{4}{65}\right)$$

$$\boxed{D_1=-\frac{7}{65}}$$

Logo, a solução particular procurada da eq. não homogénea é

$$y_p(x)=-\frac{7}{65}\cos(2x)-\frac{4}{65}\operatorname{sen}(2x).$$

E a solução geral da eq. não homogénea é

$$\boxed{y_{gnh.}(x)=\underbrace{C_1e^{3x}+C_2e^{-x}}_{y_{gh}(x)}+\underbrace{-\frac{7}{65}\cos(2x)-\frac{4}{65}\operatorname{sen}(2x)}_{y_p(x).}}$$

3) Encontre o comprimento da curva
$x(t) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(\pi t)$, $y(t) = 3 - 2\cos(\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Sol.:

$$L = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$ ← Fórmula para o cálculo do comprimento da curva paramétrica

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(\pi t) \\ y(t) = 3 - 2\cos(\pi t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$x'(t) = 2\pi \cos(\pi t)$

$y'(t) = 2\pi\, \mathrm{sen}(\pi t)$

$$[x'(t)]^2 = 4\pi^2 \cos^2(\pi t)$$
$$+ \ [y'(t)]^2 = 4\pi^2\, \mathrm{sen}^2(\pi t)$$
$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 4\pi^2 \underbrace{[\cos^2(\pi t) + \mathrm{sen}^2(\pi t)]}_{1}$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = 2\pi$$

$$L = \int_0^1 2\pi\, dt = 2\pi t \Big|_0^1 = 2\pi$$

Outro caminho, note que

$$\frac{x-1}{2} = \mathrm{sen}(\pi t) \quad \text{e} \quad -\left(\frac{y-3}{2}\right) = \cos(\pi t) \implies \mathrm{sen}^2(\pi t) + \cos^2(\pi t) = 1$$

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

Circunferência de Raio 2 centrada em (1,3)

Quando t muda de 0 a 1 o argumento das funções seno e cosseno muda de 0 a π. Logo, é percorrida somente a metade do comprimento de uma circunferência de raio 2.

$$L_{\odot} = 2\pi R$$

$$L_{\odot} = 2\pi \cdot 2$$

$$L = \frac{L_{\odot}}{2} = 2\pi$$

4) Prove que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

Sugestão: Use o Teste da Integral Imprópria.

<u>Sol.:</u> Seja $a_n = \frac{1}{n}$ a sequência geradora da série harmônica e $f(x) = \frac{1}{x}$ uma função associada. Como $f(x)$ é positiva, contínua e decrescente no intervalo $[1, \infty)$ podemos usar o Teste da Integral Imprópria.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty} \left[\int_1^A \frac{1}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\ln(x) \Big|_1^A\right] = \lim_{A\to\infty} \left[\ln(A) - \cancel{\ln(1)}^{\,0}\right]$$

Mas $\lim_{A\to\infty} [\ln(A)] = \infty$ (não existe).

Como a integral imprópria é divergente então a série associada $\left(\sum_{n=1} \frac{1}{n}\right)$ também será divergente.

Uma prova alternativa de que a série harmônica é divergente encontram no vídeo "Série Harmônica" (V115)

5) Qual o raio (R) e o intervalo (I) de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

Sol.: Vamos usar o teste da razão. Temos $a_n = \frac{x^n}{n+2}$ e

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1+2} = \frac{x^{n+1}}{n+3}. \text{ Logo}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{n+3} \cdot \frac{n+2}{x^n} = \frac{\cancel{x^n} \cdot x}{\cancel{x^n}} \cdot \frac{n+2}{n+3} = x \frac{n+2}{n+3}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \left|\frac{n+2}{n+3}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(|x| \left|\frac{n+2}{n+3}\right|\right) = |x| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)}_{1} = |x| = L$$

Pelo teste da razão se $L < 1$ a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Logo, $\sum \frac{x^n}{n+2}$ será absolutamente convergente se $|x| < 1$. Isto é, o raio de convergência é $\boxed{R = 1}$.
$-1 < x < 1$

- Para determinar o intervalo de convergência temos que estudar os extremos por separado:

i) Se $x = -1$ então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ é uma série alternada convergente pelo teste da série alternada: $b_n = \frac{1}{n+2}$ e decrescente ($b_{n+1} < b_n$) e $\lim_{n\to\infty} (b_n) = 0$

A série correspondente com módulo, $\sum_{n=0} |a_n|$, isto é $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ é divergente pelo teste da comparação no limite com a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que sabemos ser divergente. Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ é condicionalmente convergente.

ii) Se $x = 1$ então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ é uma série divergente pelo teste da comparação no limite. Seja $a_n = \frac{1}{n+2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Temos que $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n+2} \cdot n$ e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right) = 1 \text{ (finito)}$$

Como o limite existe as duas séries são divergentes simultâneamente: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Concluindo, o intervalo de convergência I é

$$\boxed{I = [-1, 1)}$$